

## Mittelwertigenschaften der Riemannschen Zeta-Funktion

von Friedhelm GOTZE

(Eingegangen am 22. Dez. 1966)

### 1. Einführung

Das Wachstumverhalten der Riemannschen Funktion  $\zeta(s)$  längs der kritischen Geraden  $\operatorname{Re}(s) = \sigma = \frac{1}{2}$  findet seinen analytischen Ausdruck in dem von Atkinson [1] bewiesenen Mittelwert

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left\{ \frac{\delta}{\log \delta} \int_0^{\infty} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 e^{-\nu t} dt \right\} = -1, \quad (1.1)$$

welcher — leicht modifiziert — bereits bei Hardy und Littlewood [3] vorkommt. Einen hiervon unabhängigen Zugang gab W. Maier [4] durch Einführung der Gitterfunktion

$$V\left(\frac{s}{\omega}\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (h + \omega k)^{-s} \quad (\sigma > 2, |\operatorname{arc} \omega| < \pi). \quad (1.2)$$

Sie hat — was in [2] gezeigt wurde — den singulären Halbstrahl  $\omega < 0$  und ist in  $s$  meromorph.

In der vorliegenden Note<sup>1)</sup> wird mit Hilfe einer Gitterfunktion höherer Stufe, d. h. mehrerer Parameter, eine Verallgemeinerung von (1.1) angestrebt. Wir zitieren vorwegnehmend den etwas mühsam zu beweisenden

SATZ 1. *Definiert  $\varphi(t) = \Gamma(t)\zeta(t)$  das Produkt aus Eulerscher Gamma- und Riemannscher Zeta-Funktion und ist*

$$\operatorname{Re}(\nu) < \frac{1}{2}, \quad |\operatorname{arc} x| < \pi,$$

*so existiert mit dem hypergeometrischen Kern  $F(t, \nu, 1; x)$  der Grenzwert*

$$\lim_{\omega \downarrow -1} \left\{ \frac{(\omega+1)^{1-\nu}}{\log(\omega+1)} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \varphi(t)\varphi(1-t)F(t, \nu, 1; x)\omega^{-t} dt \right\} = -\frac{2\pi i}{x^{\nu}},$$

*wobei die Annäherung an  $\omega = -1$  senkrecht aus der oberen komplexen  $\omega$ -Halb-*

---

1) Ein Teil der Vorarbeit leistete Herr Dr. G. Maeß, Dtsch. Akad. Wiss., Berlin, in seiner Diplomarbeit "Quadrantenfunktionen", Jena (1960).

ebene erfolgt.

Der stark vereinfachte Fall  $\nu=0$ , welcher zu (1.1) äquivalent ist, wird aus Gründen einer übersichtlicheren Darstellung zunächst behandelt.

**2. Zusammenhang zwischen Gitterfunktionen und Hardyschem Grenzwert**

Die durch (1.2) definierte Gittertranszendente  $V\left(\frac{s}{\omega}\right)$  genügt bei festgehaltenem  $s$  den Funktionalgleichungen

$$V(\omega) = \omega^{-s} V\left(\frac{1}{\omega}\right) \tag{2.1}$$

$$(\omega+1)^s V(\omega) = V\left(\frac{1}{\omega+1}\right) + V\left(\frac{\omega}{\omega+1}\right) + \zeta(s) \tag{2.2}$$

und besitzt, wie man durch Anwendung des Additionssatzes der  $\Gamma$ -Funktion

$$\frac{\Gamma(s)}{(h+\omega k)^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{\Gamma(s-t)\Gamma(t)}{h^{s-t}(\omega k)^t} dt \quad (\sigma > 0, |\text{arc } \omega| < \pi) \tag{2.3}$$

leicht bestätigt, die Integraldarstellung

$$V\left(\frac{s}{\omega}\right) = \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\left(\frac{s}{2}\right)} \varphi(t) \varphi(s-t) \omega^{-t} dt \quad (\sigma > 2, |\text{arc } \omega| < \pi) \tag{2.4}$$

mit

$$\varphi(t) = \Gamma(t) \zeta(t). \tag{2.5}$$

Der Integrationsweg ist die vertikale Gerade  $\text{Re}(t) = \text{Re}\left(\frac{s}{2}\right)$  und erstreckt

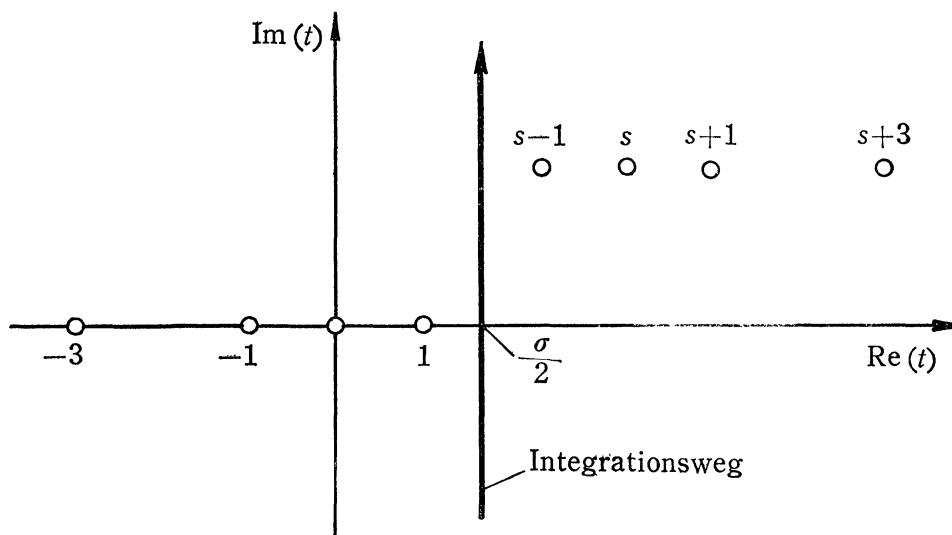


Abb. 1.

sich von  $\frac{\sigma}{2} - i\infty$  bis  $\frac{\sigma}{2} + i\infty$ . Das Zusammenwirken der Singularitäten von  $\Gamma(t)$  mit den trivialen Nullstellen der Zeta-Funktion beläßt für die meromorphe Funktion  $\varphi(t)$  nur die einfachen Polstellen  $t=0$  sowie  $t=1-2n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), wobei der Pol bei  $t=1$  von  $\zeta(t)$  herrührt. Abb. 1 veranschaulicht die Polstellenlage des Integranden.

Betrachtet man abweichend von (2.4) die Funktion

$$V^*\left(\frac{s}{\omega}\right) = \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\left(\frac{s}{2}\right)} \varphi(t) \varphi(s-t) \omega^{-t} dt \quad (|\operatorname{arc} \omega| < \pi) \quad (2.6)$$

diesmal für  $0 < \sigma < 2$ , so zeigt sich im Unterschied zu Abb. 1, daß hier die singulären Stellen 1 bzw.  $s-1$  des Integranden rechts bzw. links des Weges liegen. Indem man in (2.4) den Vertikalweg deformiert und ihn über die Pole  $t=1$ ,  $s-1$  hinwegzieht, entsteht neben (2.6) noch ein additiver Zusatz von zwei Residuen, d. h.

$$V\left(\frac{s}{\omega}\right) = V^*\left(\frac{s}{\omega}\right) + \frac{\zeta(s-1)}{s-1} (\omega^{-1} + \omega^{1-s}) \quad (2.7)$$

$(0 < \sigma < 2, s \neq 1).$

Die kritische Gerade  $\operatorname{Re}(t) = \frac{1}{2}$  von  $\zeta(t)$  kommt ins Spiel, wenn in (2.6)  $s=1$  gesetzt wird. Hierfür hat aber  $V\left(\frac{s}{\omega}\right)$ , wie aus (2.7) folgt, einen Pol erster Ordnung; es gilt für  $s \rightarrow 1$

$$V\left(\frac{s}{\omega}\right) = V^*\left(\frac{1}{\omega}\right) - \frac{\omega+1}{2\omega} \left( \frac{1}{s-1} + \log 2\pi \right) + \frac{\log \omega}{2} + O(s-1). \quad (2.8)$$

Ersetzt man nun in der Funktionalgleichung (2.2) die  $V$ -Funktionen entsprechend durch (2.8) und die übrigen  $s$ -abhängigen Terme durch

$$\left. \begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{s-1} - \Gamma^1(1) + O(s-1) \\ (\omega+1)^s &= (\omega+1)[1 + (s-1) \log(\omega+1)] + O\{(s-1)^2\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

so zeigt sich, daß die singulären Beiträge mit  $\frac{1}{s-1}$  wegfallen. Es bleibt nach Grenzübergang  $s \rightarrow 1$  und Einführung der Integrale für  $V^*$  gemäß (2.6) mit der Kurzbezeichnung  $V^*\left(\frac{1}{\omega}\right) = V^*(\omega)$

$$\begin{aligned} (\omega+1)V^*(\omega) &= \frac{1}{2} \left( \omega + \frac{1}{\omega} \right) \log(\omega+1) - \frac{\omega \log \omega}{2} - \log 2\pi - \Gamma^1(1) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\left(\frac{1}{2}\right)} \varphi(t) \varphi(1-t) (\omega+1)^t (1+\omega^{-t}) dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Aus dieser Darstellung kann jetzt bei vertikaler Annäherung von oben an die singuläre Halbachse  $\omega < 0$  das Verhalten von  $V^*(\omega)$  für  $\omega \downarrow -1$  beurteilt werden. Mit

$$\omega = e^{i(\pi-\delta)} = -1 + i\delta + O(\delta^2) \quad (0 < \delta < \pi) \quad (2.11)$$

folgt nämlich für das Integral in (2.10) die Größenschätzung

$$\int_{(\pm)} \varphi(t)\varphi(1-t)(\omega+1)^t(1+\omega^{-t})dt = O\left\{\sqrt{\delta} \int_{(\pm)} \left| \frac{\zeta(t)\zeta(1-t)}{\sin \frac{\pi t}{2}} \right| |dt| \right\} \quad (2.12)$$

Das Integral rechter Hand ist absolut konvergent, also verschwindet (2.12) für  $\delta \rightarrow 0$ , und aus (2.10) ergibt sich unter Benutzung von (2.6) der Grenzwert

$$\lim_{\omega \downarrow -1} \left\{ \frac{\omega+1}{\log(\omega+1)} \int_{(\pm)} \varphi(t)\varphi(1-t)\omega^{-t}dt \right\} = -2\pi i. \quad (2.13)$$

Wir wollen noch zeigen, daß diese quadratische Mittelbildung der Riemannschen Zeta-Funktion dem Hardy-Atkinsonschen Ergebnis (1.1) völlig gleichwertig ist. Definiert man für  $\delta > 0$

$$\int_0^\infty \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 e^{-\delta t} dt = N(\delta),$$

so besteht mit  $V^*(\omega)$  der leicht verifizierbare Zusammenhang

$$N(\delta) = i c^{-\frac{i\delta}{2}} V^*(-e^{-i\delta}) - \int_0^\infty \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 e^{-\pi t} \frac{sh \delta t}{ch \pi t} dt. \quad (2.14)$$

Das Integral rechts existiert für  $|\delta| < 2\pi$  und ist für  $\delta \rightarrow 0$  von der Größenordnung  $O(\delta)$ . Gemäß (2.10) und wegen (2.12) wird das Verhalten von  $V^*(\omega)$  mit  $\omega = e^{i(\pi-\delta)}$  für  $\delta \rightarrow +0$  durch

$$V^*(-e^{-i\delta}) = i \frac{\log \delta}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

beschrieben, also gilt nach (2.14)

$$N(\delta) = -\frac{\log \delta}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

was offenbar sofort den Grenzwert (1.1) zur Folge hat.

### 3. Über eine Gitterfunktion höherer Stufe

Der eben skizzierte Beweisgedanke führt zu einem allgemeineren Integralmittelwert, welcher (2.13) umfaßt. Hierzu definieren wir in Erweiterung zu (1.2) eine Funktion von vier komplexen Veränderlichen, gegeben durch die für  $\text{Re}(s_1 + s_2) > 2$  konvergente Doppelreihe

$$V\left(\begin{matrix} s_1 \\ \omega_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} s_2 \\ \omega_2 \end{matrix}\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (h + \omega_1 k)^{-s_1} (h + \omega_2 k)^{-s_2} \quad (3.1)$$

$$(|\operatorname{arc} \omega_1| < \pi, |\operatorname{arc} \omega_2| < \pi),$$

aus der sofort die Spiegelungseigenschaft ablesbar ist :

$$V(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^{-s_1} \omega_2^{-s_2} V\left(\frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}\right). \quad (3.2)$$

Spaltet man in der  $h, k$ -Ebene die Menge der Summationspunkte längs der Diagonale  $h = k$  auf in die beiden Gitteroktanten  $0 < h < k$  und  $0 < k < h$ , so ergibt sich für  $V$  bei Anwendung von (3.2) die Funktionalgleichung

$$(\omega_1 + 1)^{s_1} (\omega_2 + 1)^{s_2} V(\omega_1, \omega_2) = V\left(\frac{1}{\omega_1 + 1}, \frac{1}{\omega_2 + 1}\right) + V\left(\frac{\omega_1}{\omega_1 + 1}, \frac{\omega_2}{\omega_2 + 1}\right) + \zeta(s_1 + s_2). \quad (3.3)$$

Zur Herleitung einer Integraldarstellung für  $V$  benutzen wir (2.3) und erhalten aus (3.1) nach Ausführung der Doppelsummation mit der Einschränkung  $\operatorname{Re}(s_1, s_2) > 1$

$$\begin{aligned} & (2\pi i)^2 \Gamma(s_1) \Gamma(s_2) V\left(\begin{matrix} s_1 \\ \omega_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} s_2 \\ \omega_2 \end{matrix}\right) \\ &= \int_{(s_2/2)} d\tau \Gamma(\tau) \Gamma(s_2 - \tau) \omega^{-\tau} \int_{(s_1/2)} d\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(s_1 - \alpha) \zeta(\alpha + \tau) \zeta(s_1 + s_2 - \alpha - \tau) \omega^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Substituiert man  $\alpha = t - \tau$ ,  $d\alpha = dt$ , und ersetzt  $s_1, s_2, \omega_1, \omega_2$  durch

$$s_1 = u, s_2 = s - u, \omega_1 = \omega, \omega_2 = \omega z \quad (3.4)$$

so folgt mit  $\operatorname{Re} \left\{ \begin{matrix} u \\ s - u \end{matrix} \right\} > 1$

$$\left. \begin{aligned} & (2\pi i)^2 \Gamma(u) \Gamma(s - u) V\left(\begin{matrix} u \\ \omega \end{matrix} \middle| \begin{matrix} s - u \\ \omega z \end{matrix}\right) \\ &= \int_{(\frac{s}{2})} dt \zeta(t) \zeta(s - t) \omega^{-t} \int_{(\frac{s-u}{2})} d\tau \Gamma(\tau) \Gamma(t - \tau) \Gamma(s - u - \tau) \Gamma(u - t + \tau) z^{-\tau} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Innen steht ein Mellin-Barnessesches Integral, das nach [5] mit der hypergeometrischen Funktion verwandt ist. Es gilt für  $|\operatorname{arc} z| < \pi$

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(c)}{2\pi i} \int_w \Gamma(\tau) \Gamma(a - \tau) \Gamma(b - \tau) \Gamma(c - a - b + \tau) z^{-\tau} d\tau \\ &= \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c - a) \Gamma(c - b) F(a, b, c; 1 - z), \end{aligned}$$

wo der Weg  $W$  — von  $\lambda - i\infty$  nach  $\lambda + i\infty$  verlaufend ( $\lambda$  beliebig reell) — so gewählt sein muß, daß alle Polstellen von  $\Gamma(\tau) \Gamma(c - a - b + \tau)$  links und die von  $\Gamma(a - \tau) \Gamma(b - \tau)$  rechts des Weges liegen. Übertragen auf (3.5) ergibt sich dann mit (2.5) und den Bezeichnungen

$$a = t, \quad b = s - u, \quad c = s$$

für  $V$  die Integraldarstellung

$$V\left(\frac{u}{\omega} \middle| \frac{s-u}{\omega z}\right) = \frac{1}{2\pi i \Gamma(s)} \int_{\left(\frac{s}{2}\right)} \varphi(t) \varphi(s-t) F(t, s-u, s; 1-z) \omega^{-t} dt \quad (3.6)$$

$$(\operatorname{Re}(s) > 2, \left| \operatorname{arc} \left\{ \frac{\omega}{\omega z} \right\} \right| < \pi).$$

Auf die vorher gemachte Einschränkung bezüglich des Parameters  $u$  kann in (3.6) vermöge analytischer Fortsetzung verzichtet werden.

Wie schon im einfachen Fall, der für  $u = s$  — siehe (2.4) — oben mit einbezogen ist, so interessiert auch hier die gestufte Gittertranszendente zunächst in der Umgebung von  $s = 1$ . Dies erfordert nach früherem Vorbild bei Fortsetzung in den Streifen  $0 < \sigma < 2$  ein Ausweichen des Integrationsweges, der nach Überfahren der Polstellen  $t = 1, s - 1$  wieder zu einer Geraden gestrafft werden kann. Nennt man diese um zwei Residuen veränderte Funktion  $V^*$  — sie besitzt für  $0 < \sigma < 2$  formal dieselbe Integraldarstellung (3.6) — so gilt

$$V\left(\frac{u}{\omega} \middle| \frac{s-u}{\omega z}\right) = V^*\left(\frac{u}{\omega} \middle| \frac{s-u}{\omega z}\right) + \left. \begin{aligned} & \frac{\zeta(s-1)}{s-1} [\omega^{-1} F(1, s-u, s; 1-z) \\ & + \omega^{1-s} F(s-1, s-u, s; 1-z)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Im Hinblick auf unser späteres Vorhaben brauchen wir eine Entwicklung dieser hypergeometrischen Funktionen nach Potenzen von  $s-1$  unter genauer Kenntnis der ersten beiden Entwicklungsglieder. Im Prinzip läßt sich das Ergebnis nach dem Taylorschen Satz sofort hinschreiben; dies nützt jedoch nicht viel, da schon beim zweiten Term die Ableitung  $\frac{dF}{ds}$  nicht so ohne weiteres bekannt ist. Wir beschreiten deshalb einen anderen Weg und wenden auf (3.7) die Gaußsche Transformationsformel

$$F(a, b, c; 1-z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1; z) \\ + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} z^{c-a-b} F(c-a, c-b, c-a-b+1; z)$$

$$(a+b-c \neq 0(1), |\operatorname{arc} z| < \pi)$$

an. Wegen  $F(a, b, b; z) = (1-z)^{-a}$  ergibt sich dann

$$\left. \begin{aligned}
 V\left(\omega \left| \begin{matrix} u \\ s-u \\ \omega z \end{matrix} \right.\right) &= V^*\left(\omega \left| \begin{matrix} u \\ s-u \\ \omega z \end{matrix} \right.\right) \\
 &+ \varphi(s-1)(1-z)^{1-s} \left[ \frac{\Gamma(1-u)}{\Gamma(s-u)} \omega^{-1} z^{u-1} + \frac{\Gamma(u-s+1)}{\Gamma(u)} \omega^{1-s} \right] \\
 &+ \zeta(s-1) \left[ \frac{\omega^{-1}}{u-1} F(1, s-u, 2-u; z) + \frac{\omega^{1-s} z^{u-s+1}}{s-u-1} F(1, u, u-s+2; z) \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$(u \neq 0(1), u-s \neq 0(1)),$

woraus unter Benutzung der logarithmischen Ableitung der Gamma-Funktion

$$\phi(u) = \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} \quad (u \neq 0, -1, -2, \dots)$$

mit den Kürzungen

$$V^*\left(\omega \left| \begin{matrix} u \\ 1-u \\ \omega z \end{matrix} \right.\right) = V_u^*(\omega, z) \quad (3.9)$$

$$\phi(u) + \frac{z^u}{u} F(1, u, 1+u; z) = 2f_u(z) \quad (3.10)$$

die in der Umgebung von  $s=1$  geltende Entwicklung resultiert:

$$\left. \begin{aligned}
 V\left(\omega \left| \begin{matrix} u \\ s-u \\ \omega z \end{matrix} \right.\right) &= V_u^*(\omega, z) + f_u(z) + \omega^{-1} z^{u-1} f_{1-u}(z) + \frac{\log \omega}{2} \\
 &- \frac{1}{2} (1 + \omega^{-1} z^{u-1}) \left[ \frac{1}{s-1} + \Gamma'(1) + \log 2\pi - \log(1-z) \right] + O(s-1) \\
 &\left( u \neq 0(1), \left| \operatorname{arc} \left\{ \frac{\omega}{\omega z} \right\} \right| < \pi, \left| \operatorname{arc} \left\{ \frac{z}{1-z} \right\} \right| < \pi \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Die singulären Stellen  $u \equiv 0(1)$  der Funktionen  $f_u, f_{1-u}$  sind nur scheinbarer Natur. Es ist nämlich aus der hypergeometrischen Reihe sofort erkennbar:

$$\frac{z^u}{u} F(1, u, 1+u; z) = \begin{cases} \frac{1}{u+k} + O(1) & \text{für } u \rightarrow -k = 0, -1, -2, \dots \\ O(1) & \text{für } u \rightarrow k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Genau dasselbe Verhalten zeigt  $-\phi(u)$ , so daß nach (3.10) durchweg gilt:

$$f_u(z) = O(1) \quad \text{für } u \rightarrow g \quad (g \text{ beliebig ganz}),$$

also ist  $f_u(z)$  und damit auch  $f_{1-u}(z)$  für alle endlichen  $u$  beschränkt. Die Bedingung  $u \neq 0(1)$  in (3.11) kann deshalb eingespart werden.

#### 4. Verallgemeinerte Integralmittelwerte

Gemäß der Herleitung im einfachen Fall soll jetzt in die Funktionalgleichung (3.3) die oben erhaltene Entwicklung für  $V$  eingetragen werden. Dies

erfordert zunächst, (3.3) vermöge (3.4) auf die neuen Größen  $u, s, \omega, z$  umzuschreiben. Nach Ersetzen der  $V$ -Funktionen durch (3.11) und mit Rücksicht auf (2.9) stellt sich heraus, daß die singulären Anteile mit  $\frac{1}{s-1}$  wegfallen, so daß der Grenzübergang  $s \rightarrow 1$  ausführbar ist. Nach längerer Rechnung erhält man

$$\left. \begin{aligned} & (\omega+1)^u(\omega z+1)^{1-u}V_u^*(\omega, z) - V_u^*\left(\frac{1}{\omega+1}, \frac{\omega+1}{\omega z+1}\right) - V_u^*\left(\frac{\omega}{\omega+1}, \frac{\omega z+z}{\omega z+1}\right) \\ & = T_u(\omega, z) \cdot 2\Gamma'(1) - \log 2\pi i - \frac{\pi i}{2}(\omega+1)^u(\omega z+1)^{1-u} + \log\left(\frac{1}{\omega z+1} - \frac{1}{\omega+1}\right), \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

wobei  $T$  sich folgendermaßen aus Funktionen der Gestalt (3.10) zusammensetzt:

$$\left. \begin{aligned} T_u(\omega, z) = & -(\omega+1)^u(\omega z+1)^{1-u}[f_u(z) + \omega^{-1}z^{u-1}f_{1-u}(z)] \\ & + f_u\left(\frac{\omega+1}{\omega z+1}\right) + (\omega+1)^u(\omega z+1)^{1-u}f_{1-u}\left(\frac{\omega+1}{\omega z+1}\right) \\ & + f_u\left(\frac{\omega z+z}{\omega z+1}\right) + \left(\frac{\omega+1}{\omega}\right)^u \left(\frac{\omega z+1}{\omega z}\right)^{1-u} f_{1-u}\left(\frac{\omega z+z}{\omega z+1}\right) \\ & \left( \left| \arccos \left\{ \frac{\omega}{\omega+1} \right\} \right| < \pi, \left| \arccos \left\{ \frac{z}{1-z} \right\} \right| < \pi, |\arccos(\omega z+1)| < \pi \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Gleichung (4.1) existiert im gemeinsamen Holomorphiegebiet der in  $T_u(\omega, z)$  auftretenden sechs hypergeometrischen Funktionen.

Die Darstellung (4.1) ermöglicht jetzt eine Beurteilung von  $V_u^*(\omega, z)$  bei senkrechter Annäherung an  $\omega = -1$  aus der oberen Halbebene, denn dank der Funktionalgleichung sind durch die Argumenttransformationen die beiden anderen  $V^*$ -Terme in (4.1) leicht überblickbar. Es gilt vermöge (3.6)

$$\begin{aligned} I &= V_u^*\left(\frac{1}{\omega+1}, \frac{\omega+1}{\omega z+1}\right) + V_u^*\left(\frac{\omega}{\omega+1}, \frac{\omega z+z}{\omega z+1}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\left(\frac{1}{2}\right)} \varphi(t)\varphi(1-t)(\omega+1)^t \left[ F\left(t, 1-u, 1; 1 - \frac{\omega+1}{\omega z+1}\right) \right. \\ & \quad \left. + \omega^{-t} F\left(t, 1-u, 1; 1 - \frac{\omega z+z}{\omega z+1}\right) \right] dt. \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz (2.11), der einer Bewegung längs eines Kreisbogens mit senkrechter Einmündung in  $\omega = -1$  entspricht, findet man wegen

$$F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \text{Re}(c-a-b) > 0$$

für das Integral die Betragschätzung:

$$I = O\left\{ \sqrt{\delta} \int_{\left(\frac{1}{2}\right)} \left| \zeta(t)\zeta(1-t)\Gamma(t)\Gamma(u-t) \cos \frac{\pi t}{2} \right| |dt| \right\}, \quad (4.3)$$



wo  $u$  auf das Gebiet

$$\operatorname{Re}(u) > \frac{1}{2} \tag{4.4}$$

eingeschränkt ist. Da  $\zeta(t)$  längs vertikaler Geraden höchstens wie eine Potenz wächst und  $\Gamma(t)$  mit  $t = \lambda + i\tau$  nach Stirling für großen Imaginärteil exponentiell klein wird, so verhält sich der Integrand asymptotisch für  $|\tau| \rightarrow \infty$  bei nur von  $\lambda$  abhängigem  $k > 0$  wie

$$O(|\tau|^k e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|}).$$

Damit konvergiert das Integral in (4.3) absolut und  $I$  verschwindet für  $\delta \rightarrow 0$  von der Ordnung  $O(\sqrt{\delta})$ .

Das Verhalten von  $T_u(\omega, z)$  für  $\omega \downarrow -1$  kann — die Bedingung (4.4) voraussetzend — aus (4.2) in Verbindung mit (3.10) gegeben werden zu

$$T_u(\omega, z) = O(1).$$

Auch die übrigen Summanden rechter Hand in (4.1) sind — mit Ausnahme des letzten — für  $\omega \downarrow -1$  beschränkt. Dividiert man jetzt Gleichung (4.1) durch  $(\omega z + 1)^{1-u} \log(\omega + 1)$  und vollzieht den Grenzübergang  $\omega \downarrow -1$ , so entsteht

$$\lim_{\omega \downarrow -1} \left\{ \frac{(\omega + 1)^u}{\log(\omega + 1)} V_u^*(\omega, z) \right\} = -(1-z)^{u-1} \quad (|\operatorname{arc}(1-z)| < \pi).$$

Bei leichter Bezeichnungsänderung

$$u = 1 - \nu, \quad z = 1 - x \tag{4.5}$$

erhält man hieraus die in  $\nu$  und  $x$  identisch geltende Aussage

$$\lim_{\omega \downarrow -1} \left\{ \frac{(\omega + 1)^{1-\nu}}{\log(\omega + 1)} \int_{(\frac{1}{2})} \varphi(t)\varphi(1-t)F(t, \nu, 1; x)\omega^{-t} dt \right\} = -\frac{2\pi i}{x^\nu} \tag{4.6}$$

$$\left( \operatorname{Re}(\nu) < \frac{1}{2}, \quad |\operatorname{arc} x| < \pi \right),$$

welche inhaltlich als eine Wachstumseigenschaft der Riemannschen Funktion  $\zeta(t)$  für  $\operatorname{Re}(t) = \frac{1}{2}$  verstanden werden kann. Satz 1 ist damit vollständig bewiesen.

Für den Sonderfall  $x = 1, \nu = 1 - u$  lautet der integrale Mittelwert

$$\lim_{\omega \downarrow -1} \left\{ \frac{(\omega + 1)^u}{\log(\omega + 1)} \int_{(\frac{1}{2})} \varphi(t)\zeta(1-t)\Gamma(u-t)\omega^{-t} dt \right\} = -2\pi i\Gamma(u)$$

$$\left( \operatorname{Re}(u) > \frac{1}{2} \right).$$

Abschließend wollen wir noch das in Satz 1 formulierte Ergebnis direkt an (1.1) angleichen. Wir definieren hierzu für positives  $\delta$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\infty \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 e^{-\delta t} \left[ e^{\pi t} F\left(\frac{1}{2} + it, 1-u, 1; 1-z\right) \right. \\ & \left. + e^{-\pi t} F\left(\frac{1}{2} - it, 1-u, 1; 1-z\right) \right] \frac{dt}{ch(\pi t)} = N_u(\delta, z) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

sowie für  $|\delta| < 2\pi$

$$\int_0^\infty \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 e^{-\pi t} \frac{sh(\delta t)}{ch(\pi t)} F\left(\frac{1}{2} - it, 1-u, 1; 1-z\right) dt = M_u(\delta, z). \quad (4.8)$$

Dann besteht, wie eine leichte Umrechnung zeigt, mit  $V_u^*(\omega, z)$  für  $\omega = e^{i(\pi-\delta)}$ ,  $0 < \delta < \pi$ , der Zusammenhang

$$N_u(\delta, z) = ie^{-\frac{i\delta}{2}} V_u^*(-e^{-i\delta}, z) - M_u(\delta, z). \quad (4.9)$$

Aus (4.8) entnimmt man  $M_u(\delta, z) = O(\delta)$ , während  $V_u^*$  zufolge (4.1) für  $\delta \rightarrow +0$  von der Größenordnung ist:

$$V_u^*(-e^{-i\delta}, z) = -\frac{\log \delta}{1-z} \left(\frac{1-z}{i\delta}\right)^u + O(\delta^{-u}).$$

Insgesamt ergibt sich damit aus (4.9)

$$\frac{\delta^u}{\log \delta} N_u(\delta, z) = -\left(\frac{1-z}{i}\right)^{u-1} + O\left(\frac{1}{\log \delta}\right),$$

was nach Einführung der Parameter  $\nu$  und  $x$  gemäß (4.5) und der Zweigfixierung  $-\frac{3\pi}{2} < \arcsin(-ix) < \frac{\pi}{2}$  Anlaß gibt zu dem

SATZ 2. Es sei  $K(\nu, x; t)$  der hypergeometrische Kern

$$K(\nu, x; t) = \frac{e^{\pi t} F\left(\frac{1}{2} + it, \nu, 1; x\right) + e^{-\pi t} F\left(\frac{1}{2} - it, \nu, 1; x\right)}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}},$$

und es gelte

$$\operatorname{Re}(\nu) < \frac{1}{2}, \quad -\frac{3\pi}{2} < \arcsin \frac{x}{i} < \frac{\pi}{2}.$$

Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left\{ \frac{\delta^{1-\nu}}{\log \delta} \int_0^\infty \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 K(\nu, x; t) e^{-\delta t} dt \right\} = -\left(\frac{i}{x}\right)^\nu,$$

wo  $\zeta(s)$  die für  $s \neq 1$  erklärte Riemannsche Zeta-Funktion ist.

Der Integralmittelwert (1.1) von Hardy-Atkinson ist für  $\nu = 0$  hierin enthalten.

**Literatur**

- [ 1 ] F. V. Atkinson, The mean value of the zeta function on the critical line, *Quart. J. Math.*, 10 (1939), 122-128.
  - [ 2 ] H. J. Glaeske, Funktionen linearer und ebener Zahlengitter, Diplomarbeit, Jena, 1957.
  - [ 3 ] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Contributions to the theory of the Riemann zeta function and the theory of the distribution of primes, *Acta Math.*, 41 (1918), 151.
  - [ 4 ] W. Maier, Gitterfunktionen der Zahlenebene, *Math. Ann.*, 113 (1936), 363-379.
  - [ 5 ] Whittaker-Watson, A course of modern analysis, Cambridge, 1927, 290.
-