J. Math. Soc. Japan
Vol. 32, No. 3, 1980

# Equations de Lie et fibrations

Par Odinete Renée ABIB

(Reçu le 27, oct., 1978)

**Introduction.**

Soit $\rho: M \rightarrow N$ une fibration analytique et $\mathcal{L}$ un pseudogroupe infinitésimal de Lie analytique, transitif sur $M$. Le faisceau $\mathcal{L}_0$ (resp. $\mathcal{L}'$) étant le noyau de $\mathcal{L}$ par $\rho$ (resp. la projection sur $N$ de $\mathcal{L}$ par $\rho$), Rodrigues [**5**], [**6**] a démontré que $\mathcal{L}_0$ (resp. $\mathcal{L}'$) est un pseudogroupe infinitésimal de Lie sur $M$ (resp. $N$).

Notre but principal est de montrer des résultats analogues pour les équations de Lie $R^h$ intransitives, formellements intégrables et que vérifient certaines conditions.

Si $R^h$ est une équation de Lie formellement intégrable sur le fibré tangent $T(M)$ qui laisse invariant la fibration $\rho$, au §3 nous donnons des conditions sous lesquelles elle détermine une équation de Lie $R'^{m_0}_{l_0}$ formellement intégrable sur $T(M)$ qui correspond au pseudogroupe noyau d'un pseudogroupe de Lie solution de $R^h$.

Au §4 nous donnons des conditions pour l'existence d'une équation de Lie $R''^{h_1}$ formellement intégrable sur $T(N)$ telle que tout germe de champs de vecteurs en $\rho(a)$ solution de $R''^{h_1}$ est l'image par $\rho$ d'un germe en $a$ d'un champ de vecteurs solution de $R^h$.

**1. Préliminaires.** Etant donné $T=T(M)$ le fibré tangent d'une variété différentiable $M$, $J^hT$ désigne l'ensemble de tous les jets d'ordre $h$ des sections différentiables du fibré $T$ ; l'ensemble $J^hT$ est encore un fibré vectoriel sur $M$ dont pour tout champ de vecteur $X$ sur $M$, $j^hX$ est une section :

$$j^hX: M \rightarrow J^hT$$
$$x \rightarrow j^h_x X .$$

Rappelons que $\underline{J^hT}$ désignant le faisceau des sections de $J^hT$ sur $M$, il existe sur $J^hT$ une et une seule structure de faisceau de $R$-algèbres de Lie :

$$\underline{J^hT} \wedge \underline{J^hT} \rightarrow \underline{J^hT}$$
$$[f \cdot j^hX, g j^hY] = f \cdot g j^h[X, Y] + f \cdot (Xg) j^hY - g(Yf) j^hX ,$$

où $f$ et $g$ sont des fonctions numériques sur $M$, et $X\cdot g$ et $Y\cdot f$ les dérivées de Lie de $g$ et $f$ par les champs des vecteurs $X$ et $Y$. Ce crochet étant un opérateur différentiel d'ordre 1, nous en déduisons un morphisme de fibrés vectoriels sur $M$:

$$J^{h+1}T\wedge J^{h+1}T\to J^hT$$

tel que

$$[[j^{h+1}X,\ j^{h+1}Y]]=j^h[X,\ Y]$$

et

$$[[j^{h+1}X,\ f\cdot j^{h+1}Y]]=f\cdot j^h[X,\ Y]$$

au niveau des sections locales.

Soit $E$ un fibré vectoriel sur $M$ et notons $\underline{E}$ le faisceau des sections différentiables de $E$. Il existe un et un seul opérateur

$$D:\ \underline{J^{h+1}E}\to\underline{T^*\otimes J^hE}$$

$$s\to j^1(\pi^h s)-s$$

tel que,

$$Ds=0,\ \text{si et seulement si},\ s\ \text{est intégrable},$$

et

$$D(f\cdot s)=f\cdot Ds+(\pi^h\circ s)\otimes df\,,$$

avec $df$ la différentielle extérieure de la fonction numérique $f$, où $\pi^h$ est la projection de $J^{h+1}E$ sur $J^hE$.

Ceci étant on démontre aisément les résultats suivants:

Proposition 1.1. *Soient $\eta^{h+1}$ et $\sigma^{h+1}$ sections du fibré vectoriel $J^{h+1}T$ ; alors,*

(1) $$[\pi^h(\eta^{h+1}),\ \pi^h(\sigma^{h+1})]=[[\eta^{h+1},\ \sigma^{h+1}]]+D(\eta^{h+1})(\sigma)-D(\sigma^{h+1})(n)\,,$$

*avec* $\eta=\pi^0(\eta^{h+1})$ *et* $\sigma=\pi^0(\sigma^{h+1})$.

(2) $$D([\eta^{h+1},\ \sigma^{h+1}])=[D(\eta^{h+1}),\ \pi^h(\sigma^{h+1})]+[\pi^h(\eta^{h+1}),\ D(\sigma^{h+1})]$$
$$+D(\sigma^{h+1})\overline{\wedge}(\pi^0\otimes id)\circ D(\sigma^{h+1})\overline{\wedge}(\pi^0\otimes id)\circ D(\eta^{h+1})$$

*où les éléments du second membre sont des sections de $J^hT\otimes T^*$ dont la valeur sur un champ de vecteurs $X$ est respectivement donnée par les formules suivantes,*

$$[D(\eta^{h+1}),\ \pi^h(\sigma^{h+1})](X)=[(D(\eta^{h+1}))(X),\ \pi^h(\sigma^{h+1})]\,.$$

$$[D(\eta^{h+1})\overline{\wedge}(\pi^0\otimes id)\circ D(\sigma^{h+1})](X)=D(\eta^{h+1})((\pi^0\circ D(\sigma^{h+1}))(X))\,.$$

Une équation différentiable linéaire d'ordre $h$ sur $T$ sera un sous-fibré vectoriel $R^h$ de $J^hT$, dont $(R^h)^{+l}=J^lR^h\cap J^{h+l}T$ (parfois noté $R^{h+l}$) sera noté le $l$-prolongement de l'équation $R^h$; on dit que $R^h$ est formellement intégrable si, pour tout $l\geqq 0$, $R^{h+l}$ est un fibré vectoriel et la projection $\pi^{h+l}$: $R^{h+l+1}\to R^{h+l}$

est surjective; $R^h$ sera transitif si la projection $\pi^0: R^h \to T(M)$ est surjective; les éléments $U$ de $\underline{R}^{h+l+1}$ sont déterminés par récurrence par les conditions suivantes:

$$\pi^{h+l}(U) \in \underline{R}^{h+l} \qquad \text{et} \quad DU \in \underline{T^* \otimes R^{h+l}}.$$

DEFINITION 1.1. Nous dirons que $R^h$ estune équation de Lie si l'on a $[\underline{R}^h, \underline{R}^h] \subset \underline{R}^h$.

Utilisant la proposition 1.1 on a:

PROPOSITION 1.2. *Soit $R^h$ un sous-fibré vectoriel de $J^hT$. Supposons que $R^{h+1}$ soit un fibré vectoriel et $\pi^h(R^{h+1}) = R^h$; les propriétés suivantes sont alors équivalentes*:

(1) $\qquad$ *$R^h$ estune équation de Lie.*

(2) $\qquad$ $[[\underline{R}^{h+1}, \underline{R}^{h+1}]] \subset \underline{R}^h$.

**2.** Soit $\rho: M \to N$ une fibration, c'est à dire, $\rho$ est une application différentiable surjective et de rang maximal. Notons $V$ le sous-fibré vectoriel de $T$ des vecteurs tangents aux fibres de $\rho$. Alors

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow T(M) \xrightarrow{\rho} \rho^{-1}(T(N)) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte des fibrés vectoriels sur $M$. Soient $E$ et $F$ des fibrés vectoriels sur $M$ et $N$ respectivement et $\varphi: E \to F$ un morphisme de fibrés sur $\rho$, de rang constant. On dira qu'une section $s$ de $E$ sur $U \subset M$ est $\varphi$-projetable si $\varphi(s(a)) = \varphi(s(b))$ pour $a$, $b$ dans $U$ avec $\rho(a) = \rho(b)$; alors la section $\varphi(s)$ de $F$ sur $\rho(U)$ qui à $y \in \rho(U)$ fait correspondre $\varphi(s(a))$ où $a \in U$ vérifie $\rho(a) = y$ est bien définie; on notera $\underline{E}_\varphi$ le faisceau des sections de $E$ qui sont $\varphi$-projetables et $J^h(E, \varphi) \subset J^hE$ le fibré vectoriel sur $M$ des $h$-jets des sections de $\underline{E}_\varphi$. Si $J^hF$ est le fibré des $h$-jets des sections de $F$ sur $N$ on a une application

$$\varphi: J^h(E, \varphi) \to J^hF$$
$$j_a^h s \to j_{\rho(a)}^h \varphi s.$$

Prenons $E = T$, $F = T(N)$ et $\varphi = \rho$; le fibré vectoriel $J^h(T, \rho)$ est une équation de Lie formellement intégrables, transitive et nous avons les suites exactes,

$$0 \longrightarrow J^hV \longrightarrow J^h(T, \rho) \xrightarrow{\rho} \rho^{-1}(J^hT(N)) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \underline{J^hV} \longrightarrow \underline{J^h(T, \rho)_\rho} \xrightarrow{\rho} \underline{J^hT(N)} \longrightarrow 0.$$

Pour tout $h$, considérons le sous fibré vectoriel $F(J^h(T, \rho)) = T^* \otimes J^hV + \rho^*(T^*(N)) \otimes J^h(T, \rho)$ de $T^* \otimes J^h(T, \rho)$.

On vérifie aisément que la suite,

$$0 \longrightarrow T^*\otimes J^h V \longrightarrow F(J^h(T, \rho)) \xrightarrow{\rho} \rho^{-1}(T^*(N)\otimes J^h T(N)) \longrightarrow 0,$$

des fibrés vectoriels sur $M$ est exacte où $\rho$ envoie $\varphi$ de $F(J^h(T, \rho))$ dans $\rho\varphi$ donné par $(\rho\varphi)(\rho_* U)=\rho(\varphi(U))$ avec $U$ dans $T$. On note $\underline{T^*\otimes J^h(T, \rho)_\rho}$ le faisceau des sections $\rho$-projetables; c'est un faisceau engendré sur $R$ par les sections de $T^*\otimes J^h(T, \rho)$ de la forme $U=\rho^*(\omega)\otimes j^h s$ et $U'=\omega'\otimes j^h s'$ où $\omega$ est une section de $T^*(N)$ et $\omega'$ une section de $T^*(M)$ et $s, s'$ des sections de $\underline{T(M)_\rho}$ avec $\rho(s')=0$; de plus, on a une application

$$\rho: \underline{T^*\otimes J^h(T, \rho)_\rho} \rightarrow \underline{T^*(N)\otimes J^h T(N)}.$$

PROPOSITION 2.1. *Si $U\in \underline{J^h(T, \rho)_\rho}$ alors $DU\in \underline{T^*\otimes J^{h-1}(T, \rho)_\rho}$ et $(\rho\circ D)(U)=(D\circ\rho)(U)$.*

PREUVE. Pour $U=f\cdot j^h s$ avec $s\in\underline{T(M)_\rho}$, $\rho s=0$ on a $DU=df\otimes j^{h-1}s$ et $0=D(\rho(U))=\rho(D(U))$. Pour $U=f\cdot j^h s$ avec $f$ fonction numérique $\rho$-projetable et $s$ section de $\underline{T(M)_\rho}$ on a $DU=df\otimes j^{h-1}s=d(\rho^* g)\otimes j^{h-1}s=\rho^*(dg)\otimes j^{h-1}s$ et $D(\rho(U))=D(g j^h \rho s)=dg\otimes j^{h-1}\rho s=\rho(DU)$; d'où le résultat.

Si $R^h\subset J^h(T, \rho)$ est une équation différentielle et s'il existe une équation différentielle $R''^h\subset J^h T(N)$ telle que $\rho(R^h_a)=R''^h{}_{\rho(a)}$ pour tout $a\in M$, alors $\rho: \underline{R^h_\rho}\rightarrow\underline{R''^h}$ est surjectif; si, de plus $R^h$ est une équation de Lie, alors $R''^h$ est une équation de Lie. Aussi $R''^h$ est transitif si $R^h$ l'est.

DEFINITION 2.1. Une équation différentielle $R^h\subset J^h(T, \rho)$ est $\rho$-projetable si pour tout $l\geqq 0$, $R^{h+l}$ est un fibré vectoriel, s'il existe une équation différentielle $R''^{h+l}\subset J^{h+l}T(N)$ telle que $\rho(R^{h+l}_a)=R''^{h+l}_{\rho(a)}$ pour tout $a\in M$.

Si $R^h\subset J^h(T, \rho)$ est $\rho$-projetable notons $R'^{h+l}=J^{h+l}V\cap R^{h+l}$ le noyau de $\rho: R^{h+l}\rightarrow\rho^{-1}(R''^{h+l})$ pour tout $l\geqq 0$; on a

RROPOSITION 2.2. *Si $R^h\subset J^h(T, \rho)$ est une équation différentielle $\rho$-projetable, alors $R''^{h+l+1}\subset(R''^{h+l})^{+1}$ et $R'^{h+l}=(R'^h)^{+l}$ pour tout $l\geqq 0$.*

PREUVE. $R'^{h+l}=J^{h+l}V\cap R^{h+l}=J^{h+l}V\cap J^l R^h\cap J^{h+l}T=J^{h+l}V\cap J^l R^h=J^l(J^h V)\cap J^{h+l}T\cap J^l R^h=(R'^h)^{+l}$. De $\pi^{h+l}(R^{h+l+1})\subset R^{h+l}$ et $\rho\circ\pi^{h+l}=\pi^{h+l}\circ\rho$ on obtient $\pi^{h+l}(R''^{h+l+1})\subset R''^{h+l}$. On a $\underline{R^{h+l+1}_\rho}=\underline{R^{h+l+1}}\cap\underline{J^{h+l+1}(T, \rho)_\rho}$; de $R^{h+l+1}=(R^{h+l})^{+1}$ la proposition 2.1 implique $D(\underline{R^{h+l+1}_\rho})\subset\underline{T^*\otimes R^{h+l}}\cap\underline{T^*\otimes J^{h+l}(T, \rho)_\rho}$; par suite $\rho(\underline{R^{h+l+1}_\rho})=\underline{R''^{h+l+1}}$ et proposition 2.1 implique que l'opérateur $D: \underline{J^{h+l+1}T(N)}\rightarrow\underline{T^*(N)\otimes J^{h+l}T(N)}$ envoie $R''^{h+l+1}$ dans $T^*(N)\otimes R''^{h+l}$; donc, $R''^{h+l+1}\subset(R''^{h+l})^{+1}$.

PROPOSITION 2.3. *Soit $\rho: M\rightarrow N$ une fibration à fibres connexes et $R^h\subset J^h(T, \rho)$ une équation de Lie formellement intégrable; si $R'^{h+l}=J^{h+l}V\cap R^{h+l}$ est un fibré vectoriel pour tout $l\geqq 0$, alors $R^h$ est $\rho$-projetable.*

PREUVE. Notons $J^{h+l+1}(M, \rho)$ l'espace des jets d'ordre $h+l+1$ inversibles d'applications de $M$ dans $M$ qui sont $\rho$-projetables; soit $\Gamma_0$ le pseudogroupe de tous les difféomorphismes locaux de $M$ qui induisent l'identité sur $N$; $\Gamma_0$ laisse fixé les fibres et opère transitivement sur les fibres de $\rho$; on a $J^{h+l+1}V$; de plus, si $a\in\rho^{-1}(a')$ l'application but $\beta: J_a^{h+l+1}\Gamma_0\to\rho^{-1}(a')$ est une fibration; par suite il existe un ouvert $U\subset\rho^{-1}(a')$ de $a$ tel que pour tout $b\in U$ l'on ait un élément $\phi\in P^{h+l+1}\cap J^{h+l+1}\Gamma_0$ de but $b$ où $P^{h+l+1}$ est la forme finie associée à l'équation de Lie $R^{h+l+1}$. Comme la fibre $\rho^{-1}(a')$ est connexe, pour tout $a$, $b$ dans $\rho^{-1}(a')$ il existe donc $\phi\in P^{h+l+1}\cap J^{h+l+1}\Gamma_0$ de source $a$ et but $b$. L'isomorphisme linéaire $\phi: J_a^{h+l}(T, \rho)\to J_b^{h+l}(T, \rho)$ est tel que $\rho\circ\phi=\rho$ et $\phi(R_a^{h+l})=R_b^{h+l}$; donc $\rho(R_a^{h+l})=\rho(R_b^{h+l})$; comme $R'^{h+l}$ est un fibré vectoriel, la dimension de $\rho(R_a^{h+l})$ est indépendante de $a$; d'où l'existence d'un sous-fibré vectoriel $R''^{h+l}\subset J^{h+l}T(N)$ avec $R''^{h+l}_{a'}=\rho(R_a^{h+l})$ si $a'\in N$, $a\in M$ avec $\rho(a)=a'$; ainsi $R^h$ est $\rho$-projetable.

COROLLAIRE 2.1. *Soit $\rho: M\to N$ une fibration invariante par un pseudogroupe infinitésimal de Lie $\mathcal{L}$ d'ordre $h$ sur $M$; si $R'^{h+l}=J^{h+l}V\cap J^{h+l}\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel pour tout $l\geqq 0$, alors l'équation différentielle $j^h\mathcal{L}$ est $\rho$-projetable.*

PREUVE. Posons $R^h=J^h\mathcal{L}$; alors $R^{h+l}=J^{h+l}\mathcal{L}$ pour tout $l\geqq 0$. On pourra appliquer la proposition précédente pour obtenir le résultat; comme $R^h$ est l'équation de définition d'un pseudogroupe nous donnerons une autre démonstration pour arriver au même résultat. Soient $s_1, s_2, \cdots, s_r$ des sections de $\mathcal{L}$ au voisinage ouvert $U\subset M$ d'un point $a\in\rho^{-1}(a')$ telles que $j_x^{h+l}s_1, \cdots, j_x^{h+l}s_r$ est une base de $J_x^{h+l}\mathcal{L}$ pour tout $x\in U$. L'ensemble $j_{a'}^{h+l}\rho(s_1), \cdots, j_{a'}^{h+l}\rho(s_r)$ est un système des générateurs de $\rho(J_x^{h+l}\mathcal{L})$ pour tout $x\in U\cap\rho^{-1}(a')$; de plus, l'ensemble des $x\in\rho^{-1}(a')$ tels que $\rho(J_x^{h+l}\mathcal{L})$ est un certain sous-espace de $J_{a'}^{h+l}T(N)$, est un ouvert de $\rho^{-1}(a')$; par suite le complémentaire dans $\rho^{-1}(a')$ de cet ensemble est la réunion d'ensembles ouverts; la fibre $\rho^{-1}(a')$ étant connexe on obtient $\rho(J_a^{h+l}\mathcal{L})=\rho(J_x^{h+l}\mathcal{L})$ pour tout $X\in\rho^{-1}(a')$. Ainsi $J^h\mathcal{L}$ est $\rho$-projetable.

COROLLAIRE 2.2. *Supposons $M$ et les fibres de $\rho$: $M\to N$ connexes. Soit $\mathcal{L}$ un pseudogroupe infinitésimal de Lie $\mathcal{L}$ d'ordre $h$ sur $M$, transitif et laissant $\rho$ invariant; alors $J^h\mathcal{L}$ est $\rho$-projetable.*

PREUVE. Comme $M$ est connexe et $R^{h+l+1}$ est une équation de Lie transitive, pour tous $a$ et $b$ dans $M$ il exists un $\phi\in J^{h+l+1}(M, \rho)$ de source $a$ et but $b$ tel que $\phi(R_a^{h+l})=R_b^{h+l}$ et $\phi(J_a^{h+l}V)=J_b^{h+l}V$; par suite $R'^{h+l}$ est un fibré vectoriel pour tout $l\geqq 0$; les fibres de $\rho$ étant connexe on obtient d'après la proposition 2.3 le résultat.

**3.** Soit $R^h\subset J^h(T, \rho)$ une équation différentielle telle que pour tout $l\geqq 0$, $R^{h+l}$ et $R'^{h+l}=J^{h+l}V\cap R^{h+l}$ soient des fibrés vectoriels. Si $m\geqq h$ on note $R_l'^m$ le sous-fibré $\pi^m(R'^{m+l})$ de $J^mT$ à fibre variable et on obtient une suite décroissante de sous-fibré à filbre variable de $J^mT$:

$$J^mT\supset R'^m\supset R_1'^m\supset\cdots\supset R_l'^m\supset\cdots$$

avec $R'^m=R_0'^m$.

LEMME 3.1. Soit $R^h\subset J^h(T,\rho)$ une équation différentielle telle que pour tout $m\geqq h$, $R^m$ soit un fibré vectoriel. Supposons que $R_l'^m$ soit un fibré vectoriel pour tous $l\geqq 0$ et $m\geqq h$; alors il existe des entiers $m_0\geqq h$, $l_0\geqq 0$ tels que

(1) l'équation $R_{l_0}'^{m_0}$ est formellement intégrable.

(2) $(R_{l_0}'^{m_0})^{+l}=R_{l_0}'^{m_0+l}$ pour tout $l\geqq 0$.

(3) $R_{l_0}'^{m_0+l}=\pi(R'^\infty)$ où $R'^\infty=\lim\limits_{l} R'^{h+l}$.

PREUVE. La projection $\pi^m: J^{m+1}T\to J^mT$ induit une application $\pi^m: R_l'^{m+1}\to R_l'^m$ de rang constant dont le noyau sera noté $g_l^m$; on a alors une suite décroissante des fibrés vectoriels,

$$S^mT^*\otimes T\supset g_0^m\supset g_1^m\supset\cdots\supset g_l^m\supset\cdots \tag{1}$$

pour $m\geqq h$. Pour tous $l\geqq 0$ et $m\geqq h$ on a $R_l'^{m+1}\subset(R_l'^m)^{+1}$; en effet, d'après la proposition 2.2 le résultat est vérifié pour $l=0$ et $m\geqq h$; d'autre part, $R_l'^{m+1}=\pi^{m+1}(R'^{m+l+1})\subset\pi^{m+1}((R'^{m+l})^{+1})\subset(\pi^m(R'^{m+l}))^{+1}=(R_l'^m)^{+1}$. Comme $(g_l^m)^{+1}$ est le noyau de $\pi^m: (R_l'^m)^{+1}\to R_l'^m$ on obtient $g_l^{m+1}\subset(g_l^m)^{+1}$; d'après un raisonnement noetherien on obtient pour tout $x\in M$ un entier $l_0(x)\geqq 0$ tel que $g_{l(x)}^m=g_{l_0(x)}^m$ pour tous $m\geqq h$ et $l\geqq l_0(x)$; la suite (1) des fibrés vectoriels étant stationnaire et $M$ connexe on obtient l'existence d'un entier $l_1\geqq 0$ tel que $g_l^m=g_{l_1}^m$ pour tous $m\geqq h$ et $l\geqq l_1$. Considérons l'entier $l_0\geqq l_1$ tel que $R_{l_0}'^h=R_l'^h$ pour $l\geqq l_0$; par récurrence sur $m$ on démontre l'égalité $R_{l_0}'^m=R_l'^m$ pour tous $m\geqq h$, $l\geqq l_0$; posons $S^m=\bigcap\limits_{l\geqq 0}R_l'^m$ pour $m\geqq h$; alors $S^m=R_{l_0}'^m$, $\pi^m(S^{m+1})=S^m$ et $S^{m+1}\subset(S^m)^{+1}$; on déduit d'après le théorème de prolongement de Cartan-Kuranishi l'existence d'un entier $m_0\geqq h$ tel que $S^{m+1}=(S^m)^{+1}$ pour $m\geqq m_0$ et $S^{m_0}$ involutif; par récurrence sur $l$ on démontre que $S^{m_0+l}=(S^{m_0})^{+l}$; comme $S^{m_0}=R_{l_0}'^{m_0}$, on obtient le résultat cherché.

THEOREME 3.1. *Soient $\rho: M\to N$ une fibration analytique à fibres connexes et $R^h\subset J^h(T,\rho)$ une équation différentielle analytique, formellement intégrable telle que $R_l'^m$ est un fibré vectoriel pour tous $m\geqq h$ et $l\geqq 0$; si $\mathcal{L}$ est le faisceau des solutions analytiques de $R^h$, on a*

(1) *la fibration $\rho: M\to N$ est invariante par $\mathcal{L}$.*

(2) *le noyau $\mathcal{L}_0$ de $\mathcal{L}$ par rapport à $\rho$ est un pseudogroupe infinitésimal de Lie sur $M$.*

PREUVE. On a $R^m=J^m\mathcal{L}$ pour tout $m\geqq h$; d'après la proposition 2.2 l'équation différentielle $R^h$ est $\rho$-projetable; par suite $\rho$ est invariante par $\mathcal{L}$; d'autre part $J^m\mathcal{L}_0\subset R'^m$ pour $m\geqq h$; à fortiori $J^{m_0}\mathcal{L}_0\subset R_{l_0}'^{m_0}$, les entiers $m_0$, $l_0$ étant obtenus d'après le lemme 3.1; de $R_{l_0}'^{m_0}\subset R'^{m_0}\subset R^{m_0}$ on obtient que $\mathcal{L}_0$ est le faisceau des solutions de l'équation différentielle formellement intégrable $R_{l_0}'^{m_0}$; ainsi $\mathcal{L}_0$ est un pseudogroupe infinitésimal de Lie.

COROLLAIRE 3.1. *Soit $\rho: M\to N$ une fibration analytique invariante par un pseudogroupe infinitésimal de Lie $\mathcal{L}$ sur $M$, d'ordre $h$ et analytique; si $R_l'^m$ est* *un fibré vectoriel pour tous $m \geqq h$ et $l \geqq 0$, alors le noyau $\mathcal{L}_0$ de $\mathcal{L}$ par rapport à $\rho$, est un pseudogroupe infinitésimal de Lie sur $M$.*

PREUVE. Il suffit d'appliquer le théorème 3.1 à l'équation différentielle $R^h = J^h \mathcal{L}$.

COROLLAIRE 3.2 [5]. *Soit $\rho: M \to N$ une fibration analytique invariante par un pseudogroupe infinitésimal de Lie $\mathcal{L}$ sur $M$, d'ordre $h$, analytique et transitif; si $M$ est connexe, alors le noyau de $\mathcal{L}$ par rapport à $\rho$ est un peudogroupe infinitésimal de Lie sur $M$.*

*En effect*, la variété $M$ étant connexe et $\mathcal{L}$ transitif l'ensemble $R_l'^m$ est un fibré vectoriel sur $M$ pour tous $m \geqq h$ et $l \geqq 0$; d'où le résultat.

THEOREME 3.2. *Soit $\rho: M \to N$ une fibration analytique invariante par un pseudogroupe infinitésimal de Lie $\mathcal{L}$ sur $M$, d'ordre $h$, analytique. Supposons que le normalisateur de $\mathcal{L}$ dans $\underline{T(M)}$ soit transitif sur $M$ et laisse $\rho$ invariant; alors le noyau $\mathcal{L}_0$, de $\mathcal{L}$ par rapport à $\rho$, est un pseudogroupe infinitésimal de Lie; de plus son normalisateur est transitif sur $M$.*

PREUVE. $\Gamma$ étant le pseudogroupe des difféomorphismes locaux associé au normalisateur de $\mathcal{L}$, soit $f \in \Gamma$ avec $f(a) = b$; l'isomorphisme $f^{h+l}: J_a^{h+l}T \to J_b^{h+l}T$, $f^{h+l}(j_a^{h+l}X) = j_b^{h+l}f_*X$ envoie $J_a^{h+l}(T, \rho)$ sur $J_b^{h+l}(T, \rho)$; de plus $f^{h+l}(J_a^{h+l}V) = J_b^{h+l}V$ et $f^{h+l}(J_a^{h+l}\mathcal{L}) = J_b^{h+l}\mathcal{L}$ pour tout $l \geqq 0$; par suite $f^{h+l}(R_a'^{h+l}) = R_b'^{h+l}$; aussi $f^m(R_{l,a}'^m) = R_{l,b}'^m$ car $f^m(R_{l,a}'^m) = f^m(\pi^m(R_a'^{m+l})) = \pi^m(f^{m+l}(R_a'^{m+l})) = \pi^m(R_b'^{m+l}) = R_{l,b}'^m$; d'où $R_l'^m$ est un fibré vectoriel pour tous $l \geqq 0$ et $m \geqq h$; le résultat découle donc du théorème 3.1.

**4.** Soit $R^h \subset J^h(T, \rho)$ une équation de Lie formellement intégrable telle que $R'^m = J^m V \cap R^m$ et $R_l'^m$ soient des fibrés vectoriels pour tous $m \geqq h$ et $l \geqq 0$. D'après la proposition 2.3 l'équation $R^h$ est $\rho$-projetable; par suite il existe une famille $\{R''^m\}_{m \geqq h}$ des équations de Lie $R''^m \subset J^m T(N)$ telle que,

$$\rho(R_a^m) = R''^m_{\rho(a)} \quad \text{pour tout} \quad a \in M,$$

$$R''^{m+1} \subset (R''^m)^{+1}, \qquad \pi^m(R''^{m+1}) = R''^m$$

et

$$\rho: \underline{R_\rho^m} \to \underline{R}''^m \text{ surjectif pour tout } m \geqq h.$$

D'après le théorème de Cartan-Kuranishi il existe un entier $h_1 \geqq h$ tel que $R''^{h_1}$ soit formellement intégrable et $R''^{h_1+l} = (R'^{h_1})^{+l}$ pour $l \geqq 0$. Soit $\xi: U \to T(N)$ une solution de $R''^{h_1}$ définie au voisinage $U$ de $y \in N$; comme $R''^{m+1} = (R''^m)^{+1}$ pour $m \geqq h_1$, la section $\xi$ est une solution de $R''^m$ pour tout $m \geqq h_1$. Soit $K_a^m$ l'ensemble des $m$-jets $X^m \in R_a^m$ tels que $\rho(X^m) = j_{\rho(a)}^m \xi$, avec $a \in \rho^{-1}(U) = W$; l'équation $R^h$ étant $\rho$-projetable l'ensemble $K_a^m$ n'est pas vide; posons $K^m = \bigcup_{a \in W} K_a^m$; l'ensemble $K^m$ est un fibré affine de base $W$ modelé sur le fibré vectoriel $R'^m|_W$, restriction de $R'^m$ à $W$; de plus $\pi^m(K^{m+1})\subset K^m$ et $K^{m+1}\subset(K^m)^{(1)}$ pour tout $m\geqq h_1$ et $l\geqq 0$; posons $K_l^m=\pi^m(K^{m+l})$ pour tous $m\geqq h_1$ et $l\geqq 0$ on obtient que $K_l^m$ est un fibré affine de base $W$ modelé sur le fibré vectoriel $R_l'^m|_W$; de plus, $K_{l+1}^m\subset K_l^m$ et $K_l^{m+1}\subset(K_l^m)^{+1}$ pour tous $l\geqq 0$ et $m\geqq k_1$. D'après un raisonnement utilisé au paragraphe 3, il existe un entier $l_0\geqq l$ tel que $K_{l_0}^m=K_l^m$ pour tous $m\geqq h_1$ et $l\geqq l_0$; de $K_{l_0}^{m+1}\subset(K_{l_0}^m)^{+1}$ et $\pi^m(K_{l_0}^{m+1})=K_{l_0}^m$ pour tout $m\geqq h_1$, on a l'existence d'un entier $m_1\geqq h_1$ tel que $K_{l_0}^{m_1}$ soit formellement intégrable et $(K_{l_0}^{m_1})^{+l}=K_{l_0}^{m_1+l}$ pour tout $l\geqq 0$; soit $x\in\rho^{-1}(y)$ et $\eta$ une solution de l'équation différentielle non-linéaire $K_{l_0}^{m_1}$ définie au voisinage de $x$; de $(K_{l_0}^{m_1})^{+l}=K_{l_0}^{m_1+l}$, le champ des vecteurs $\eta$ est une solution de $K_{l_0}^{m_1+l}$ pour tout $l\geqq 0$; par construction on a $j_y^\infty\rho(\eta)=j_y^\infty\xi$, ainsi,

THEOREME 4.1. *Soit $\rho: M\to N$ une fibration analytique et $R^h\subset J^h(T,\rho)$ une équation de Lie formellement intégrable analytique. Supposons que $R_l'^m$ est un fibré vectoriel pour tous $l\geqq 0$ et $m\geqq h$; alors il existe une équation de Lie $R''^{h_1}\subset J^{h_1}T(N)$ formellement intégrable telle que,*

(1) *$\rho(R_a^m)=R''^m_{\rho(a)}$ pour tous $m\geqq h_1\geqq h$, $a\in M$.*

(2) *tout germe de champ de vecteurs en $\rho(a)$ solution de $R''^{h_1}$ est l'image par $\rho$ d'un germe en $a$ d'un champ de vecteurs $\rho$-projetable solution de $R^h$.*

COROLLAIRE 4.1. *Soit $\rho: M\to N$ une fibration analytique invariante par un pseudogroupe infinitésimal $\mathcal{L}$ analytique d'ordre $h$, sur la variété $M$. Supposons que $R_l'^m$ est un fibré vectoriel pour tous $m\geqq h$, $l\geqq 0$; alors la projection $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ par $\rho$ sur $N$ est un pseudogroupe infinitésimal de Lie*

PREUVE. D'après la proposition 2.3 l'équation de Lie $R^h=J^h\mathcal{L}$ est $\rho$-projetable; on a $R''^m=J^m\mathcal{L}'$ avec $R''^m_{\rho(a)}=\rho(R_a^m)$ pour tous $a\in M$ et $m\geqq h$; la partie (2) du théorème 4.1 implique $\mathcal{L}'$ le faisceau de toutes les solutions de l'équation formellement intégrable $R''^{h_1}$ donné par le théorème 4.1. Par suite $\mathcal{L}'$ est un pseudogroupe infinitésimal de Lie.

COROLLAIRE 4.2 [6]. *Soit $\rho: M\to N$ une fibration analytique invariante par un pseudogroupe infinitésimal de Lie $\mathcal{L}$ analytique, transitif, d'ordre $h$, sur la variété $M$. Si $M$ est connexe, alors la projection $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ par $\rho$ sur $N$ est un pseudogroupe infinitésimal de Lie.*

*En effect*, la variété $M$ étant connexe et $\mathcal{L}$ transitif, $R_l'^m$ est un fibré vectoriel pour tous $l\geqq 0$, et $m\geqq h$; d'où le résultat, d'après le corollaire 4.1.

COROLLAIRE 4.3. Soit $\rho: M\to N$ une fibration analytique invariante par un pseudogroupe infinitésimal de Lie $\mathcal{L}$ analytique, d'ordre $h$ sur la variété connexe $M$. Supposons que le normalisateur de $\mathcal{L}$ dans $\underline{T(M)}$ est transitif et laisse la fibration $\rho$ invariante; alors la projection $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ sur $N$ par $\rho$ est un pseudogroupe infinitésimal de Lie.

PREUVE. Utilisant la démonstration du théorème 3.2 on a $R_l'^m$ fibré vectoriel pour tous $m\geqq h$ et $l\geqq 0$; notre résultat découle donc du corollaire 4.1.

## Bibliographie

[1] O.R. Abib, Equations de Lie invariantes par un pseudogroupe de Lie transitif, à paraître au Nagoya Math. J., **73** (1979).
[2] H. Goldschmidt, Prolongements d'équations différentielles linéaires. III. La suite exacte de cohomologie de Spencer, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), **7** (1974), 5-28.
[3] H. Goldschmidt, Sur la structure des équations de Lie. III. La cohomologie de Spencer, J. Differential Geometry, **11** (1976), 167-223.
[4] Ngo Van Quê et A.A.M. Rodrigues, Troisième théorème fondamental de réalisation de Cartan, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **25** (1975).
[5] A.A.M. Rodrigues, Sur la noyau d'un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif par rapport à une fibration invariante, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **269** (1969), 1154-1155.
[6] A.A.M. Rodrigues, Sur le quotient d'un pseudogroupe infinitésimal de Lie transitif par une fibration invariante, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **269** (1969), 1211-1213.
[7] A.A.M. Rodrigues, On infinite Lie groups, à paraître, Institut de Mathématiques, Université de Sao Paulo, 1977.

O. R. Abib
Mathematiques
Université de Montpellier
34060 Montpellier Cedex
France