J. Math. Soc. Japan
Vol. 23, No. 4, 1971

Quelques applications du défaut modifié au théorème de Picard-Borel*)

Par Nobushige TODA

(Reçu le 20 janv., 1971)

§ 1. Introduction.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre non zéro dans le plan fini $|z|<\infty$. Alors, on sait bien qu'elle admet au plus deux valeurs exceptionnelles au sens de Borel et au plus deux valeurs exceptionnelles au sens de Nevanlinna de défaut 1 (voir Nevanlinna [**3**]). De plus, il est connu bien qu'il y a un exemple d'une fonction méromorphe dans $|z|<\infty$ admettant une valeur exceptionnelle au sens de Borel sans être exceptionnelle au sens de Nevanlinna (Valiron [**6**]) et un exemple qui admet une valeur exceptionnelle au sens de Nevanlinna de défaut 1 sans être exceptionnelle au sens de Borel (Nevanlinna [**3**]). C'est-à-dire, les deux notions sont indépendantes à un sens. Mais, on a trouvé le

THÉORÈME A. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre non zéro dans le plan fini $|z|<\infty$. Alors, elle admet au plus deux valeurs exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut* 1. *De plus, s'il y en a deux, l'ordre de $f(z)$ est entier quand il est fini* (Toda [**5**]).

Il est naturel de considérer si le théorème A est valable dans le cercle-unité. Pourtant, la méthode utilisée pour le démontrer n'est pas applicable aux fonctions méromorphes dans le cercle-unité. De plus, la dérnière partie du théorème A n'est pas nécessairement vraie dans le cercle-unité parce qu'il y a une fonction méromorphe d'ordre positif quelconque dans $|z|<1$ admettant deux valeurs exceptionnelles au sens de Picard (voir § 3). Cependant, la première partie du théorème A est valable aussi dans $|z|<1$. En effet, dans ce mémoire, on introduit une méthode applicable aux fonctions méromorphes dans le cercle-unité et donne quelques généralisations du théorème de Picard-Borel, qui contiennent le théorème A quand on considère dans le plan fini $|z|<\infty$.

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna des fonctions méromorphes (voir Nevanlinna [**3**]).

*) Ce travail a été fait en partie avec l'aide de la fondation de Sakkokai (The Sakkokai Foundation).

§ 2. Dans le plan fini.

Dans ce paragraphe, on généralise le théorème A. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ, $0<\rho\leqq\infty$, dans le plan fini $|z|<\infty$. Comme dans Toda [4], on dit qu'un nombre α est admissible à $f(z)$ quand

$$(1)\qquad \begin{cases} 0\leqq\alpha<\rho & \text{si}\quad 0<\rho<\infty\,, \\ 0<\alpha<\infty & \text{si}\quad \rho=\infty\,. \end{cases}$$

On utilise les notations suivantes:

$$T_\alpha(r, r_0, f)=T_\alpha(r, f)=\int_{r_0}^{r}\frac{T(t, f)}{t^{1+\alpha}}dt\,,$$

$$N_\alpha(r, r_0, a, f)=N_\alpha(r, a, f)=\int_{r_0}^{r}\frac{N(t, a, f)}{t^{1+\alpha}}dt\,,$$

$$\delta_\alpha(a, f)=\delta_\alpha(a)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N_\alpha(r, a, f)}{T_\alpha(r, f)}$$

et

$$\Delta_\alpha(a, f)=\Delta_\alpha(a)=1-\liminf_{r\to\infty}\frac{N_\alpha(r, a, f)}{T_\alpha(r, f)}$$

où r_0 est un nombre positif fixé quelconque et a est un nombre complexe, fini ou non (voir Toda [4]).

On dit que $\delta_\alpha(a, f)$ est le défaut modifié de $f(z)$ en un point a. La quantité $\delta_\alpha(a)$ est indépendante du choix de r_0 quand α est admissible à $f(z)$ ou égal à zéro (Toda [4]).

On dit qu'une valeur a est exceptionnelle au sens de Borel pour $f(z)$ si l'ordre de $N(r, a, f)$ est plus petit que ρ (ou fini quand $\rho=\infty$). (Il y a des autres définitions quand $\rho=\infty$, mais on utilise la définition donnée ici.) Soient B_f (ou B) l'ensemble des valeurs exceptionnelles au sens de Borel pour $f(z)$ et $N(B_f)$ (ou $N(B)$) le nombre des éléments de B_f. Alors, $N(B)\leqq 2$ et si $N(B)=2$, $f(z)$ est à croissance régulière et ρ est entier quand il est fini, par conséquent les défauts des éléments dans B sont égals à 1 (voir Valiron [6]).

On donne, d'abord, quelques lemmes.

LEMME 1. *Pour $\alpha>0$ et $r_0>0$,*

$$S_\alpha(r, r_0, f)\equiv\int_{r_0}^{r}\frac{S(t, f)}{t^{1+\alpha}}dt=O\Big(\int_{r_0}^{r}\frac{\log^+ T(t, f)}{t^{1+\alpha}}dt\Big)$$

où $S(t, f)$ est le terme d'erreur dans le deuxième théorème fondamental de Nevanlinna (Nevanlinna [3]).

LEMME 2. *Pour $\alpha<\beta$ admissibles à $f(z)$ ou $\alpha=0$, on a*

$$\delta(a)\leqq\delta_\alpha(a)\leqq\delta_\beta(a)\leqq\Delta_\beta(a)\leqq\Delta_\alpha(a)\leqq\Delta(a)$$

où a est valeur quelconque, finie ou infinie (Toda [4]).

On note qu'il y a un exemple d'une fonction méromorphe (soit $g(z)$) dans $|z|<\infty$ tel que

$$\delta(a, g) \neq \delta_{\alpha}(a, g)$$

pour une valeur a et un nombre α admissible à $g(z)$ (voir Toda [**4**]).

LEMME 3. *Si une valeur a appartient à B_f, il y a un nombre α admissible à $f(z)$ tel que*

$$\delta_{\alpha}(a, f)=1 .$$

En effet, prenons un nombre α tel que

$$\text{l'ordre de } N(r, a)<\alpha<\rho ,$$

alors

$$N_{\alpha}(r, a)=O(1) .$$

De plus, α étant admissible à $f(z)$, $T_{\alpha}(r, f)$ tend vers l'infini si $r\to\infty$. Par conséquent, on a

$$\delta_{\alpha}(a, f)=1 .$$

LEMME 4. *Si pour un nombre α admissible à $f(z)$*

$$K_{\alpha}(f)=\limsup_{r\to\infty} \frac{N_{\alpha}(r, 0, f)+N_{\alpha}(r, f)}{T_{\alpha}(r, f)}=0 ,$$

qui est indépendante du choix de r_0, l'ordre ρ de $f(z)$ est entier ou infini (Toda [**4**]).

Utilisant ces lemmes, on donne deux théorèmes.

THÉORÈME 1. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ, $0<\rho\leqq\infty$, dans le plan fini $|z|<\infty$ et α un nombre admissible à $f(z)$ quelconque. Alors, on a*

$$\sum_{a\notin B_f} \delta_{\alpha}(a, f)\leqq 2-N(B_f) .$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2 dans Toda [**4**], on a pour q valeurs distinctes quelconque $a_1, \cdots, a_q$ (finies ou non, $q\geqq 3$) l'inégalité

$$(q-2)T_{\alpha}(r, f)\leqq \sum_{i=1}^{q} N_{\alpha}(r, a_i)+S_{\alpha}(r, f) \tag{2}$$

où $S_{\alpha}(r, f)=S_{\alpha}(r, r_0, f)$.

1) Le cas où $B=\phi$. Ce théorème est le même que la proposition 4 dans Toda [**4**].

2) Le cas où B contient un seul élément. Soient $B=\{b\}$ et β un nombre admissible à $f(z)$ quelconque tel que

$$\delta_{\beta}(b, f)=1$$

(Lemme 3). Alors, à l'inégalité (2) α étant admissible à $f(z)$ quelconque et q aussi étant quelconque, si on prend $\alpha=\beta$, en vertu du lemme 1, on a

$$\sum_{i=1}^{q} \delta_{\beta}(a_i)\leqq 1=2-N(B) ,$$

de sorte qu'en utilisant le lemme 2, on a le résultat.

3) Le cas où B contient deux éléments. Soit $B=\{b_0, b_1\}$. Alors, l'ordre de $N(r, b_0)+N(r, b_1)$ est plus petit que ρ. Prendrons un nombre β admissible à $f(z)$ et plus grand que l'ordre de $N(r, b_0)+N(r, b_1)$, alors

$$N_\beta(r, b_0)+N_\beta(r, b_1)=O(1),$$

par conséquent, $T_\beta(r, f)$ tendant vers l'infini,

$$\delta_\beta(b_0)=\delta_\beta(b_1)=1.$$

De (2) et du lemme 1, on a

$$\sum_{i=1}^{q}\delta_\beta(a_i)\leqq 0=2-N(B),$$

de sorte qu'en utilisant le lemme 2, on a le résultat.

COROLLAIRE 1. *Soit $f(z)$ une fonction comme dans le théorème* 1, *alors, on a*

$$\sum_{a\notin B_f}\delta(a, f)\leqq 2-N(B_f).$$

On obtient ce résultat tout de suite de ce théorème et du lemme 2.

COROLLAIRE 2. *Le nombre des valeurs exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut* 1 *est au plus égal à deux.*

C'est la première partie du théorème A.

COROLLAIRE 3. *Si $N(B_f)=2$, pour α admissible à $f(z)$ quelconque et a n'appartenant pas à B_f, on a*

$$\Delta_\alpha(a, f)=0.$$

En effet, dans ce cas, $f(z)$ est à croissance régulière, par conséquent pour b_0, $b_1\in B_f$

$$\delta(b_0, f)=\delta(b_1, f)=1.$$

Donc, en utilisant le lemme 2, on a

$$\sum_a\delta_\alpha(a, f)=\delta_\alpha(b_0, f)+\delta_\alpha(b_1, f)=2,$$

de sorte qu'en vertu de la proposition 7 dans Toda [4], on a pour tout a

$$\delta_\alpha(a, f)=\Delta_\alpha(a, f).$$

D'autre part, d'après le théorème 1, on a

$$\delta_\alpha(a, f)=0, \qquad a\notin B_f.$$

En conséquence, on a le résultat.

THÉORÈME 2. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ, $0<\rho<\infty$, dans le plan fini $|z|<\infty$ telle que B_f n'est pas vide et α un nombre admissible* *à $f(z)$ quelconque. Alors, si ρ n'est pas entier, B_f contient un seul élément et on a*

$$\sum_{a \notin B_f} \delta_\alpha(a, f) < 1 .$$

DÉMONSTRATION. Si B_f contient deux éléments, il est connu bien que ρ est entier, qui est contraire à notre hypothèse. Donc, B_f contient un seul élément dans notre cas. On peut supposer que $B_f = \{\infty\}$ par une transformation linéaire si nécessaire. Alors, $\infty \in B_{f'}$, parce que l'ordre de $f'(z)$ est égal à celui de $f(z)$ et l'inégalité

$$N(r, f) \leqq N(r, f') \leqq 2N(r, f)$$

signifie que l'ordre de $N(r, f')$ est égal à celui de $N(r, f)$. Soit β un nombre admissible à $f(z)$ quelconque et plus grand que l'ordre de $N(r, f)$, alors on a

$$N_\beta(r, f) = O(1) \qquad \text{et} \qquad N_\beta(r, f') = O(1)$$

de sorte que

$$\delta_\beta(\infty, f) = \delta_\beta(\infty, f') = 1 \tag{3}$$

parce que $T_\beta(r, f)$ et $T_\beta(r, f')$ tendent vers l'infini si $r \to \infty$.

Supposons ici que pour un nombre α admissible à $f(z)$

$$\sum_{a \neq \infty} \delta_\alpha(a, f) = 1 .$$

On peut prendre $\alpha = \beta$ d'après le lemme 2. Or, grâce au théorème 1 dans Toda [4], on a

$$\delta_\beta(0, f') = 1 . \tag{4}$$

De (3) et (4), on a

$$0 \leqq K_\beta(f') \leqq 2 - \delta_\beta(0, f') - \delta_\beta(\infty, f') = 0 .$$

Cela veut dire que l'ordre de f', qui est égal à celui de f, est entier d'après le lemme 4, qui est une contradiction à l'hypothèse. Cela signifie que pour tout α admissible à $f(z)$

$$\sum_{a \notin B} \delta_\alpha(a, f) < 1 .$$

COROLLAIRE 4. *Si le nombre des valeurs exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut* 1 *est égal à deux, ρ est entier ou infini.*

C'est la dernière partie du théorème A.

N.B.1. On peut démontrer le corollaire 1 du deuxième théorème fondamental de Nevanlinna directement quand l'ordre de $f(z)$ est fini ; mais il n'est pas possible quand l'ordre de $f(z)$ est infini parce qu'il existe un ensemble exceptionnel.

N.B.2. On peut localiser quelques résultats dans ce paragraphe en utilisant le deuxième théorème fondamental localisé de Nevanlinna (F. Nevanlinna [**1**] et R. Nevanlinna [**2**]). Par exemple,

"*Soit $f(z)$ une fonction méromorphe uniforme d'ordre ρ, $0<\rho\leqq\infty$, dans $R\leqq|z|<\infty$. Alors, on a*

$$\sum_{a\in B}\delta(a, f)\leqq 2-N(B_f)\,;$$

en particulier, le nombre des valeurs exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut 1 est au plus égal à deux. S'il y en a deux, ρ est entier ou infini."

§ 3. Dans le cercle-unité.

Dans ce paragraphe, on généralise le théorème de Picard-Borel dans le cercle-unité. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ, $0<\rho\leqq\infty$, dans le cercle-unité $|z|<1$. Différemment un peu du cas de plan fini (voir (1)), on dit qu'un nombre λ est admissible à $f(z)$ si

$$0<\lambda<\rho\,.$$

DÉFINITION 1. Pour un nombre $0<r_0<1$ fixé quelconque,

$$T_\lambda(r, r_0, f)=T_\lambda(r, f)=\int_{r_0}^{r}T(t, f)(1-t)^{\lambda-1}dt\,,$$

$$N_\lambda(r, r_0, a)=N_\lambda(r, a)=\int_{r_0}^{r}N(t, a)(1-t)^{\lambda-1}dt\,,$$

$$m_\lambda(r, r_0, a)=m_\lambda(r, a)=\int_{r_0}^{r}m(t, a)(1-t)^{\lambda-1}dt\,,$$

$$S_\lambda(r, r_0, f)=S_\lambda(r, f)=\int_{r_0}^{r}S(t, f)(1-t)^{\lambda-1}dt$$

où λ est admissible à $f(z)$ et $S(t, f)$ est le terme d'erreur dans le deuxième théorème fondamental de Nevanlinna.

PROPOSITION 1. 1) *$T_\lambda(r, f)$ tend vers l'infini monotonement quand $r\to 1$.*

2)

$$\limsup_{r\to 1}\frac{\log T_\lambda(r, f)}{\log\dfrac{1}{1-r}}=\begin{cases}\rho-\lambda & \textit{quand } \rho<\infty\\ \infty & \textit{quand } \rho=\infty\,.\end{cases}$$

DÉMONSTRATION. D'abord on démontre 2). Soit $r>r_0$, alors $T(r, f)$ étant positive, croissante et $(1+r)/2>r$, on a

$$T_\lambda((1+r)/2, r_0, f)=\int_{r_0}^{(1+r)/2}T(t, f)(1-t)^{\lambda-1}dt\geqq\int_{r}^{(1+r)/2}T(t, f)(1-t)^{\lambda-1}dt$$

$$\geqq T(r, f)\int_{r}^{(1+r)/2}(1-t)^{\lambda-1}dt=(1-2^{-\lambda})(1-r)^{\lambda}T(r, f)\,.$$

De cette inégalité, on obtient

$$\limsup_{r\to 1} \frac{\log T_\lambda(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}} \begin{cases} \geqq \rho-\lambda & \text{quand } \rho<\infty \\ =\infty & \text{quand } \rho=\infty . \end{cases}$$

Supposons que $\rho<\infty$. Alors, pour un nombre ε positif donné quelconque, il y a un nombre r_1 $(>r_0)$ tel que pour tout $r \geqq r_1$,

$$T(r, f) \leqq (1-r)^{-\rho-\varepsilon} .$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} T_\lambda(r, r_0, f) &\leqq O(1)+\int_{r_1}^{r}(1-t)^{\lambda-\rho-\varepsilon-1}dt \\ &=(1-r)^{\lambda-\rho-\varepsilon}/(\rho+\varepsilon-\lambda)+O(1) , \end{aligned}$$

de sorte que

$$\limsup_{r\to 1} \frac{\log T_\lambda(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}} \leqq \rho-\lambda .$$

Puis, on démontre 1). $T(r, f)$ étant positive et croissante, $T_\lambda(r, r_0, f)$ est croissante. En utilisant 2) ici, on obtient 1).

N.B.3. Visiblement, 1) et 2) sont indépendants du choix de r_0.

PROPOSITION 2. *Pour toute valeur a,*

$$N_\lambda(r, r_0, a)+m_\lambda(r, r_0, a)=T_\lambda(r, r_0, f)+O(1) .$$

PROPOSITION 3. *Pour q valeurs distinctes quelconque $a_1, \cdots, a_q$ $(q \geqq 3)$,*

$$(q-2)T_\lambda(r, r_0, f) \leqq \sum_{i=1}^{q} N_\lambda(r, r_0, a_i)+S_\lambda(r, r_0, f) ,$$

où

$$S_\lambda(r, r_0, f)=O\Big(\int_{r_0}^{r} \log^+ T(r, f)(1-t)^{\lambda-1}dt\Big)$$

pour tout r tel que $r_0<r<1$.

Ces deux propositions sont obtenues tout de suite des deux théorèmes fondamentals de Nevanlinna et de la définition 1.

DÉFINITION 2. Pour une valeur a (finie ou infinie),

$$\delta_\lambda(a, f)=\delta_\lambda(a)=\liminf_{r\to 1} \frac{m_\lambda(r, r_0, a)}{T_\lambda(r, r_0, f)} ,$$

$$\Delta_\lambda(a, f)=\Delta_\lambda(a)=\limsup_{r\to 1} \frac{m_\lambda(r, r_0, a)}{T_\lambda(r, r_0, f)} .$$

La quantité $\delta_\lambda(a, f)$ est dite le défaut modifié de $f(z)$ en un point a.

LEMME 5.

$$\lim_{r\to 1} \frac{S_\lambda(r, r_0, f)}{T_\lambda(r, r_0, f)}=0 .$$

En effet, de la proposition 3,

$$S_\lambda(r, r_0, f) = O\Big(\int_{r_0}^{r} \log^+ T(t, f)(1-t)^{\lambda-1}dt\Big) = o(T_\lambda(r, r_0, f))$$

parce que $T(r, f)$ et $T_\lambda(r, r_0, f)$ tendent vers l'infini monotonement quand $r \to 1$ (Proposition 1).

N.B.4. Ce lemme est aussi indépendant du choix de r_0.

PROPOSITION 4. 1) *Pour λ admissible à $f(z)$ quelconque,*

$$\delta_\lambda(a) = 1 - \limsup_{r \to 1} \frac{N_\lambda(r, r_0, a)}{T_\lambda(r, r_0, f)},$$

$$\Delta_\lambda(a) = 1 - \liminf_{r \to 1} \frac{N_\lambda(r, r_0, a)}{T_\lambda(r, r_0, f)}$$

et elles sont indépendantes du choix de r_0.

2) *Pour $\lambda < \tau$ admissibles à $f(z)$, on a*

$$\delta(a) \leqq \delta_\lambda(a) \leqq \delta_\tau(a) \leqq \Delta_\tau(a) \leqq \Delta_\lambda(a) \leqq \Delta(a).$$

DÉMONSTRATION. 1) D'après la proposition 2 et la proposition 1-1), on a deux égalités facilement. Ce qu'elles sont indépendantes du choix de r_0 est visible.

2) Les inégalités $\delta(a) \leqq \delta_\lambda(a)$ et $\delta_\tau(a) \leqq \Delta_\tau(a)$ sont visibles des définitions de $\delta(a)$, $\delta_\lambda(a)$ et $\Delta_\lambda(a)$ ($\lambda = \lambda$ ou τ).

Soit $\alpha = \tau - \lambda$, qui est positif. Alors, on a

$$T_\tau(r, r_0, f) = \alpha \int_{r_0}^{r} T_\lambda(t, r_0, f)(1-t)^{\alpha-1}dt + T_\lambda(r, r_0, f)(1-r)^\alpha$$

et

$$N_\tau(r, r_0, a) = \alpha \int_{r_0}^{r} N_\lambda(t, r_0, a)(1-t)^{\alpha-1}dt + N_\lambda(r, r_0, a)(1-r)^\alpha.$$

De plus, pour un nombre ε positif donné quelconque, on a pour tout $r \geqq r_1(\varepsilon)$ $(\geqq r_0)$

$$N_\lambda(r, r_0, a) \leqq (1 - \delta_\lambda(a) + \varepsilon) T_\lambda(r, r_0, f).$$

En utilisant ces trois relations et de la proposition 1-1), on obtient

$$\delta_\lambda(a) \leqq \delta_\tau(a).$$

Le reste est visible maintenant.

PROPOSITION 5. *Pour un nombre λ admissible à $f(z)$ quelconque, on a*

1) *l'ensemble $N_\lambda = \{a, \delta_\lambda(a, f) > 0\}$ est au plus dénombrable et*

2) $\sum_{a \in N_\lambda} \delta_\lambda(a) \leqq 2.$

En effet, de la proposition 3 et du lemme 5, on a cette proposition tout de suite.

COROLLAIRE 5. $\sum_a \delta(a, f) \leqq 2.$

On dit qu'une valeur a est exceptionnelle au sens de Borel pour $f(z)$ si l'ordre de $N(r, a, f)$ est plus petit que ρ quand $\rho<\infty$ ou fini quand $\rho=\infty$. Soient B_f (ou B) l'ensemble des valeurs exceptionnelles au sens de Borel pour $f(z)$ et $N(B_f)$ (ou $N(B)$) le nombre des éléments de B_f. On sait bien que $N(B)\leqq 2$ en général. Différemment du cas de plan fini, ρ n'est pas nécessairement entier quand même $N(B)=2$. En effet, soit

$$f_1(z)=\exp((1-z)^{-\rho-1}), \qquad \rho>0, \tag{5}$$

alors $f_1(z)$ admet deux valeurs 0 et ∞ comme valeur exceptionnelle au sens de Picard, par conséquent, au sens de Borel parce que l'ordre de $f_1(z)$ est $\rho>0$.

LEMME 6. *Si une valeur a est exceptionnelle au sens de Borel pour $f(z)$, il existe un nombre λ admissible à $f(z)$ tel que*

$$\delta_\lambda(a, f)=1.$$

En effet, soit λ un nombre tel que

$$\text{l'ordre de } N(r, a, f)<\lambda<\rho,$$

alors

$$N_\lambda(r, a, f)=O(1).$$

Donc, d'après la proposition 1-1), on a le résultat.

THÉORÈME 3. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ, $0<\rho\leqq\infty$, dans le cercle-unité $|z|<1$ et λ un nombre admissible à $f(z)$ quelconque. Alors, on a*

$$\sum_{a\notin B_f}\delta_\lambda(a, f)\leqq 2-N(B_f).$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 3, le lemme 5, la proposition 4, le lemme 6 et la définition 2, on peut démontrer ce théorème comme dans la démonstration du théorème 1.

COROLLAIRE 6. $\sum_{a\notin B}\delta(a, f)\leqq 2-N(B)$.

On obtient ce corollaire de la proposition 4 et du théorème 3 tout de suite.

COROLLAIRE 7. *$f(z)$ admet au plus deux valeurs exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut* 1.

C'est une généralisation du théorème de Picard-Borel dans le cercle-unité $|z|<1$.

COROLLAIRE 8. *Si $N(B_f)=2$, pour toute valeur a n'appartenant pas à B_f et λ admissible à $f(z)$ quelconque, on a*

$$\delta_\lambda(a, f)=\delta(a, f)=0.$$

N.B.5. Ces résultats ne peuvent pas être démontrés directement du deuxième théorème fondamental de Nevanlinna quand même ρ est fini différemment du cas de plan fini.

N.B.6. Un résultat analogue au théorème 2 n'est pas valide dans le cercle-unité comme l'exemple (5) le montre.

Institut de Mathématiques
Université de Tôhoku

Bibliographie

[1] F. Nevanlinna, Über die Werteverteilung einer analytischen Funktion in der Umgebung einer isolierten wesentlich singularen Stelle, 6e Congr. des math. scand., (1925), 77–95.

[2] R. Nevanlinna, Neuere Untersuchungen über den Picardschen Satz, 6e Congr. des math. scand., (1925), 97–107.

[3] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[4] N. Toda, On a modified deficiency of meromorphic functions, Tôhoku Math. J., **22** (1970), 635–658.

[5] N. Toda, Sur une généralisation du théorème de Picard-Borel-Rémoundos (à paraître dans le Tôhoku Math. J., **23** (1971)).

[6] G. Valiron, Remarques sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes, Rend. Circ. Mat. Palermo, **57** (1933), 71–86.