J. Math. Soc. Japan
Vol. 32, No. 2, 1980

Regularitätsfragen für die instationären Navier-Stokesschen Gleichungen in höheren Dimensionen

By Wolf VON WAHL

(Eingegangen am 21. Juni 1978)
(Verbessert am 18. Juni 1979)

I. Einleitung und Bezeichnungen.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns im zweiten Teil (Kap. V und VI) mit einem von Serrin und Prodi (für eine zusammenhängende Darstellung s. [5]) behandelten Problem. Diese Autoren bewiesen, daß es für n=2, 3, 4 *genau eine* schwache Lösung der instationären Navier-Stokesschen Gleichungen

$$u'-\nu\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla p=0\,,$$
$$\nabla\cdot u=0$$
$$u\,|\,\partial\Omega=0\,,\quad u(0)=\varphi$$

über einem zylindrischen Gebiet $(0, T)\times\Omega\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ gibt, die zusätzlich $u'\in L^{\infty}((0, T), (L^{2}(\Omega))^{n})\cap L^{2}((0, T), (H^{0_{1}}(\Omega))^{n})$ erfüllt, sofern nur $\|\varphi\|_{(H^{2,2}(\Omega))^{n}}$ eine von ν abhängige Größe nicht überschreitet. Für $n=2$ braucht man die letzte Bedingung nicht (s. etwa [10]), für $n=3$ folgt für die so gewonnene Lösung aus bekannten Regularítätskriterien ihre Regularität (s. [4], [11]). Für $n=4$ versagen diese Kriterien jedoch gerade, da zwar $u\in C^{0}([0, T], (L^{4}(\Omega))^{4})=C^{0}([0, T], (L^{n}(\Omega))^{n})$ ist, man jedoch $u\in C^{0}([0, T], (L^{4+\varepsilon}(\Omega))^{4})$ benötigt (für $n=4$ ist hier die in [11] für Elemente $u\in L^{s}((0, T), (L^{r}(\Omega))^{n})$ eingeführte kritischen Größe $\frac{n}{r}+\frac{2}{s}=1$, während man <1 benötigt). An dieser Stelle greift nun ein Satz aus Kap. V ein, der speziell auf den Fall $\frac{n}{r}+\frac{2}{s}=1$ zugeschnitten ist. Dort wird folgendes bewiesen: Falls u_{σ}, $0\leqq\sigma\leqq 1$, eine Schar schwacher Lösungen zu den Problemen

$$P_{\sigma}\left\{\begin{array}{l} u'-\nu\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla p=\sigma f+(1-\sigma)g\,,\\ \nabla\cdot u=0\,,\\ u\,|\,\partial\Omega=0\,,\quad u(0)=\sigma\varphi+(1-\sigma)\psi\,,\end{array}\right.$$

sind, bei denen u_{0} regulär ist und die u_{σ} stetig von σ in der $L^{\infty}((0, T), (L^{n}(\Omega))^{n})$-

Topologie abhängen, so sind alle u_σ regulär. Man beachte, daß hier $r=n$, $s=\infty$, also $\frac{n}{r}+\frac{2}{s}=1$ sind. Dieser in allen Dimensionen n gültige Satz hat zur Voraussetzung, daß die potentialtheoretischen Abschätzungen, wie sie Solonnikov [8] für das lineare Problem

$$u'-\nu\Delta u+\nabla p=f,$$
$$\nabla\cdot u=0,$$
$$u|\partial\Omega=0, \quad u(0)=\varphi,$$

für die Dimensionen $n=2, 3$ bewiesen hat, in allen Dimensionen gelten. Dies läßt sich mit ganz ähnlichen Methoden wie bei Solonnikov beweisen, doch ist dem Autor kein explizites Literaturzitat bekannt. Daher wird in dieser Arbeit ein Beweis gegeben, der—bis auf das Cauchy-Problem—nicht ins Detail geht, vielmehr nur die Punkte herausstellt, die vom Beweis von Solonnikov [8] verschieden sind bzw. mit ihm übereinstimmen. Mit dem erwähnten Resultat aus Kap. V läßt sich nun der Fall $n=4$ beim eingangs gestellten Problem behandeln. Vermöge der Eindeutigkeit der dort konstruierten schwachen Lösungen u gelingt der Nachweis, daß die u_σ stetig von σ in der $L^\infty((0, T), (L^4(\Omega))^4)$-Topologie abhängen. Dies wird in Kap. VI ausgeführt. Zweckmäßigerweise ist dabei $g=0$, $\phi=0$, so daß $u_0=0$ ausfällt.

Wenn man in $n\geqq 5$ Dimensionen eine schwache Lösung der instationären Navier-Stokesschen Gleichungen hat mit $u'\in L^\infty((0, T), (L^2(\Omega))^n)\cap L^2((0, T), (H^{0^{1,2}}(\Omega))^n)$, so läßt sich unser Regularitätskriterium aus Kap. V nicht mehr anwenden, da u nicht einmal mehr in $L^\infty((0, T), (L^n(\Omega))^n)$ zu liegen braucht.

Vermutlich läßt sich das in Kap. V bewiesene Regularitätsresultat auch auf den Fall übertragen, daß die u_σ in der $L^s((0, T), (L^r(\Omega))^n)$-Topologie stetig von σ abhängen, $\frac{n}{r}+\frac{2}{s}=1$, doch wird dieses Problem hier nicht untersucht.

Wenn wir wieder voraussetzen, daß die potentialtheoretischen Abschätzungen von Solonnikov in allen Dimensionen gelten, so läßt sich beweisen, daß jede schwache Lösung der instationären bzw. stationären Navier-Stokesschen Gleichungen eine starke Lösung ist, d.h. $u_{x_ix_j}$, u' bzw. $u_{x_ix_j}$ liegen in einem $L^{p_1}((0, T)\times\Omega)$ bzw. $L^{p_2}(\Omega)$ mit gewissen von n abhängigen Exponenten p_1, p_2. Da p_1, p_2 nahe bei 1 liegen, konnten daraus bisher keine Schlüsse über die Frage, ob die Hopfschen Lösungen auch klassische Lösungen sind, gezogen werden. Für instationäre Gleichungen lautet das Ergebnis folgendermaßen: Sei u eine schwache Lösung über $(0, T)\times\Omega\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ der Gleichung

$$NS\begin{cases} u'-\nu\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla p=f, \quad \nabla\cdot u=0, \\ u|\partial\Omega=0, \\ u(0)=\varphi, \end{cases}$$

so ist $u' \in L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), (L^{(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n)$, $u \in L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), (H^{2, (n+2)/(n+1)}(\Omega))^n)$, $\nabla p \in L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), L^{(n+2)/(n+1)}(\Omega))$ und das System NS ist im Sinne der Gleichheit von fast überall definierten Funktionen erfüllt. Aus den obigen Eigenschaften von u kann durch Interpolation geschlossen werden, daß $u \in L^\infty((0, T), H^{2/(n+2), (n+2)/(n+1)}(\Omega))^n)$ ist. Für $n=3$ muß das obige Ergebnis im wesentlichen Ladyženskaja [6] zugeschrieben werden, während der von ihr für $n=2$ angegebene Exponent nicht korrekt zu sein scheint. Im stationären Fall ist der Exponent $\frac{n+2}{n+1}$ durch den größeren $\frac{n}{n-1}$ zu ersetzen. Bei diesen Resultaten muß natürlich vorausgesetzt werden, daß f, φ in entsprechenden L^p-Räumen liegen.

Wir führen einige Bezeichnungen ein. Ω sei eine beschränkte offene Menge des $\boldsymbol{R}^n$. $H^{k,p}(\Omega)$, $H^{0\,k,p}(\Omega)$, $k \in N$, $p \geqq 1$, sind die üblichen Sobolevräume zum Exponenten p. Von Ω setzen wir voraus, daß $\partial\Omega$ von der Klasse C^3 ist und Ω lokal auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt. Sei D die Menge der $(C_0^\infty(\Omega))^n$-Vektorfelder ϕ mit $\nabla \cdot \phi = 0$. Der Abschluß von D in der $(L^2(\Omega))^n$-Norm heißt H, der Abschluß von D in der $(H^{1,2}(\Omega))^n$-Norm heißt V. V' ist die Dualisierung von V bezüglich des $(L^2(\Omega))^n$-Skalarprodukts. Bei einem Banachraum X sind $L^p((0, T), X)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, und $C^k([0, T], X)$, $k \in N \cup \{0\}$, die üblichen Räume meßbarer, bzw. stetiger, bzw. k-mal stetig differenzierbarer Abbildungen von $(0, T)$ bzw. $[0, T]$ in X.

Endlich ist $\hat{H}^{1,p}(\Omega) = \{f \mid f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega),\ \nabla f \in L^p(\Omega)\}$, versehen mit der Halbnorm $\left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

II. Abschätzung der Nichtlinearität.

Definition II. 1. Sei u, $\tilde{u} \in (L^1(\Omega))^n$, $\nabla u \in (L_1(\Omega))^{n^2}$. Dann ist $\tilde{u} \cdot \nabla u$ der fast überall in Ω erklärte Vektor mit den Komponenten

$$\sum_{i=1}^n \tilde{u}_i \frac{\partial u^\lambda}{\partial x_i}, \qquad 1 \leqq \lambda \leqq n .$$

Hilfssatz II. 2. *Sei $T>0$. Sei $u \in L^2((0, T), (H^{1,2}(\Omega))^n) \cap L^2((0, T), (L^2(\Omega))^n)$. Dann ist*

$$u \cdot \nabla u \in L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), L^{(n+2)/(n+1)}(\Omega)) .$$

Beweis. Sei $\rho = 1 - \dfrac{2}{2+\dfrac{4}{n}}$. Wir haben

$$|u \cdot \nabla u| \leqq c(\rho, n)(|\nabla u|^{2-\rho} + |u|^{(2-\rho)/(1-\rho)}) ,$$

$$\|u\|^{q'}_{(L^{q'}(\Omega))^n} \leqq c(n, \Omega) \|u\|^{aq'}_{(H^{1,2}(\Omega))^n} \cdot \|u\|^{(1-a)q'}_{(L^2(\Omega))^n} ,$$

$$\|\nabla u\|^{q''}_{(L^{q'}(\Omega))^n} \leqq \|u\|^2_{(H^{1,2}(\Omega))^n},$$

wobei

$$q' \cdot a = 2,$$

$$q' = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{2-\rho}{1-\rho}, \quad q'' = \frac{n+2}{n+1} \cdot (2-\rho) = 2,$$

sind ([2, S. 27]).

Für den stationären Fall benötigen wir den

HILFSSATZ II. 3. *Sei* $u \in (H^{1,2}(\Omega))^n$. *Dann ist*

$$u \cdot \nabla u \in L^{n/(n-1)}(\Omega).$$

BEWEIS. Es ist

$$|u \cdot \nabla u|^q \leqq c(n)(|u|^{q \cdot q_1} + |\nabla u|^{q \cdot q_2})$$

mit

$$\frac{1}{q \cdot q_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{q \cdot q_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{n},$$

also $q = n/(n-1)$, $q_1 = 2(n-1)/(n-2)$, $q_2 = 2(n-1)/n$. Im Falle $n=2$ wähle man $q_1 = q_2/(q_2-1)$. Mit [2, S. 27] folgt die Behauptung.

HILFSSATZ II. 4. *Sei* $p > 1$, $u \in (H^{2,p}(\Omega))^n$. *Dann ist*

$$\|u \cdot \nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n} \leqq c(p, n, \Omega) \|u\|_{(H^{2,p}(\Omega))^n} (\|u\|^2_{(L^n(\Omega))^n} + \|u\|^{1/2}_{(L^n(\Omega))^n}).$$

BEWEIS. Zunächst ist

$$|u \cdot \nabla u| \leqq c(n)(|u|^3 + |u|^{3/2}),$$

und dann nach [2, S. 27]:

$$\|u\|^3_{(L^{3p}(\Omega))^n} \leqq c(p, n, \Omega) \|u\|_{(H^{2,p}(\Omega))^n} \|u\|^2_{(L^n(\Omega))^n},$$

$$\|\nabla u\|^{3/2}_{(L^{3p/2}(\Omega))^n} \leqq c(p, n, \Omega) \|u\|_{(H^{2,p}(\Omega))^n} \|u\|^{3/2}_{(L^n(\Omega))^n},$$

woraus die Behauptung des Hilfssatzes folgt.

III. Uber die Eindeutigkeit schwacher Lösungen bei den Stokes'schen Gleichungen.

Wir benötigen den folgenden Satz:

SATZ III. 1. *Sei* $p > 1$, $p \neq \frac{3}{2}$. *Sei* $\nabla \cdot \tilde{\varphi} = 0$, φ *sei aus* $(H^{2,p}(\Omega))^n \cap H^{01,p}(\Omega))^n$, *sei* $f \in L^p((0, T), (L^p(\Omega))^n)$. *Dann gibt es genau ein* $u \in L^p((0, T), (H^{2,p}(\Omega))^n) \cap L^p((0, T), (H^{0\,1,p}(\Omega))^n)$ *mit* $u' \in L^p((0, T), (L^p(\Omega))^n)$ *und ein* $\tilde{p} \in L^p((0, T), \hat{H}^{1,p}(\Omega))$ *mit*

$$u' - \nu\Delta u + \nabla\tilde{p} = f\,,$$

$$\nabla \cdot u = 0\,,$$

$$u(0) = \tilde{\varphi}\,.$$

ν *ist hierbei eine positive Konstante. Außerdem gilt die Abschätzung*

$$|||(u, \tilde{p})|||_T = \int_0^T \|u'(t)\|^p_{(L^p(\Omega))^n} dt + \int_0^T \|u(t)\|^p_{(H^{2,p}(\Omega))^n} dt$$

$$+ \int_0^T \|\nabla\tilde{p}(t)\|^p_{(L^p(\Omega))^n} dt$$

$$\leqq c(n, \nu, p, \Omega)(\|\tilde{\varphi}\|^p_{(H^{2,p}(\Omega))^n}) + \int_0^T \|f(t)\|^p_{(L^p(\Omega))^n} dt)\,.$$

Für $n=2, 3$ wurde dies von Solonnikov [8] bewiesen. Für $n \geqq 4$ läßt sich Satz III. 1 mit denselben Methoden nachweisen, die in Anlehnung an [7], Kap. IV entwickelt wurden. Da dem Autor jedoch keine explizite Literaturangabe hierzu bekannt ist, geben wir einen Beweis, der—bis auf das Cauchy-Problem—nicht ins Detail geht, sondern die Punkte hervorhebt, die vom Beweis von Solonnikov [8] verschieden sind bzw. mit ihm übereinstimmen.

Sei $L^2(\Omega) = H \oplus I$ die Zerlegung in den Abschluß H der divergenzfreien $C_0^\infty(\Omega)$-Vektorfelder bezüglich der $L^2(\Omega)$-Norm und in $I = \{\nabla\tilde{f} \mid \tilde{f} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega), \nabla\tilde{f} \in (L^2(\Omega))^n\}$. Sei P der Projektor auf H. Wie im Beweis von Satz III. 5 unabhängig von diesen Erörterungen bewiesen wird, ist $-\nu P\Delta$ ein positiver selbstadjungierter Operator mit Definitionsbereich $(H^{2,2}(\Omega))^n \cap (H^{0\,1,2}(\Omega))^n \cap \{\psi \mid \psi \in (H^1(\Omega))^n, \nabla \cdot \psi = 0\}$. Wir bemerken hierzu, daß der Beweis auch im Fall unbeschränkter Ω gültig bleibt.

BEWEIS. 1. *Das Cauchy-Problem, d. h.* $\Omega = \boldsymbol{R}^n$. Sei $Pf(t) = f(t)$ für fast alle $t \in (0, T)$. Sei

$$f \in C^1([0, T], D(-\nu P\Delta))\,,$$

$$\varphi \in D((-\nu P\Delta)^2)\,.$$

Bekanntlich ist

$$u(t) = e^{-t(-\nu P\Delta)}\varphi + \int_0^t e^{-(t-s)(-\nu P\Delta)} Pf(s)\,ds$$

Lösung der Differentialgleichung

$$u' - \nu P\Delta u = f\,, \qquad u(0) = \varphi$$

mit $u(\cdot)\in C^0([0, T], D((-P\Delta)^2))$, $u'(\cdot)\in C^0([0, T], D(-P\Delta))$. Somit ist $-\nu\Delta u(t)+\nabla p(t)=-u'(t)+f(t)$. Für jedes $t\in[0, T]$ ist dies ein lineares elliptisches System gemäß [1] (s. [4, S. 308]), auf das wir Theorem 10.5 in [1] anwenden können. Wegen $u'(t)+f(t)\in H^{1,2}(\boldsymbol{R}^n)$ folgt: $u(t)\in H^{3,2}(\boldsymbol{R}^n)$. Da $\nabla\cdot\Delta u(t)=0$ ist, ist $\Delta u(t)\in H$. Also ist

$$u'-\nu\Delta u=f\,, \qquad u(0)=\varphi\,.$$

Wir bemerken, daß $\Delta u(t)\in H$ nur gilt, weil wir als zugrundeliegendes Gebiet $\Omega=\boldsymbol{R}^n$ gewählt haben, d. h. das Cauchy-Problem betrachten. Sei p eine Zahl $p>1$, $p\neq 3/2$. Wir setzen nun voraus, daß

$$f\in L^p((0, T), (L^p(\boldsymbol{R}^n))^n)\,, \qquad \varphi\in(H^{2,p}(\boldsymbol{R}^n))^n$$

ist. Nach Theorem 9.1 in [7, Kap. IV, § 9], das auch für $\Omega=\boldsymbol{R}^n$ gilt, wie der Beweis zeigt, folgt jetzt die Abschätzung

$$\int_0^T\|u'(t)\|^p_{(L^p(\boldsymbol{R}^n))^n}dt+\int_0^T\|u(t)\|^p_{(H^{2,p}(\boldsymbol{R}^n))^n}dt$$

$$\leqq c(\nu, p)\Big(\int_0^T\|f(t)\|^p_{(L^p(\boldsymbol{R}^n))^n}dt+\|\varphi\|_{(H^{2,p}(\boldsymbol{R}^n))^n}\Big)\,.$$

Durch Zurückgehen auf das ursprüngliche Gleichungssystem folgt:

$$\text{(III. 1)}\qquad \int_0^T\|u'(t)\|^p_{(L^p(\boldsymbol{R}^n))^n}dt+\int_0^T\|u(t)\|^p_{(H^{2,p}(\boldsymbol{R}^n))^n}dt$$

$$+\int_0^T\|\nabla p(t)\|^p_{L^p(\boldsymbol{R}^n)}dt$$

$$\leqq c(\nu, p)\Big(\int_0^T\|f(t)\|^p_{(L^p(\boldsymbol{R}^n))^n}dt+\|\varphi\|_{(H^{2,p}(\boldsymbol{R}^n))^n}\Big)\,.$$

Nun approximieren wir ein beliebig vorgegebenes $\varphi\in(H^{2,p}(\boldsymbol{R}^n))^n$ mit $\nabla\cdot\varphi=0$ durch $\varphi_\nu\in(C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n))^n$ mit $\nabla\cdot\varphi_\nu=0$ und ein beliebiges $f\in L^p((0, T), (L^p(\Omega))^n)$ mit $\nabla\cdot f(t)=0$ f. ü. in $(0, T)$ durch Elemente

$$f_\mu(t)=\sum_{\lambda=1}^{N_\mu}\phi_\lambda^\mu(t)\varphi_\lambda^\mu$$

mit $\varphi_\lambda^\mu\in(C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n))^n$, $\nabla\cdot\varphi_\lambda^\mu=0$, $\phi_\lambda^\mu\in C^1([0, T], \boldsymbol{R})$.
Die Abschätzung (III. 1) liefert dann die Behauptung des Satzes im Fall des Cauchy-Problems und divergenzfreier äußerer Kraft.

Sei f nicht notwendig divergenzfrei. Bekanntlich ist $(L_p(\boldsymbol{R}^n))^n=H_p(\boldsymbol{R}^n)+\{\nabla\tilde f\,|\,\tilde f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n),\ \nabla\tilde f\in(L^p(\boldsymbol{R}^n))^n\}$, wobei $H_p(\boldsymbol{R}^n)$ der Abschluß der divergenzfreien $(C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n))^n$-Vektorfelder in der $(L_p(\boldsymbol{R}^n))^n$-Norm ist. Der Durchschnitt von $H_p(\boldsymbol{R}^n)$ und $\{\nabla\tilde{f}|\cdots\}$ ist der Nullvektor und die Projektion P von $(L_p(\boldsymbol{R}^n))^n$ auf $H_p(\boldsymbol{R}^n)$ ist beschränkt. Somit erhalten wir die Behauptung des Satzes auch im Fall nicht notwendig divergenzfreier f.

2. *Das gemischte Problem im Halbraum* $x_n \geqq 0$. Wir wollen nun den Satz III. 1 im Fall $\varphi=0$, $f=0$, $\Omega=\{x \mid x_n>0\}$ und möglicherweise von Null verschiedener Randwerte

$$u(t, x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)=b(t, x_1, \cdots, x_{n-1})$$

untersuchen. Dabei ist b ein hinreichend glatter Vektor mit

$$b_n=0\,, \quad \text{also} \quad \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} b_n(t, x_1, \cdots, x_{n-1})dx_1 \cdots dx_{n-1}=0\,,$$

$$b(0, x_1, \cdots, x_{n-1})=0\,.$$

Bekanntlich ist $M_n(x)=\dfrac{-1}{(n-2)\Omega_n}|x|^{-(n-2)}$ die zu $\Delta u=0$ gehörige Grundlösung. Dabei ist Ω_n der Flächeninhalt der Oberfläche der Einheitssphäre des $\boldsymbol{R}^n$. Setzt man

$$\Gamma_n(t, x)=(4\pi\nu t)^{-n/2}e^{-|x|^2/4t}\,, \qquad t>0\,,$$

$$\Gamma_n(t, x)=0\,, \qquad t<0\,,$$

so erhält man bekanntlich die Grundlösung von $u_t-\nu\Delta u=0$. Sei wie in [8]

$$A(t, x)=\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} \frac{-\Gamma_n(t, y', 0)}{(n-2)\Omega_n|x-y'|^{n-2}}dy'=\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} \Gamma_n(t, y', 0)M_n(x-y')dy'\,.$$

Wenn b für große $|\tilde{x}|$, $\tilde{x}=(x_1, \cdots, x_{n-1})$, hinreichend schnell verschwindet, so wird durch

$$\tilde{u}_i(t, \tilde{x}, x_n)=\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^t\Big(\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} G_{ij}(t-\tau, \tilde{x}-y, x_n)b_j(\tau, y)dy\Big)d\tau\,, \qquad 1\leqq i\leqq n\,,$$

$$\tilde{p}(t, \tilde{x}, x_n)=-2\nu\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_n\partial x_j}\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} M_n(\tilde{x}-y, x_n)b_j(t, y)dy$$

$$+4\nu\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\int_0^t\frac{d\tau}{\tau}\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} b_j(t-\tau, y)A(\tau, \tilde{x}-y, x_n)dy\,,$$

wobei

$$G_{ij}(t, \tilde{x}, x_n)=-2\nu\delta_{ij}\frac{\partial\Gamma_n}{\partial x_n}(t, \tilde{x}, x_n)-4\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} dy$$

$$\times\int_0^{x_n}\frac{\partial\Gamma_n}{\partial\xi}(t, y, \xi)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}M_n(\tilde{x}-y, x_n-\xi)d\xi$$

sind, eine Lösung von $u_t - \nu\Delta u + \nabla p = 0$, $\nabla \cdot u = 0$, $u \mid \{x_n = 0\} = b$, $u(0, x) = 0$ geliefert, die für $t > 0$, $x_n > 0$ klassisch und, was $\tilde{u}$ betrifft, in $t \geqq 0$, $x_n \geqq 0$ stetig ist (s. [**9**] für eine n-dimensionale Formulierung der Lösungsformeln im Falle $b_n = 0$). Zunächst beweist man nämlich wie in [8, §7 und §8], daß in $x_n > 0$ tatsächlich

$$\tilde{u}_t - \nu\Delta\tilde{u} + \nabla\tilde{p} = 0, \qquad \nabla \cdot \tilde{u} = 0$$

sind. Vermöge der Verträglichkeitsbedingung 0-ter Ordnung folgt wie in [8, S. 51], daß $\tilde{u}$ in $t \geqq 0$, $x_n \geqq 0$ stetig ist und die Rand und Anfangswerte annimmt. Genau wie in [8, S. 88, 82-86] beweist man, daß $\nabla\tilde{p}$ in jedem $L^p(\{t, x) \mid t > 0, x_n > 0\})$ liegt, $p > 1$, und der Abschätzung

$$\int_0^T \|\nabla\tilde{p}(t)\|^p_{L^p(\{(t,x) \mid t>0,\, x_n>0\})} dt$$

$$\leqq c(\nu, n, p) \int_{\substack{y \in R^{n-1} \\ t>0}} \left[\sum_{|\alpha| \leq 2} |D^\alpha b(t, y)|^p + \left| \frac{\partial b}{\partial t}(t, y) \right|^p \right] dt\, dy$$

genügt[1]. Da $\tilde{u}$ ein parabolisches System löst, erhält man die Aussage des Satzes III. 1 im Fall 2 aus [7, IV, §9]. Dies ist dasselbe Vorgehen wie in [8, S. 89]. Insgesamt erhält man die Abschätzung

$$\int_0^T \|\tilde{u}'(t)\|^p_{(L^p(D_n))^n} + \int_0^T \|\tilde{u}(t)\|^p_{(H^{2,p}(D_n))^n} + \int_0^T \|\nabla\tilde{p}(t)\|^p_{L^p(D_n)} dt$$

$$\leqq c(n, \nu, p) \int_{\substack{y \in R^{n-1} \\ t>0}} \left[\sum_{|\alpha| \leq 2} |D^\alpha b(t, x)|^p + \left| \frac{\partial b}{\partial t}(t, y) \right|^p \right] dt\, dy,$$

wobei $D_n = \{x \mid x_n > 0\}$ ist.

Wir betrachten nun noch den Fall, daß $b = 0$, $f = 0$ sind, aber φ möglicherweise nicht verschwindet. Sei $p > 1$. Bekanntlich ist P auch ein beschränkter Operator von $L^p(D_n)$ in $H_p(D_n)$=Abschließung von $\{\phi \mid \phi \in (C_0^\infty(D_n))^n, \nabla \cdot \phi = 0\}$ in der $(L^p(D_n))^n$-Norm und der auf $(H^{2,p}(D_n))^n \cap (H^{0\,1,p}(D_n))^n \cap \{\phi \mid \phi \in (H^{1,p}(D_n))^n, \nabla \cdot \phi = 0\}$ definierte Operator $-\nu P\Delta$ erzeugt eine analytische Halbgruppe in $H_p(D_n)$ (s. [8, S. 51, 55][2], [**10**, S. 720-721]), so daß

$$\|e^{-(-\nu P\Delta)t}\varphi\|_{(H^{2,p}(D_n))^n} \leqq c(n, \nu, p) \|\varphi\|_{(H^{2,p}(D_n))^n}$$

ist, φ aus dem Definitionsbereich von $-\nu P\Delta$. Die Einschränkung in der oben

1) Mit Hilfe der zu [8, (101)] und [8, S. 44-45] analogen Umformungen stellt man aus der angegebenen Formel für $\tilde{p}$ die [8, (100)] entsprechende her.

2) Damit führt man unser Problem auf den zunächst unter 2. behandelten Fall zurück. Man beachte, daß für das Neumann-Problem in [8, S. 55] gilt: $s(0, x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) = 0$, also $\nabla s(0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) = 0$ in $x_n \geqq 0$.

zitierten Arbeit [**10**], daß das zugrunde liegende Gebiet des $\boldsymbol{R}^n$ beschränkt ist, ist nicht nötig, da die dort benötigten Abschätzungen für das instationäre Problem auch für D_n gelten.

Mit Hilfe des Cauchy-Problems und des Rand-Anfangswertproblems in einem Halbraum läßt sich in der üblichen Weise das allgemeine Problem behandeln, nämlich.

3. *Das gemischte Problem über einem zylindrischen Gebiet* $(0, T)\times\Omega$. Wenn u, $\tilde{p}$ eine Lösung unseres gemischten Problems ist, so beweist man zunächst wie in [8, S. 55, S. 98–109] die Abschätzungen von u, $\tilde{p}$ in der Nähe des Randes von $(0, T)\times\Omega$, indem man 2. heranzieht (s. [8], (196)). Die Beweise aus [8] lassen sich genau übertragen, da die erforderlichen Abschätzungen für die Hilfsfunktion s (Lösung eines Neumann Problems für $x_n\geqq 0$) vermöge der linearen elliptischen Theorie auch in n Dimensionen gelten. Die Abschätzungen im Inneren von $(0, T)\times\Omega$ folgen mit Hilfe von 1. ebenfalls wie in [8, S. 95–98, S. 109], indem man wie in [8, S. 98] das Cauchy-Problem (181) betrachtet. Für die Hilfsfunktion s gilt das oben Gesagte. —Die Existenz folgt aus den Abschätzungen, indem man mit Hilfe der Halbgruppentheorie aus [**10**] das Problem für $f\in C^1([0, T], (L^p(\Omega))^n)$ löst und dann mit Hilfe der eben bewiesenen Abschätzungen das ursprüngliche Problem, d.h. $f\in L^p((0, T), (L^p(\Omega))^n)$, durch Grenzübergang löst.

DEFINITION III. 2. $w\in L^p((0, T), (H^{01,p}(\Omega))^n)$ heißt schwache Lösung zum Exponenten $p>1$ über $(0, T)\times\Omega$ der Gleichung

$$w'-\nu\Delta w+\nabla\tilde{p}=0\,, \qquad \nabla\cdot w=0$$

mit dem Anfangswert $\tilde{\varphi}\in(L^p(\Omega))^n$, $\nabla\cdot\tilde{\varphi}=0$, wenn $\nabla\cdot w=0$ und

$$-\int_0^T(w, \varphi')dt+\nu\int_0^T(\nabla w, \nabla\varphi)dt=(\tilde{\varphi}, \varphi(0))$$

ist für alle Testvektoren $\varphi\in L^q((0, T), (H^{01,q}(\Omega))^n)$ mit

$$\nabla\cdot\varphi=0\,, \qquad \varphi'\in L^q((0, T), L^q(\Omega))\,, \qquad \varphi(T)=0\,.$$

Dabei ist $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

SATZ III. 3. *Sei w schwache Lösung zum Exponenten $p>1$, $p\neq 3/2$, über $(0, T)\times\Omega$ der Gleichung*

$$w'-\nu\Delta w+\nabla\tilde{p}=0\,, \qquad \nabla\cdot w=0$$

mit dem Anfangswert 0. *Dann ist* $w\equiv 0$.

BEWEIS. Sei $(\psi, \tilde{p})$ das nach Satz III. 1 existierende Element aus

$$L^q((0, T), (H^{2,q}(\Omega))^n)\cap L^q((0, T), (H^{01,q}(\Omega))^n)\times L^q((0, T), H^{1,q}(\Omega))$$

mit

$$\psi' \in L^q((0, T), (L^q(\Omega))^n),$$

$$\psi'(t) - \nu\Delta\psi(t) + \nabla\tilde{p}(t) = f(w(T-t)),$$

$$\nabla\cdot\psi = 0, \qquad \psi(0) = 0,$$

wobei wieder $f = (f^1, \cdots, f^n)$,

$$f^l(w) = \begin{cases} |w|^{p-1}\dfrac{w^l}{|w|}, & w \neq 0, \\ 0 \text{ sonst}, \ 1 \leqq l \leqq n, \end{cases}$$

ist. Sei $\tilde{\tilde{p}}(t, x) = \tilde{p}(T-t, x)$,

$$\varphi(t, x) = \psi(T-t, x), \qquad (t, x) \in (0, T) \times \Omega.$$

Dann ist

$$\varphi'(t, x) = -\psi'(T-t, x),$$

$$\Delta\varphi(t, x) = \Delta\psi(T-t, x),$$

$$\nabla\cdot\varphi(T-t, x) = 0,$$

$$\nabla\tilde{\tilde{p}}(t, x) = \nabla\tilde{p}(T-t, x)$$

und somit

$$-\varphi' - \nu\Delta\varphi + \nabla\tilde{p} = f(w),$$

$$\nabla\cdot\varphi = 0, \qquad \varphi(T) = 0,$$

und $\varphi' \in L^q((0, T), (L^q(\Omega))^n)$, $\varphi \in L^q((0, T), (H^{2,q}(\Omega))^n) \cap L^q((0, T), (H^{0\,1,q}(\Omega))^n)$, $\tilde{p} \in L^q((0, T), H^{1,q}(\Omega))$. Somit ist φ als Testvektor in der Definition III. 2 zulässig. Dies liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T (w, -\varphi')dt + \nu\int_0^T (w, -\Delta\varphi)dt \\ &= \int_0^T (w, f(w) - \nabla\tilde{\tilde{p}})dt, \\ &= \int_0^T (w, f(w))dt, \\ &= \int_0^T \|w(t)\|^p_{(L^p(\Omega))^n} dt. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $w \equiv 0$.

Bei der Betrachtung der stationären Stokes'schen Gleichungen können wir uns im wesentlichen auf die Formulierung der Sätze und Hilfssätze beschränken, da ihre Beweise sich an den instationären Fall anschließen.

DEFINITION III. 4. $w \in (\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega))^n$ heißt schwache Lösung zum Exponenten $p>1$ über Ω der Gleichung

$$-\nu\Delta w + \nabla\tilde{p} = 0\,, \qquad \nabla\cdot w = 0\,,$$

wenn

$$\nabla\cdot w = 0, \ \nu\int_\Omega (\nabla w, \nabla\varphi)dx = 0$$

ist für alle Testvektoren $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^{1,q}(\Omega)$ mit $\nabla\cdot\varphi = 0$. Dabei ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Statt Satz III. 1 gilt nun der

SATZ III. 5. *Sei $f \in (L^p(\Omega))^n \cap (L^2(\Omega))^n$ für ein $p>1$. Dann gibt es genau ein $u \in (H^{2,p}(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{H}{}^{1,p}(\Omega))^n$ und ein $\tilde{p} \in \hat{H}^{1,p}(\Omega)$ mit*

$$\text{(III. 2)} \qquad \begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla\tilde{p} = f\,, \\ \nabla\cdot u = 0\,. \end{cases}$$

BEWEIS. Das System (III. 2) ist elliptisch im Sinne von [1] (siehe [4, S. 308]).

Sei $p=2$. Aus Theorem 10.5 in [1] folgt, daß für jedes $u \in (H^{2,2}(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega))^n$ und jedes $\tilde{p}$ mit $\nabla\tilde{p} \in (L^2(\Omega))^n$, die dem System

$$-\nu\Delta u + \nabla\tilde{p} = f\,, \qquad \nabla\cdot u = 0$$

genügen, eine Abschätzung

$$\text{(III. 3)} \qquad \|u\|_{(H^{2,2}(\Omega))^n} + \|\nabla\tilde{p}\|_{L^2(\Omega)} \leqq c(\nu, n, \Omega)\|f\|_{(L^2(\Omega))^n}$$

gilt (s. [12], S. 33 und [4], S. 307 oben). Sei P der Projektor auf den Abschluß H von $\{\varphi \mid \varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^n, \nabla\cdot\varphi = 0\}$. $-\nu P\Delta$ ist somit ein auf $D = \{u \mid u \in (H^{2,2}(\Omega))^n \cap (\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega))^n, \nabla\cdot u = 0\}$ erklärter positiver abgeschlossener symmetrischer Operator. Wir untersuchen den Wertebereich von $-P\nu\Delta u$. $(-\nu P\Delta)^*(\nu P\Delta)$ ist selbstadjungiert und $I + (-\nu P\Delta)^*(-\nu P\Delta)$ ist beschränkt invertierbar. Darüberhinaus ist

$$\|(-\nu P\Delta)(I + (-\nu P\Delta)^*(-\nu P\Delta))^{-1}\| \leqq 1$$

und $(-\nu P\Delta)(I + (-\nu P\Delta)^*(-\nu P\Delta))^{-1}$ ist selbstadjungiert und eineindeutig. Demnach ist

$$\text{(III. 4)} \qquad \overline{R((-\nu P\Delta)(I + (-\nu P\Delta)^*(-\nu P\Delta))^{-1})} = H\,,$$

so daß zu jedem Element der Form

$$g=(-\nu P\Delta)(I+(-\nu P\Delta)^*(-\nu P\Delta))^{-1}f, \tag{III. 5}$$

$f\in H$, genau ein $u\in D$ mit $-\nu P\Delta u=g$ existiert. Da die g der Form (III. 5) aber dicht in H liegen, ist $-\nu P\Delta$ mit Definitionsbereich D selbstadjungiert und $R(-\nu P\Delta)=H$, d. h. (III. 1) ist für $p=2$ in der im Satz III. 5 angegebenen Weise lösbar. Für beliebigen Exponenten $p<2$ gilt wieder die (III. 3) entsprechende Abschätzung (s. [**12**], S. 33 und [**4**], S. 307). Für $p<2$ folgt unser Satz dann durch Approximation. Für $p>2$ folgt Satz III. 5 aus Theorem 10.5 in [**1**], s. auch [**4**], S. 308.

SATZ III. 6. *Sei w schwache Lösung zum Exponenten $p>1$ über Ω der Gleichung*

$$-\nu\Delta w+\nabla\tilde{p}=0, \qquad \nabla\cdot w=0.$$

Dann ist $w\equiv 0$.

BEWEIS. Für $p\geqq 2$ ist nichts zu zeigen, für $1<p<2$ wähle man φ als Lösung von $-\nu\Delta\varphi+\nabla\tilde{p}=f(w)$, $\nabla\cdot\varphi=0$.

IV. Die Navier-Stokesschen Gleichungen.

DEFINITION IV. 1. Sei $f\in L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), (L^{(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n)$, $(u, \tilde{p})$, $\tilde{p}\in\mathfrak{D}'(Q_T)$, $u\in L^2((0, T), H^{01,2}(\Omega))\cap L^\infty((0, T), (L^2(\Omega))^n)$ heißt schwache Lösung schlechthin oder Hopfsche Lösung des Systems

$$\left\{\begin{aligned} &u'-\nu\Delta u+\nabla\tilde{p}+u\cdot\nabla u=f\\ &\nabla\cdot u=0\\ &u(0)=\tilde{\varphi}\end{aligned}\right. \tag{IV. 1}$$

über $(0, T)\times\Omega$ zum Anfangswert $\tilde{\varphi}\in(L^2(\Omega))^n\cap(H^{01,(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n\cap\{\phi\mid \phi\in(\mathfrak{D}'(\Omega))^n, \nabla\cdot\phi=0\}\cap(H^{2,(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n$, wenn $\nabla\cdot u(t)=0$ fast überall in $(0, T)$ und

$$-\int_0^T(u, \varphi')dt+\nu\int_0^T(\nabla u, \nabla\varphi)dt+\int_0^T(u\cdot\nabla u, \varphi)dt = -\int_0^T(f, \varphi)+(\tilde{\varphi}, \varphi(0)), \tag{IV. 2}$$

ist für alle Testvektoren φ mit $\varphi'\in L^q((0, T), (L^q(\Omega))^n)$,

$$\varphi\in L^q((0, T), (H^{01,q}(\Omega))^n), \qquad \nabla\cdot\varphi=0, \qquad \varphi(T)=0.$$

Dabei ist q der zu $\dfrac{n+2}{n+1}$ duale Exponent $n+2$.

BEMERKUNG. 1. Nach Hilfssatz II. 2 ist $u\cdot\nabla u\in L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), (L^{(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n)$. Daher ist $\int_0^T(u\cdot\nabla u, \varphi)dt$ sinnvoll.

2. Sei $f \in L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), (L^{(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n) \cap L^2((0, T), V')$. Sei $u \in L^2((0, T), (H^{01,2}(\Omega))^n) \cap L^\infty((0, T), (L^2(\Omega))^n)$ Lösung von (IV. 1) im Sinne von [**5**, S. 69] zum Anfangswert $\tilde{\varphi}$, $\nabla\cdot\tilde{\varphi}=0$, $\tilde{\varphi} \in (L^2(\Omega))^n \cap (H^{01,(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n \cap (H^{2,(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n$. Dann gilt (IV. 2), da die Element der Form

$$\sum_{\tilde{\nu}=1}^{N} \xi_{\tilde{\nu}}(t)\varphi_{\tilde{\nu}},$$

$$\varphi_{\tilde{\nu}} \in (C_0^\infty(\Omega))^n, \qquad \nabla\cdot\varphi_{\tilde{\nu}}=0, \qquad \xi_{\tilde{\nu}} \in C^1([0, T], \boldsymbol{R}),$$

$\xi_{\tilde{\nu}}(T)=0$, dicht im Raum der Testvektoren φ, versehen mit der Norm

$$\left\{\int_0^T \|\varphi'(t)\|^{(n+2)/(n+1)}_{(L^{(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n} dt + \int_0^T \|\varphi(t)\|^{(n+2)/(n+1)}_{(H^{01,(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n} dt\right\}^{(n+1)/(n+2)}$$

liegen.

Satz IV. 2. *Sei* $f \in L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), (L^{(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n) \cap L^2((0, T), V')$. *Sei* $\tilde{p} \in \mathfrak{D}'(Q_T)$. *Sei* $(u, \tilde{p})$ *Hopfsche Lösung oder* u *Lösung im Sinne von* [**5**, S. 69] *des Systems*

$$u' - \nu\Delta u + \nabla\tilde{p} + u\cdot\nabla u = f$$

$$\nabla\cdot u = 0 \qquad u(0) = \tilde{\varphi}$$

über $(0, T)\times\Omega$ *zum Anfangswert* $\tilde{\varphi} \in (L^2(\Omega))^n \cap (H^{01,(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n \cap \{\phi \mid \phi \in (\mathfrak{D}'(\Omega))^n, \nabla\cdot\phi=0\} \cap (H^{2,(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n$. *Dann ist*

$$u \in L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), (H^{2,(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n)$$
$$\cap L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), (H^{01,(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n),$$
$$u' \in L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), (L^{(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n),$$
$$\nabla p \in L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), (L^{(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n).$$

Beweis. Sei $(\tilde{w}, \tilde{\tilde{p}})$ die Lösung nach Satz III. 1 des Systems

$$\tilde{w}' - \nu\Delta\tilde{w} + \nabla\tilde{\tilde{p}} = f - u\cdot\nabla u,$$

$$\nabla\cdot\tilde{w} = 0, \qquad \tilde{w}(0) = \tilde{\varphi},$$

wobei wegen $u\cdot\nabla u \in L^{(n+2)/(n+1)}((0, T), (L^{(n+2)/(n+1)}(\Omega))^n)$ (s. Hilfssatz II. 2) als Exponent $(n+2)/(n+1)$ zu wählen ist. Offenbar ist $\tilde{w}-u$ schwache Lösung zum Exponenten $(n+2)/(n+1)$ des Systems

$$w' - \nu\Delta w + \nabla\tilde{p} = 0, \qquad \nabla\cdot w = 0$$

über $(0, T)\times\Omega$. Daher ist nach Satz III. 3 $\tilde{w}=u$ und $\nabla\tilde{\tilde{p}}=\nabla\tilde{p}$.

Wir behandeln noch das stationäre Problem.

Definition IV. 3. Sei $f \in (L^{n/(n-1)}(\Omega))^n \cdot (u, \tilde{p})$, $\tilde{p} \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, $u \in (H^{01}(\Omega))^n$, heißt schwache Lösung schlechthin oder Hopfsche Lösung des Systems

$$\text{(IV. 3)} \qquad \begin{cases} -\nu\Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla\tilde{p} = f, \\ \nabla\cdot u = 0 \end{cases}$$

über Ω, wenn $\nabla\cdot u=0$ und

$$\text{(IV. 4)} \qquad \nu\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi dx + \int_\Omega (u\cdot\nabla u)\cdot\varphi dx = \int_\Omega f\cdot\varphi dx$$

ist für alle Testvektoren $\varphi\in \overset{0}{H}{}^{1,n}(\Omega)$ mit $\nabla\cdot\varphi=0$.

BEMERKUNG. 1. Nach Hilfssatz II. 3 ist $u\cdot\nabla u\in L^{n/(n-1)}(\Omega)$. Daher ist $\int_\Omega (u\cdot\nabla u)\cdot\varphi dx$ sinnvoll.

2. Wenn u Lösung von (IV. 3) im Sinne von [**5**, S. 98] ist, gilt offenbar auch (IV. 4).

SATZ IV. 4. *Sei $f\in(L^{n/(n-1)}(\Omega))^n\cap(L^2(\Omega))^n$. Sei $\tilde{p}\in\mathfrak{D}'(\Omega)$. Sei $(u, \tilde{p})$ Hopfsche Lösung oder u Lösung im Sinne von* [**5**, S. 98] *von*

$$-\nu\Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla\tilde{p} = f, \qquad \nabla\cdot u = 0$$

über Ω. Dann ist $u\in(H^{2,n/(n-1)}(\Omega))^n$, $\nabla\tilde{p}\in L^{n/(n-1)}(\Omega)$.

BEWEIS. Sei $(\tilde{w}, \tilde{\tilde{p}})$ die Lösung nach Satz III. 5 des Systems

$$-\nu\Delta\tilde{w} + \nabla\tilde{\tilde{p}} = f - u\cdot\nabla u, \qquad \nabla\cdot\tilde{w} = 0,$$

wobei wegen $u\cdot\nabla u\in L^{n/(n-1)}(\Omega)$ als Exponent $p=\dfrac{n}{n-1}$ zu wählen ist. Offenbar ist $\tilde{w}-u$ schwache Lösung des Systems

$$-\nu\Delta w + \nabla\tilde{p} = 0, \qquad \nabla\cdot w = 0$$

über Ω zum Exponenten $n/(n-1)$, also nach Satz III. 6 $\tilde{w}=u$, $\nabla\tilde{\tilde{p}}=\nabla\tilde{p}$.

V. Stetige Zweige.

SATZ V. 1. *Voraussetzung: Sei $p>n+1$. Seien $g, f\in L^p((0, T), (L^p(\Omega))^n)$. Sei $\varphi\in(H^{2,p}(\Omega))^n\cap(\overset{0}{H}{}^{1,p}(\Omega))^n$, $\nabla\cdot\varphi=0$. Sei $u_0\in L^p((0, T), (H^{2,p}(\Omega))^n)\cap L^p((0, T), \overset{0}{H}{}^{1,p}(\Omega))^n$, $\tilde{p}_0\in L^p((0, T), \hat{H}^{1,p}(\Omega))$, sei*

$$u_0' - \nu\Delta u_0 + \nabla\tilde{p}_0 + u_0\cdot\nabla u_0 = f$$

$$\nabla\cdot u_0 = 0 \qquad u_0(0) = \varphi_0$$

mit einem $\varphi_0\in(H^{2,p}(\Omega))^n\cap(\overset{0}{H}{}^{1,p}(\Omega))^n$, $\nabla\cdot\varphi_0=0$. Zu jedem $\sigma\in[0, 1]$ existiere eine schwache Lösung $(u_\sigma, \tilde{p}_\sigma)$ des Systems

$$P_\sigma \begin{cases} u'-\nu\Delta u+\nabla\tilde{p}+u\cdot\nabla u=(1-\sigma)f+\sigma g \\ \nabla\cdot u=0 \\ u(0)=(1-\sigma)\tilde{\varphi}_0+\sigma\tilde{\varphi} \end{cases}$$

mit folgenden Eigenschaften: Für $\sigma=0$ *ergibt sich die zu Beginn des Satzes eingeführte Lösung* $(u_0, \tilde{p}_0)$. *Für* $\sigma_1, \sigma_2\in[0, 1]$ *ist*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t\leq T} \|u_{\sigma_2}(t)-u_{\sigma_1}(t)\|_{(L^n(\Omega))^n}\leqq f(|\sigma_2-\sigma_1|)$$

mit einer Abbildung $f: [0, 1]\to \boldsymbol{R}^+$, $f(0)=0$, *die im Nullpunkt stetig ist. Behauptung: Dann ist*

$$u_\sigma\in L^p((0, T), (H^{2,p}(\Omega))^n)\cap L^p((0, T), (H^{0_1,p}(\Omega))^n),$$

$$u'_\sigma\in L^p((0, T), (L^p(\Omega))^n),$$

$$\nabla\tilde{p}_\sigma\in L^p((0, T), L^p(\Omega)).$$

BEMERKUNG. Für großes p, d.h. $p>n+1$, heißt dies, daß sich jede schwache Lösung, die sich stetig durch Lösungen hindurch mit einer regulären Lösung verbinden läßt, selbst regulär ist. Stetig bezieht sich dabei auf den Raum $L^\infty((0, T), (L^n(\Omega))^n)$. Es sei bemerkt, daß dies insofern eine Abschwächung des Serrinschen Regularitätskriteriums [**9**] darstellt, als dort in einer vergleichbaren Topologie die Lösung in $L^\infty((0, T), (L^{n+\varepsilon}(\Omega))^n)$ sein muß mit einem $\varepsilon>0$. In Kapitel VI soll Satz V. 2 auf die Dimensionen $n=3, 4$ angewendet werden.

BEWEIS. Sei Σ die Menge aller $\sigma\in[0, 1]$ mit der Eigenschaft, daß für die schwache Lösung $(u_\sigma, \tilde{p}_\sigma)$ des Systems P_σ gemäß Voraussetzung gilt:

$$u_\sigma\in L^p((0, T), (H^{2,p}(\Omega))^n)\cap L^p((0, T), (H^{0_1,p}(\Omega))^n),$$

$$u'_\sigma\in L^p((0, T), (L^p(\Omega))^n),$$

$$\nabla\tilde{p}_\sigma\in L^p((0, T), (L^p(\Omega))^n).$$

Σ^* sei die Menge aller $\sigma\in[0, 1]$ mit

1. $[0, \sigma]\subset\Sigma$,

2. $\displaystyle\int_0^T\|u'_\tau(t)\|^p_{(L^p(\Omega))^n}dt+\int_0^T\|u_\tau(t)\|^p_{(H^{2,p}(\Omega))^n}dt+\int_0^T\|\nabla\tilde{p}_\tau(t)\|^p_{(L^p(\Omega))^n}dt$

$$\leqq c(n, \nu, \Omega, p, \sigma, f, |||(u_0, \tilde{p}_0)|||_T)$$

$$\times(\|\tilde{\varphi}_0\|_{(H^{2,p}(\Omega))^n}+\|\tilde{\varphi}\|_{(H^{2,p}(\Omega))^n}$$

$$+\int_0^T(\|f(t)\|^p_{(L^p(\Omega))^n}+\|g(t)\|^p_{(L^p(\Omega))^n})dt), \qquad 0\leqq\tau\leqq\sigma.$$

Σ^* ist nicht leer, da $0\in\Sigma$. Sei nun $\sigma_1\in\Sigma^*$, $\sigma_2\in\Sigma$. Es ist nach Satz III. 1

$$\int_0^T\|u'_{\sigma_2}(t)-u'_{\sigma_1}(t)\|^p_{(L^p(\Omega))^n}dt+\int_0^T\|u_{\sigma_2}(t)-u_{\sigma_1}(t)\|^p_{(H^{2,p}(\Omega))^n}dt$$

$$+\int_0^T\|\nabla\tilde{p}_{\sigma_2}(t)-\nabla\tilde{p}_{\sigma_1}(t)\|^p_{L^p(\Omega)}dt$$

$$\leqq c(n,\nu,\Omega,p)(\|\tilde{\varphi}_0\|_{(H^{2,p}(\Omega))^n}+\|\tilde{\varphi}\|_{(H^{2,p}(\Omega))^n}+\int_0^T\|f(t)\|^p_{(L^p(\Omega))^n}dt+\int_0^T\|g(t)\|^p_{(L^p(\Omega))^n}dt$$

$$+\int_0^T\|u_{\sigma_2}\cdot\nabla u_{\sigma_2}(t)\|^p_{(L^p(\Omega))^n}dt+\int_0^T\|u_{\sigma_1}\cdot\nabla u_{\sigma_1}(t)\|^p_{L^p(\Omega)}dt).$$

Wir befassen uns nur noch mit den letzten beiden Termen rechts. Es ist wie beim Beweis von Hilfssatz II. 4:

$$\int_0^T\|u_{\sigma_2}\cdot\nabla u_{\sigma_2}\|^p_{L^p(\Omega)}dt\leqq c(n,p)\Big(\int_0^T\||u_{\sigma_2}|^3\|^p_{L^p(\Omega)}dt+\int_0^T\||\nabla u_{\sigma_2}|^{3/2}\|^p_{L^p(\Omega)}dt\Big),$$

$$\leqq c(n,p)\Big(\int_0^T\||u_{\sigma_2}-u_{\sigma_1}|+|u_{\sigma_1}|^3\|^p_{L^p(\Omega)}dt$$

$$+\int_0^T\||\nabla u_{\sigma_2}-\nabla u_{\sigma_1}|+|\nabla u_{\sigma_1}|^{3/2}\|^p_{L^p(\Omega)}dt\Big),$$

$$\leqq c(n,p,\Omega)\Big(\int_0^T\|u_{\sigma_2}-u_{\sigma_1}\|^p_{(H^{2,p}(\Omega))^n}\|u_{\sigma_2}-u_{\sigma_1}\|^{2p}_{(L^p(\Omega))^n}dt$$

$$+\int_0^T\|u_{\sigma_2}-u_{\sigma_1}\|^p_{(H^{2,p}(\Omega))^n}\|u_{\sigma_2}-u_{\sigma_1}\|^{(1/2)p}_{(L^p(\Omega))^n}dt$$

$$+\int_0^T\||u_{\sigma_1}|^3\|^p_{L^p(\Omega)}dt+\int_0^T\||\nabla u_{\sigma_1}|^{3/2}\|^p_{L^p(\Omega)}dt\Big).$$

Ebenfalls wie beim Beweis von Hilfssatz II. 4 sieht man, daß man die beiden letzten Terme rechts durch $|||(u_{\sigma_1},\tilde{p}_{\sigma_1})|||_T$ abschätzen kann. Nach Hilfssatz II. 4 kann man auch

$$\int_0^T\|u_{\sigma_1}\cdot\nabla u_{\sigma_1}\|^p_{(L^p(\Omega))^n}dt$$

in dieser Weise abschätzen. Somit haben wir, falls $|\sigma_2-\sigma_1|\leqq\delta=\delta(n,\nu,p,\Omega,f)$ eine Abschätzung der Form

$$|||(u_{\sigma_2}-u_{\sigma_1}, \tilde{p}_{\sigma_2}-\tilde{p}_{\sigma_1})|||_T \leqq c(n, p, \nu, \Omega, f, \sigma_1, |||(u_0, \tilde{p}_0)|||_T)$$
$$\times\left(\|\tilde{\varphi}_0\|_{2,p}^p+\cdots+\int_0^T\|g(t)\|_{(L^p(\Omega))^n}^p dt\right)$$

und damit auch eine Abschätzung

$$|||(u_{\sigma_2}, \tilde{p}_{\sigma_2})|||_T \leqq c(n, p, \nu, \Omega, f, \sigma_1, |||(u_0, p)|||_T)$$
$$\times\left(\|\tilde{\varphi}_0\|_{2,p}^p+\cdots+\int_0^T\|g(t)\|_{(L^p(\Omega))^n}^p dt\right)$$

gewonnen. Man beachte, daß δ nicht von σ_1 abhängt. Insgesamt folgt, daß $[0, \sigma_1+\delta]\cap\{\sigma\,|\,[0, \sigma]\subset\Sigma\}\subset\Sigma^*$ ist. Sei $\{w_\nu\}$ eine Folge mit

$$w_\nu\in L^p((0, T), (H^{2,p}(\Omega))^n)$$
$$w_\nu'\in L^p((0, T), (L^p(\Omega))^n)\,.$$

Wegen $p>n+1$ ist

$$\|w_\nu\|_{(C^\alpha(\bar{Q}_T))^n}^p \leqq c(n, p, \Omega)\left(\int_0^T\|w_\nu'(t)\|_{(L^p(\Omega))^n}^p dt+\int_0^T\|\nabla w_\nu(t)\|_{(L^p(\Omega))^n}^p dt\right)$$

mit $\alpha\leqq 1-\frac{n+1}{p}$. Wenn also

$$|||w_\nu|||_T=\int_0^T\|w_\nu'(t)\|_{(L^p(\Omega))^n}^p dt+\int_0^T\|w_\nu(t)\|_{(H^{2,p}(\Omega))^n}^p dt\leqq 1$$

ist, so existiert eine Teilfolge $\{w_{\nu_j}\}$ mit $w_{\nu_j}\to w$ in $(C^\alpha(\bar{Q}_T))^n$, $\alpha<1-\frac{n+1}{p}$, $|||w|||_T\leqq 1$. Insbesondere ist dann

$$\int_{Q_T}|w_{\nu_j}\cdot\nabla w_{\nu_j}-w\cdot\nabla w|^p dx dt\leqq c(n, p, \Omega)\left(\int_{Q_T}|\nabla w_{\nu_j}|^p dx dt\,\|w_{\nu_j}-w\|_{(C^0(\bar{Q}_T))^n}\right.$$
$$\left.+\|w_{\nu_j}\|_{(C^0(\bar{Q}_T))^n}\int_{Q_T}|\nabla w_{\nu_j}-\nabla w|^p dx dt\right).$$

Wegen

$$\|\nabla w_{\nu_j}(t)-\nabla w(t)\|_{(L^p(\Omega))^n}$$
$$\leqq c(n, p, \Omega)\|w_{\nu_j}(t)-w(t)\|_{(H^{2,p}(\Omega))^n}^{1/2}\|w_{\nu_j}(t)-w(t)\|_{(C^0(\bar{\Omega}))^n}$$

folgt endlich, daß

$$\int_{Q_T}|w_{\nu_j}\cdot\nabla w_{\nu_j}-w\cdot\nabla w|^p dx dt\to 0\,.$$

Ordnen wir also jedem w mit $|||w|||_T<\infty$ die eindeutig bestimmte Lösung $u=\mathcal{T}w$ mit

$$u'-\nu\Delta u+w\cdot\nabla w+\nabla p=(1-\sigma)f+\sigma g\,,$$

$$\nabla\cdot u=0\,,\qquad u(0)=(1-\sigma)\tilde{\varphi}_0+\sigma\tilde{\varphi}$$

zu, so ist $\mathcal{T}$ kompakt, $0\leqq\sigma\leqq 1$. Alle Fixpunkte von $\tau\mathcal{T}$, $0\leqq\tau\leqq 1$, $0\leqq\sigma\leqq\sigma_1+\delta$ bleiben, wie eben gezeigt, in der $|||\cdot|||_T$-Norm beschränkt. Nach dem Schaeferschen Fixpunktsatz ist also $[0, \sigma_1+\delta]\subset\Sigma$, also $[0, \sigma_1+\delta]\subset\Sigma^*$. Da δ von σ_1 nicht abhing, folgt: $[0, 1]=\Sigma=\Sigma^*$, was zu beweisen war.

VI. Eine Anwendung.

Sei in diesem Kapitel die Raumdimension $n=4$ oder 3. Dann gilt der

SATZ VI. 1. *Es gibt eine nur von ν, $\partial\Omega$ abhängige Konstante $c(\nu, \partial\Omega)$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $\sigma\in[0, 1]$ und zu jedem $\tilde{\varphi}\in(H^{2,2}(\Omega))^n\cap(H^{0_1,2}(\Omega))^n$ mit $\nabla\cdot\tilde{\varphi}=0$ existiert eine Hopfsche Lösung $(u, \tilde{p})$ des Systems*

$$u'-\nu\Delta u+\nabla\tilde{p}+u\cdot\nabla u=0\,,$$

$$\nabla\cdot u=0\,,\qquad u(0)=\sigma\tilde{\varphi}$$

mit

$$u'\in L^2((0, T), (H^{0_1,2}(\Omega))^n\cap L^\infty((0, T), (L^2(\Omega))^n)\,,$$

wenn nur

$$\|\tilde{\varphi}\|_{(H^{2,2}(\Omega))^n}<c(\nu, \partial\Omega)^{1)}$$

ist. $u=u_\sigma$ ist eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Der Beweis befindet sich—bis auf die Erörterung der Tatsache, daß die Schranke für den Anfangswert $\tilde{\varphi}$ nur von ν, $\partial\Omega$ abhängt—in [**5**], S. 82-84. Daß die Schranke für $\tilde{\varphi}$ nur von ν, $\partial\Omega$ abhängt, folgt vermöge der Abschätzung $\|u\|_{L^4(\Omega)}\leqq c(\partial\Omega)\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)}$, $u\in H^{1,2}(\Omega)$, c eine von $\partial\Omega$ abhängige Konstante, aus dem Beweis in [**5**], S. 82-84.

Ebenfalls aus dem Beweis in [**5**], S. 82-84 folgt, daß für alle Lösungen u_σ, $0\leqq\sigma\leqq 1$,

$$\text{(VI. 1)}\qquad \int_0^T\|u'_\sigma(t)\|^2_{(H^{1,2}(\Omega))^n}dt+\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqq t\leqq T}\|u'_\sigma(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n}\leqq c(\nu, T, \Omega)$$

ist.

Zum Nachweis der Regularität der u_σ benötigen wir den

SATZ VI. 2. *Durch*

1) $c(\nu, \partial\Omega)$ ist von der Größe von Ω unabhängig.

$$u_\sigma(t): [0, 1]\times[0, T]\to(L^4(\Omega))^n$$

ist eine stetige Abbildung gegeben, die daher insbesondere gleichmäßig stetig ist. Die Funktion f, die gegeben ist durch

$$\text{(VI. 2)} \qquad f(\delta)=\sup_{\substack{0\leqq t\leqq T\\ |\sigma_2-\sigma_1|\leqq\delta}}\|u_{\sigma_2}(t)-u_{\sigma_1}(t)\|_{(L^4(\Omega))^n},$$

$0\leqq\delta\leqq1$, *ist daher stetig im Nullpunkt mit* $f(0)=0$.

BEWEIS. Wegen (VI. 1) müssen wir nur beweisen, daß $u_{\sigma_\mu}(t)\to u_{\sigma_0}(t)$ in $(L^4(\Omega))^n$, $\sigma_\mu\to\sigma_0$, $0\leqq t\leqq T$. Für fast alle $t\in(0, T)$ und alle $v\in V$ gilt

$$\text{(VI. 3)} \qquad (u'_\sigma(t), v)+\nu(\nabla u_\sigma(t), \nabla v)+(u_\sigma(t)\cdot\nabla u_\sigma(t), v)=0, \qquad 0\leqq\sigma\leqq1.$$

Da $u_\sigma\in C^0([0, T], (H^{0 1,2}(\Omega))^n)$, also auch $\in C^0([0, T], (L^4(\Omega))^n)$ ist, folgt mit (VI. 1), daß $(u_\sigma(t)\cdot\nabla u_\sigma(t), v)$ für jedes $\sigma\in[0, T]$ stetig in t ist. Somit erlaubt u'_σ eine Fortsetzung auf $[0, T]$, die dort schwach stetig ist. Diese Fortsetzung sei ebenfalls mit u'_σ bezeichnet. (VI. 3) bleibt gültig. Wir haben

$$\text{(VI. 4)} \qquad (u'_{\sigma_\mu}(t), u_{\sigma_\mu}(t))+\nu\|\nabla u_{\sigma_\mu}(t)\|^2=0.$$

Nach [5], S. 86 gilt

$$\text{(VI. 5)} \qquad u_{\sigma_\mu}\to u_\sigma$$

in $C^0([0, T], (L^2(\Omega))^n)$. Mit (VI. 1) folgt

$$\text{(VI. 6)} \qquad \nabla u'_{\sigma_\mu}\to\nabla u'_\sigma \text{ schwach in } L^2((0, T), (L^2(\Omega))^n).$$

Endlich ist

$$\text{(VI. 7)} \qquad (u'_\sigma(t), u_\sigma(t))+\nu\|\nabla u_\sigma(t)\|^2=0.$$

Für $v\in(C_0^\infty(\Omega))^n$, $\nabla\cdot v=0$ ist

$$\begin{aligned}(u'_{\sigma_\mu}(t)-u'_\sigma(t), v)&=\nu(u_{\sigma_\mu}(t)-u_\sigma(t), \Delta v)\\ &\quad-(u_{\sigma_\mu}(t)\cdot\nabla u_{\sigma_\mu}(t)-u_\sigma(t)\cdot\nabla u_\sigma(t), v).\end{aligned}$$

Wegen

$$(u_{\sigma_\mu}(t)\cdot\nabla u_{\sigma_\mu}(t), v)=-(u_{\sigma_\mu}(t)\cdot\nabla v, u_{\sigma_\mu}(t)),$$

$$(u_\sigma(t)\cdot\nabla u_\sigma(t), v)=-(u_\sigma(t)\cdot\nabla v, u_\sigma(t))$$

folgt mit (VI. 5), daß

$$(u'_{\sigma_\mu}(t)-u'_\sigma(t), v)\to0, \qquad \mu\to\infty.$$

Wieder unter Zuhilfenahme von (VI. 5) folgt mit (VI. 4) und (VI. 7)

$$\|\nabla u_{\sigma_\mu}(t)\|_{(L^2(\Omega))^n} \to \|\nabla u_\sigma(t)\|_{(L^2(\Omega))^n}.$$

Wegen

$$(\nabla u_{\sigma_\mu}(t)-\nabla u_\sigma(t),\ \tilde{v})$$

$$=\int_0^t(\nabla u'_{\sigma_\mu}(\tau)-\nabla u'_\sigma(\tau),\ \tilde{v})d\tau+(\sigma_\mu\nabla\tilde{\varphi}-\sigma\nabla\tilde{\varphi},\ \tilde{v}), \qquad \tilde{v}\in(L^2(\Omega))^{n^2},$$

folgt mit (VI. 6), daß

$$\nabla u_{\sigma_\mu}(t)\to\nabla u_\sigma(t)$$

schwach in $(L^2(\Omega))^n$, also

$$u_{\sigma_\mu}(t)\to u_\sigma(t)$$

in $(H^{0 1,2}(\Omega))^n$ und damit in $(L^4(\Omega))^n$. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz V. 2 liefert jetzt den

SATZ VI. 3. *Sei* $p>5$. *Sei* $\tilde{\varphi}\in(H^{2,p}(\Omega))^n\cap(H^{0 1,2}(\Omega))^n$, $\nabla\cdot\tilde{\varphi}=0$. *Sei*

$$\|\tilde{\varphi}\|_{(H^{2,2}(\Omega))^n}\leqq c(\nu,\ \partial\Omega).$$

Dann liegt die Lösung $(u,\ \tilde{p})$ *nach Satz* VI. 1 *des Gleichungssystems*

$$u'-\nu\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla\tilde{p}=0,$$

$$\nabla\cdot u=0, \qquad u(0)=\tilde{\varphi},$$

für die $u'\in L^2((0,\ T),\ V)\cap L^\infty((0,\ T),\ H)$ *ist, in*

$$L^p((0,\ T),\ (H^{2,p}(\Omega))^n)\times L^p((0,\ T),\ \hat{H}^{1,p}(\Omega)).$$

BEMERKUNG. Für $n=3$ folgt die Regularität der betrachteten schwachen Lösungen aus den Resultaten in [4], die innere Regularität schon aus den Resultaten in [**11**]. Für $n=4$ sind die Resultate aus [4] oder [**11**] nicht anwendbar, da wir lediglich über eine Abschätzung für

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{(L^n(\Omega))^n}=\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{(L^4(\Omega))^4}$$

verfügen. Für $n=2$ ist keinerlei Einschränkung an die Anfangswerte notwendig, es gilt für das nichtlineare Problem in vollem Umfang das linearen parabolischen Gleichungen entsprechende Resultat, s. hierzu [**13**].

Literatur

[1] S. Agmon, A. Douglis und L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 35-92.

[2] A. Friedman, Partial Differential Equations, Holt, Rinehart and Winston, New York, San Francisco, Montreal, London, Sydney, 1969.

[3] E. Hopf, Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachrichten, **4** (1950/51), 213-231.

[4] S. Kaniel und M. Shinbrot, Smoothness of weak solutions of the Navier-Stokes equations, Arch. Rational Mech. Anal., **24** (1967), 302-324.

[5] J. L. Lions, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes nonlinéaires, Dunod, Paris, 1969.

[6] O. A. Ladyženskaja, Funktionalanalytische Untersuchungen der Navier-Stokesschen Gleichungen, Akademie-Verlag, Berlin, 1965.

[7] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikow und N. N. Ural'ceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translations of Mathematical Monographs, 23, American Mathematical Society, Providence, 1968.

[8] V. A. Solonnikov, Estimates of the solutions of a nonstationary linearized system of Navier-Stokes equations, Amer. Math. Soc., Translations, Ser. 2, **75** (1968), 1-116 (translated from Trudy Mat. Inst. Steklov, **70** (1964), 213-317.)

[9] V. A. Solonnikov und K. K. Golovkin, On the first boundaryvalue problem for nonstationary Navier-Stokes equations, Soviet Math. Dokl., **2** (1961), 1188-1191.

[10] P. E. Sobolevskii, Study of Navier-Stokes equations by the methods of the theory of parabolic equations in Banach spaces, Soviet Math. Dokl., **5** (1964), 720-723.

[11] J. Serrin, On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations, Arch. Rational Mech. Anal., **9** (1962), 187-195.

[12] R. Témam, Navier-Stokes Equations, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1977.

[13] W. von Wahl, Instationary Navier-Stokes equations and parabolic systems, Pacific J. Math., **72** (1977), 557-569.

Wolf von Wahl
Mathematisches Institut
der Universität
Postfach 3008
D 8580 Bayreuth
Fed. Rep. of Germany