J. Math. Soc. Japan
Vol. 19, No. 4, 1967

Représentations unitaires du groupe des déplacements dans un plan $\mathfrak{p}$-adique

Hommage à Monsieur S. Iyanaga pour son soixantième anniversaire

Par Masahiko SAITO

(Reçu le 13 déc., 1966)

Introduction.

L'origine de ce travail se trouve dans le désir d'étendre au cas $\mathfrak{p}$-adique des résultats de Vilenkin [7] sur les fonctions de Bessel et les représentations unitaires du groupe des déplacements dans le plan euclidien. Vilenkin a construit les représentations unitaires irréductibles du groupe, a montré que les " coefficients matriciels " de ces représentations par rapport à une base naturelle sont exprimés par les fonctions de Bessel d'indices entiers et a déduit, de ce point de vue, des propriétés principales des fonctions de Bessel.

On considérera dans ce mémoire un corps $\mathfrak{p}$-adique K $(p \neq 2)$ et une extension quadratique ramifiée L de K. Le groupe des éléments de L à norme 1 opère sur L par multiplication et admet un sous-groupe N_0 d'indice 2. Le produit semi-direct G_0 du groupe additif L par N_0 s'appellerait le groupe des déplacements dans le plan $\mathfrak{p}$-adique ramifié.

On construira dans le § 2 les représentations unitaires irréductibles U^ρ $(\rho \in L,\ \rho \neq 0)$ de G_0 et introduira la " fonction de Bessel $\mathfrak{p}$-adique d'indice χ ":

$$J_\chi(z) = \int_{N_0} E(zn)\overline{\chi(n)}dn$$

où $z \in L$, χ est un caractère de N_0 et E est un caractère unitaire de L. Les représentations U^ρ sont toutes de classe 1 par rapport à N_0 et la fonction sphérique zonale associée à U^ρ se trouvera être $J_1(\rho z)$. On déterminera ensuite l'espace et la mesure de Plancherel au sens de Godement [1] et obtiendra une formule analogue à la formule de Fourier-Bessel (Théorème 1).

Le § 3 sera consacré au calcul des fonctions de Bessel. La fonction de Bessel d'indice 1 sera exprimée à l'aide d'une somme de Gauss du corps des restes de K (Théorème 2). Le Théorème 3 présentera un résultat à mi-chemin du calcul des fonctions de Bessel d'indices non-triviaux.

Les résultats essentiels de ce travail ont déjà été annoncés dans [5].

Après l'annonce des résultats, Monsieur Paul J. Sally Jr. [6] a obtenu d'un point de vue différent des résultats très analogues aux nôtres et m'en a bien communiqué. Ma méthode originale n'ayant été valable que dans le cas où la caractéristique de K est 0, j'ai, suggéré par la méthode de Sally, à nouveau formulé la théorie dans une forme indifférente à la caractéristique de K. Je tiens ici à exprimer ma gratitude à Monsieur Sally pour sa bonté et ses suggestions très utiles.

§1. Préliminaires.

1°. Soit K un corps localement compact, totalement discontinu et non-discret. Désignons par dx une mesure de Haar du groupe additif K. Pour tout élément non-nul a de K, on définit la valeur absolue $|a|$ par la formule $d(ax)=|a|dx$. On pose $|0|=0$. Soient $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de $K:\{x\in K;\ |x|\leqq 1\}$, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathfrak{o}:\{x\in K;\ |x|<1\}$ et $\mathfrak{u}$ le groupe des unités de $K:\{x\in K;\ |x|=1\}$. Soit t un générateur de $\mathfrak{p}$. Alors $|t|=q^{-1}$ où q est le nombre d'éléments du corps des restes $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. On suppose dans tout ce travail que la caractéristique p de $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ est impaire.

On normalise la mesure de Haar dx de telle sorte que la masse totale de $\mathfrak{o}$ soit égale à 1.

2°. Soit τ une racine carrée de t. Alors $L=K(\tau)$ est une des deux extensions quadratiques ramifiées de K. Il existe encore une extension quadratique non-ramifiée qu'on ne traite pas ici.

Désignons par dz une mesure de Haar du groupe additif L. Pour tout élément non-nul α de L, on définit la valeur absolue $|\alpha|$ par la formule $d(\alpha z)=|\alpha|^2 dz$, $|\alpha|>0$. On pose $|0|=0$. Soient $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers de $L:\{z\in L;\ |z|\leqq 1\}$ et $\mathfrak{P}=\tau\mathfrak{O}$. On normalise la mesure de Haar dz de telle sorte que la masse totale de $\mathfrak{O}$ soit égale à 1.

3°. Pour un élément $z=x+\tau y$ $(x, y\in K)$ dans L, l'élément $\bar{z}=x-\tau y$ s'appelle le *conjugué* de z. L'élément $z\bar{z}$ est dans K et s'appelle la *norme* de z. Soit N le group compact multiplicatif des éléments z de L tels que $z\bar{z}=1$. Posons $N_0=N\cap(1+\mathfrak{P})$. Alors N_0 est un sous-groupe d'indice 2 dans N. Désignons par dn la mesure de Haar de N_0 telle que la masse totale soit égale à 1.

Posons $\Gamma=K^*\cup\tau K^*$ où K^* est le groupe multiplicatif des éléments non-nuls de K. Soit r un élément générique de Γ. Définissons la mesure dr sur Γ comme suit: si $r\in K$, dr est la mesure de Haar normalisée de K et si $r=\tau y$ $(y\in K)$, on pose $dr=q^{-1/2}dy$ où dy est la mesure de Haar normalisée de K. Alors $|r|^{-1}dr$ est une mesure de Haar du groupe multiplicatif Γ.

PROPOSITION 1. *Le groupe multiplicatif L^* des éléments non-nuls de L se décompose en produit direct de Γ et $N_0: L^*=\Gamma N_0$, $\Gamma\cap N_0=1$. On a en plus la décomposition de mesure $dz=|r|dr\,dn$ où $z=rn$ est un élément générique de L^*.*

DÉMONSTRATION. L'égalité $\Gamma\cap N_0=\{1\}$ est évidente. Soit z un élément de L^*. Si $z\bar{z}$ est carré dans K, il existe un élément x de K^* tel que $x^{-1}z$

appartienne à N_0. Si $z\bar{z}$ est non-careé dans K^*, il existe un élément y dans K^* tel que $z\bar{z}=-ty^2$ et que $\tau^{-1}y^{-1}z$ appartienne à N_0, d'où $L^*=\Gamma N_0$.

La mesure $|r|^{-1}dr\,dn$ est une mesure de Haar de L^* et la masse totale du groupe des unités $\mathfrak{O}-\mathfrak{P}$ est égale à $1-q^{-1}$. On a donc $|z|^{-2}dz=|r|dr\,dn$, d'où $dz=|r|dr\,dn$.

4°. Soit e un caractère unitaire du groupe additif K qui est trivial sur $\mathfrak{o}$ et non-trivial sur $\mathfrak{p}^{-1}$. On sait bien que les caractères $x\to e(ax)$ $(a\in K)$ épuisent tous les caractères unitaires de K.

Définissons le caractère unitaire E du groupe additif L par la formule

$$E(z)=e(\tau^{-1}z+\overline{\tau^{-1}z})=e(2y)$$

où $z=x+\tau y$ $(x,\ y\in K)$. Alors E est trivial sur $\mathfrak{O}$ et non-trivial sur $\mathfrak{P}^{-1}$. Les caractères $z\to E(\alpha z)$ $(\alpha\in L)$ épuisent tous les caractères unitaires de L. La forme bilinéaire sur $L:(z,w)\to E(zw)$ fournit une auto-dualité de L.

REMARQUE. Le caractère e peut, par exemple, se choisir comme suit. Le corps K est une extension de degré fini du corps F, où F est le corps des nombres p-adiques $\mathbf{Q}_p$ si la caractéristique de K est 0, et est le corps de séries formelles $F_p((X))$ à coefficients dans le corps premier F_p à p éléments si la caractéristique de K est p. Soit $\mathfrak{d}$ la différente de K par rapport à F et posons $\mathfrak{d}=\mathfrak{p}^d$. Désignons par $Tr\ x$ $(x\in K)$ la trace de x relative à K et F. Si la caractéristique de K est 0, on peut poser

$$e(x)=\exp 2\pi i\{Tr\ t^{-d}x\}$$

où $\{a\}$ est la partie fractionnaire de $a\in\mathbf{Q}_p$. Si la caractéristique de K est p, on peut poser

$$e(x)=\exp\frac{2\pi i}{p}\{Tr\ t^{-d}x\}$$

où $\{a\}$ est le résidu (coefficient de X^{-1}) de $a\in F_p((X))$.

§ 2. Représentations unitaires et la formule de Plancherel du groupe des déplacements dans le plan $\mathfrak{p}$-adique ramifié.

Le groupe N opère sur L par multiplication. Soit G le produit semi-direct du groupe additif L par N. Le sous-groupe $G_0=N_0\cdot L$ est d'indice 2 dans G et s'appellerait le *groupe des déplacements dans le plan $\mathfrak{p}$-adique ramifié.* Le groupe G_0 s'identifie au groupe des matrices de la forme

$$g=\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & n\end{pmatrix};\ n\in N_0,\ z\in L\,.$$

Pour un élément non-nul ρ de L, E_ρ désigne le caractère de $L:z\to E(\rho z)$. La représentation unitaire $(\mathcal{H},\ U^\rho)$ de G_0 induite du caractère E_ρ de L est définie dans l'espace hilbertien $\mathcal{H}=L^2(N_0)$ des fonctions sur N_0 de carré intégrable par rapport à la mesure de Haar dn et est de la forme suivante:

$$(U^{\rho}_{g_0}f)(n)=E(\rho z_0 n_0^{-1}n^{-1})f(nn_0)$$

où $f\in\mathcal{H}$, $n\in N_0$ et $g_0=\begin{pmatrix}1 & z_0\\ 0 & n_0\end{pmatrix}\in G_0$, $n\in N_0$.

La théorie générale de Mackey ([2], [3]) nous assure que ces représentations U^{ρ} sont toutes irréductibles, que deux représentations U^{ρ} et U^{σ} sont unitairement équivalentes si et seulement si $\rho^{-1}\sigma$ appartient à N_0 et que ces représentations U^{ρ}, avec les représentations de dimension 1, épuisent toutes les représentations unitaires irréductibles de G_0. Pour faciliter la lecture, nous traiterons ci-dessous par une méthode directe le problème d'irréductibilité et d'équivalence dont nous aurons besoin dans la suite.

Remarquons d'abord que les fonctions $f=c\chi (c\in\mathbf{C})$, χ étant un caractère de N_0, sont les seuls vecteurs dans $\mathcal{H}$ tels qu'on ait

$$U^{\rho}_n f=\chi(n)f$$

pour tout $n\in N_0$.

DÉFINITION. Posons pour un caractère χ du groupe N_0

$$J_{\chi}(z)=\int_{N_0}E(zn)\overline{\chi(n)}dn \qquad (z\in L)\,.$$

La fonction J_{χ} sur L s'appellerait la *fonction de Bessel* $\mathfrak{p}$*-adique d'indice* χ. Ces fonctions peuvent s'interpréter comme coefficients de la série de Fourier de la fonction génératrice $E(zn)$ $(z\in L,\ n\in N_0)$:

$$E(zn)=\sum_{\chi}J_{\chi}(z)\chi(n)$$

où χ parcourt les caractères de N_0.

PROPOSITION 2. *La représentation* $(\mathcal{H},\ U^{\rho})$ *est irréductible.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{H}_1$ la clôture dans $\mathcal{H}$ du sous-espace invariant engendré par $\mathbf{1}$. Alors $\mathcal{H}_1$ est irréductible. Soit en effet A un opérateur borné de $\mathcal{H}_1$ qui commute avec tous les opérateurs U^{ρ}_g $(g\in G)$. On a d'abord $U^{\rho}_n A\mathbf{1}=AU^{\rho}_n\mathbf{1}=A\mathbf{1}$ pour tout $n\in N_0$. On a donc $A\mathbf{1}=c\mathbf{1}$ $(c\in\mathbf{C})$. Pour un élément g dans G, on a

$$AU^{\rho}_g\mathbf{1}=U^{\rho}_g A\mathbf{1}=cU^{\rho}_g\mathbf{1}\,.$$

Comme les vecteurs $U^{\rho}_g\mathbf{1}$ engendrent linéairement un sous-espace partout dense dans $\mathcal{H}_1$, A est un opérateur scalaire, d'où résulte que $\mathcal{H}_1$ est irréductible.

Soit ensuite P le projecteur de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_1$. Pour un caractère χ de N_0, il y a deux possibilités: $P\chi=\chi$ ou $P\chi=0$. Il suffit alors de montrer que $P\chi=\chi$ pour tout χ.

Supposons qu'il y ait un caractère χ tel que $P\chi=0$. Soient $\hat{N}_0$ le groupe dual de N_0 et $\hat{\mathscr{H}}=L^2(\hat{N}_0)$. Considérons la représentation $(\hat{\mathscr{H}}, \hat{U}^\rho)$ donnée par la formule

$$\hat{U}_g^\rho \hat{f}(\omega)=\widehat{U_g^\rho f}(\omega)=\int_{N_0} U_g^\rho f(n)\overline{\omega(n)}dn$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de $f \in \mathscr{H}$ et ω un caractère de N_0. Elle est alors unitairement équivalente à $(\mathscr{H}, U^\rho)$. Pour un élément n_0 dans N_0, on a

$$\hat{U}_{n_0}^\rho \hat{f}(\omega)=\int_{N_0} f(nn_0)\overline{\omega(n)}dn=\omega(n_0)\hat{f}(\omega).$$

Par conséquent, l'opérateur $\hat{P}: \hat{P}\hat{f}(\omega)=\widehat{Pf}(\omega)$ commute avec l'operateur de multiplication par tout caractère $n_0: \omega \to \omega(n_0)$ de $\hat{N}_0$. Il existe donc une fonction bornée $a(\omega)$ sur $\hat{N}_0$ telle qu'on ait $\hat{P}\hat{f}(\omega)=a(\omega)\hat{f}(\omega)$ pour toute $\hat{f}$ dans $\hat{\mathscr{H}}$*).

On a en particulier

$$a(\mathbf{1})=a(\mathbf{1})\hat{\mathbf{1}}(\mathbf{1})=\hat{P}\hat{\mathbf{1}}(\mathbf{1})=\widehat{P\mathbf{1}}(\mathbf{1})=\hat{\mathbf{1}}(\mathbf{1})=1.$$

Pour un élément g dans G_0 de la forme $\begin{pmatrix}1 & z \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, on a les égalités

$$\hat{U}_g^\rho \hat{\chi}(\mathbf{1})=\int_{N_0} E(\rho z n^{-1})\chi(n)\overline{\mathbf{1}(n)}dn=J_\chi(\rho z),$$

$$\hat{P}\hat{U}_g^\rho \hat{\chi}(\mathbf{1})=a(\mathbf{1})\hat{U}_g^\rho \hat{\chi}(\mathbf{1})=J_\chi(\rho z),$$

$$\hat{U}_g^\rho \hat{P}\hat{\chi}(\mathbf{1})=0.$$

La fonction J_χ serait donc identiquement 0, ce qui contredit le Théorème 3 dans le § 3. La Proposition 2 est donc démontrée.

COROLLAIRE. *Toute représentation U^ρ ($\rho \in L^*$) est de classe 1 par rapport à N_0 et la fonction sphérique zonale Φ^ρ de G_0 associée à U^ρ est de la forme suivante:*

$$\Phi^\rho(z)=J_1(\rho z) \qquad (z \in L).$$

PROPOSITION 3. *Pour que deux représentations U^ρ et U^σ soient unitairement équivalentes, il faut et il suffit que $\rho^{-1}\sigma$ appartienne à N_0.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord $\sigma=\rho m$, $m \in N_0$. Alors l'operateur A de $\mathscr{H}$ donné par la formule

$$Af(n)=f(nm^{-1}) \qquad (f \in \mathscr{H})$$

est un opérateur unitaire de $\mathscr{H}$ satisfaisant à l'égalité $AU_g^\rho=U_g^\sigma A$ pour tout g dans G_0.

---

*) Ceci est bien connu, mais il me semble que sa démonstration complète ne se trouve dans aucune littérature. On en a donc mis, à toutes fins utiles, une démonstration à la fin de ce memoire (Lemme 6).

Supposons réciproquement que U^ρ et U^σ soient unitairement équivalentes. On a alors $J_1(\rho z)=J_1(\sigma z)$ pour tout z dans L. L'analyse simple du Théorème 2 dans le § 3 entraîne que $\rho^{-1}\sigma$ appartient à N_0 et démontre la Proposition 3.

On donnera ci-dessous la formule de Plancherel pour G_0 au sens de Godement [1] et en néduira une formule analogue à la formule de Fourier-Bessel.

DÉFINITION. Une fonction f sur L est dite *radiale* si l'on a $f(zn)=f(z)$ pour tout n dans N_0.

Une fonction radiale peut s'identifier à une fonction sur $\Gamma\cup\{0\}$, ou aussi à une fonction sur G_0 bi-invariante par N_0.

Pour une bonne fonction f sur L, sa *transformée de Fourier* $\hat{f}$ est, par définition, une fonction sur L définie par la formule

$$\hat{f}(w)=\int_L f(z)\overline{E(zw)}dz\,.$$

Grâce au choix du caractère $E(z)$, on a la formule d'inversion

$$f(z)=\int_L \hat{f}(w)E(zw)dw\,.$$

Soit f une fonction continue radiale à support compact. On a alors, vu la Proposition 1,

$$\begin{aligned}\hat{f}(w)&=\int_L f(z)\overline{E(zw)}dz=\int_\Gamma f(r)\Big[\int_{N_0}\overline{E(rnw)}dn\Big]|r|\,dr\\&=\int_\Gamma f(r)\overline{J_1(rw)}|r|\,dr\,.\end{aligned}$$

La fonction J_1 étant radiale et tendant vers 0 à l'infini, il en est de même de la fonction $\hat{f}$:

$$\hat{f}(s)=\int_\Gamma f(r)\overline{J_1(rs)}|r|\,dr \qquad (s\in\Gamma)\,.$$

D'où

$$f(0)=\int_L \hat{f}(w)dw=\int_\Gamma \hat{f}(s)|s|\,ds\,.$$

THÉORÈME 1. *L'espace Γ est considéré comme espace de Plancherel et la mesure $|r|dr$ sur Γ est la mesure de Plancherel au sens de Godement* [1] *pour G_0 et N_0. En plus, pour une fonction continue à support compact sur Γ, la formule suivante a lieu:*

$$f(r_0)=\int_\Gamma\int_\Gamma f(r)\overline{J_1(rs)}J_1(r_0s)|r|\,|s|\,drds\,.$$

La première moitié a déjà été démontrée. Considérons les fonctions radiales comme fonctions sur G_0 bi-invariantes par N_0 et posons

$$\varphi(g)=\int_{N_0} f(gng_0)dn\,.$$

La fonction φ est continue, à support compact et bi-invariante par N_0. Vu la positivité et l'équation fonctionnelle pour les fonctions $\Phi^s(g)=J_1(rs)$:

$$\Phi^s(g^{-1})=\overline{\Phi^s(g)},\quad \int_{N_0}\Phi^s(g_1ng_2)dn=\Phi^s(g_1)\Phi^s(g_2)\,,$$

on a

$$\tilde{\varphi}(s)=\int_\Gamma \varphi(r)\overline{J_1(rs)}\,|r|\,dr=\int_{G_0}\varphi(g)\overline{\Phi^s(g)}dg=\int_{G_0}\int_{N_0} f(gng_0)\overline{\Phi^s(g)}dndg$$

$$=\int_{G_0}\int_{N_0} f(gng_0n^{-1})\overline{\Phi^s(g)}dndg=\int_{G_0}\int_{N_0} f(g')\overline{\Phi^s(g'ng_0{}^{-1}n^{-1})}dndg'$$

$$=\int_{G_0} f(g)\overline{\Phi^s(g)}\Phi^s(g_0)dg=\int_\Gamma f(r)\overline{J_1(r_0s)}J_1(r_0s)\,|r|\,dr\,;$$

d'où

$$f(r_0)=f(g_0)=\varphi(e)=\varphi(0)=\int_\Gamma\tilde{\varphi}(s)\,|s|\,ds=\int_\Gamma\int_\Gamma f(r)\overline{J_1(rs)}J_1(r_0s)\,|r|\,|s|\,drds$$

ce qui démontre le Théorème. La technique utilisée ici est d'un caractère tout à fait général. On ne s'est servi que de l'unimodularité de G_0 et de la commutativité de l'algèbre par convolution des fonctions continues, à support compact et bi-invariantes par N_0.

§ 3. Calcul des fonctions de Bessel.

DÉFINITION. Soit k un nombre naturel. Désignons par N_k l'ensemble des éléments dans N_0 de la forme $1+t^{2k+1}a+\tau t^k b$ $(a, b\in\mathfrak{o})$.

LEMME 1. *L'ensemble N_k $(k>0)$ est identique à chacun des ensembles suivants:*

a) $N_0\cap(1+\mathfrak{P}^{2k})$

b) $N_0\cap(1+\mathfrak{P}^{2k+1})$

c) $\{n\in N_0\,;\ n=1+a'+\tau t^k b\quad (a', b\in\mathfrak{o})\}$

d) $\{n\in N_0\,;\ n=1+t^{2k+1}a+\tau b'\quad (a, b'\in\mathfrak{o})\}$.

En particulier, N_k est un sous-groupe ouvert de N_0.

DÉMONSTRATION. On a évidemment

$$N_k\subset N_0\cap(1+\mathfrak{P}^{2k+1})\subset N_0\cap(1+\mathfrak{P}^{2k})\,.$$

Prenons un élément $n=1+t^ka'+\tau t^kb'$ $(a', b'\in\mathfrak{o})$ dans $N_0\cap(1+\mathfrak{P}^{2k})$. Puisque $n\bar{n}=1$, on a l'égalité $2a'+t^ka'^2-t^{k+1}b'^2=0$, d'où $a'\in\mathfrak{p}^k$, et par conséquent $a'\in\mathfrak{p}^{2k+1}$. On a donc $N_k\supset N_0\cap(1+\mathfrak{P}^{2k})$.

Soit ensuite $n=1+a'+\tau t^k b$ ($a'\in\mathfrak{p}$, $b\in\mathfrak{o}$) dans N_0. On a alors $2a'+a'^2-t^{2k+1}b^2=0$. Puisque $a'\in\mathfrak{p}$, on a $a'\in\mathfrak{p}^2$. En procédant successivement, on atteint à avoir $a'\in\mathfrak{p}^{2k+1}$. Soit finalement $n=1+t^{2k+1}a+\tau b'\in N_0$ (a, $b'\in\mathfrak{o}$). On a alors $2t^{2k}a+t^{4k+1}a^2-b'^2=0$, ce qui implique que $b'\in\mathfrak{p}^k$, et démontre le Lemme.

LEMME 2. *Soit k un entier non-negatif de écrivons un élément n de N_k sous la forme $1+t^{2k+1}a+\tau t^k b$ (a, $b\in\mathfrak{o}$). Alors l'application $n\to b$ est une bijection de N_k sur $\mathfrak{o}$ et applique N_{k+1} sur $\mathfrak{p}$. En particulier, N_{k+1} est d'indice q dans N_k. On a en plus* $2a\equiv b^2 \pmod{\mathfrak{p}}$.

DÉMONSTRATION. Rappelons qu'un élément x dans $1+\mathfrak{p}^l$ (l étant un nombre naturel) admet une seule racine carrée dans $1+\mathfrak{p}^l$, que l'on désignera par $x^{1/2}$. L'égalité $n\bar{n}=1$ équivaut à l'égalité $2a+t^{2k+1}a^2-b^2=0$, d'où $2a\equiv b^2$ (mod $\mathfrak{p}$). Cette égalité, comme équation quadratique on a, admet, pour tout b donné dans $\mathfrak{o}$, une seule solution dans $\mathfrak{o}$:

$$a=t^{-2k-1}[-1+(1+t^{2k+1}b)^{1/2}].$$

Donc l'application $n\to b$ est bijective, et applique N_{k+1} sur $\mathfrak{p}$ en vertu du Lemme 1, c). Le Lemme 2 est donc démontré.

Calculons d'abord la fonction de Bessel d'indice 1:

$$J_1(z)=\int_{N_0}E(zn)dn.$$

Cette fonction étant radiale, il suffit de calculer $J_1(z)$ pour $z\in\Gamma\cup\{0\}$.

THÉORÈME 2. *Pour $z\in K$, on a*

$$J_1(z)=\begin{cases}1 & si\ z\in\mathfrak{o},\\ 0 & si\ z\notin\mathfrak{o}.\end{cases}$$

Pour $z=\tau y$ ($y\in K$) dans τK, on a

$$J_1(z)=\begin{cases}1 \quad si\ y\in\mathfrak{o},\\ q^{-l}E(z) \quad si\ |y|=q^{2l+1},\ l\geqq 0,\\ q^{-l}E(z)G(q,u) \quad si\ |y|=q^{2l},\ l>0;\end{cases}$$

où, dans la dernière ligne, $y=t^{-2l}u$ ($u\in\mathfrak{u}$) et $G(q,u)$ est une somme de Gauss du corps des restes $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$:

$$G(q,u)=\sum_{b\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}}e(t^{-1}ub^2).$$

DÉMONSTRATION. Soit d'abord z un élément de $\mathfrak{O}$. Alors $E(zn)=1$ pour tout $n\in N_0$, d'où $J_1(z)=1$.

Supposons ensuite que $z\in K$, $z\notin\mathfrak{o}$ et posons $z=t^{-k}u$ ($k>0$, $u\in\mathfrak{u}$). On a alors

$$J_1(z)=\int_{N_0} E(t^{-k}un)dn = q^{-k}\sum_{n\in N_0 \bmod N_k} E(t^{-k}un)\,.$$

Cas $k=1$. $J_1(z)=q^{-1}\sum_{n\in N_0 \bmod N_1} E(t^{-1}un)$

$$=q^{-1}\sum_{b\in \mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e(t^{-1}2ub)=0\,,$$

où on a écrit $n=1+ta+\tau b$ $(a, b\in\mathfrak{o})$.

Cas $k>1$. $J_1(z)=q^{-k}\sum_{n\in N_0 \bmod N_{k-1}}\ \sum_{m\in N_{k-1} \bmod N_k} E(t^{-k}unm)\,.$

Ecrivons $m=1+t^{2k-1}c+\tau t^{k-1}d$ $(c, d\in\mathfrak{o})$. On a alors

$$\sum_{m\in N_{k-1} \bmod N_k} E(t^{-k}unm)=E(t^{-k}un)\sum_{d\in \mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e(t^{-1}2ud)=0\,,$$

d'où $J_1(z)=0$.

Soit ensuite $z=\tau y$ $(y\in K,\ y\notin\mathfrak{o})$ et posons $y=t^{-k}u$ $(k>0,\ u\in\mathfrak{u})$. On a comme ci-dessus

$$J_1(z)=q^{-k}\sum_{n\in N_0 \bmod N_k} E(zn)\,.$$

Cas $k=1$. $J_1(z)=q^{-1}\sum_{n\in N_0 \bmod N_1} E(t^{-1}un)=E(z)\,.$

Cas $k>1$. L'égalité

$$\sum_{m\in N_{k-1} \bmod N_k} E(znm)=qE(zn)$$

entraîne la formule

$$J_1(z)=q^{1-k}\sum_{n\in N_0 \bmod N_{k-1}} E(zn)\,.$$

Mettons un Lemme.

LEMME 3. *Soient $0\leqq i<j$, $i+j=k-1$. On a alors les formules suivantes:*

$$\sum_{n\in N_i \bmod N_j} E(zn)=\begin{cases} E(z)G(q, u) & \text{si } i+1=j\,,\\ qE(z) & \text{si } i+2=j\,,\\ q\sum_{n\in N_{i+1} \bmod N_{j-1}} E(zn) & \text{si } i+2<j\,.\end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Ecrivons $n=1+t^{2i+1}a+\tau t^i b$ $(a, b\in\mathfrak{o})$.

a) $i+1=j$. $\sum_{n\in N_i \bmod N_j} E(zn)=E(z)\sum_{n\in N_i \bmod N_j} e(t^{-1}2ua)$

$$=E(z)\sum_{b\in \mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e(t^{-1}ub^2)=E(z)G(q, u)\,.$$

Supposons que $i+2\leqq j$. Soit m un élément générique de $N_{j-1} \bmod N_j$ et écrivons $m=1+t^{2j-1}c+\tau t^{j-1}d$ $(c, d\in\mathfrak{o})$. On a alors

$$\sum_{m\in N_{j-1} \bmod N_j} E(znm) = E(zn) \sum_{d\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} E(t^{j-k}und)$$

$$= E(zn) \sum_{d\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e(t^{-1}2ubd) = \begin{cases} qE(zn) & \text{si } n \in N_{i+1} \\ 0 & \text{si } n \not\subset N_{i+1}. \end{cases}$$

b) $i+2=j$. $\displaystyle\sum_{n\in N_i \bmod N_j} E(zn) = \sum_{n\in N_i \bmod N_{j-1}} \sum_{m\in N_{j-1} \bmod N_j} E(\tau t^{-k}unm) = qE(z)$.

c) $i+2<j$. $\displaystyle\sum_{n\in N_i \bmod N_j} E(zn) = \sum_{n\in N_i \bmod N_{j-1}} \sum_{m\in N_{j-1} \bmod N_j} E(znm)$

$$= q \sum_{n\in N_{i+1} \bmod N_{j-1}} E(zn).$$

Le Lemme 3 est donc démontré.

Suite de la démonstration du Théorème 2.

Cas $k-2l+1$ $(l>0)$. On obtient par l'application successive du Lemme 3

$$J_1(z) = q^{1-k} \sum_{n\in N_0 \bmod N_{k-1}} E(zn) = q^{-l-1} \sum_{n\in N_{l-1} \bmod N_{l+1}} E(zn) = q^{-l}E(z).$$

Cas $k=2l$ $(l>0)$. On obtient encore par l'application successive du Lemme 3

$$J_1(z) = q^{1-k} \sum_{n\in N_0 \bmod N_{k-1}} E(zn) - q^{-l} \sum_{n\in N_{l-1} \bmod N_l} E(zn) = q^{-l}E(z)G(q, u).$$

Le Théorème 2 est donc établi.

Le reste du § 3 est consabré au calcul des fonctions de Bessel d'indices non-triviaux, dont le résultat n'est d'ailleurs pas complet.

LEMME 4. *Soit n un élément générique de N_{k-1} $(k>0)$ et écrivons $n=1+t^{2k-1}a+\tau t^{k-1}b$ $(a, b\in\mathfrak{o})$. Alors l'application $n\to b$ de N_{k-1} sur $\mathfrak{o}$ induit un isomorphisme de N_{k-1}/N_k sur $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. En particulier, un caractère χ de N_{k-1} qui est trivial sur N_k induit un caractère de $\mathfrak{o}$ qui est trivial sur $\mathfrak{p}$.*

DÉMONSTRATION. On connaît déjà que l'application $n\to b$ applique N_k sur $\mathfrak{p}$ (Lemme 2). Soient n_1, n_2 des éléments de N_{k-1} et écrivons $n_i=1+t^{2k-1}a_i+\tau t^{k-1}b_i$ $(a_i, b_i\in\mathfrak{o},\ i=1, 2)$. Montrons d'abord que $n_1\equiv n_2 \pmod{N_k}$ si et seulement si $b_1\equiv b_2 \pmod{\mathfrak{p}}$. Soit $n_1=n_2n_3$ $(n_3\in N_{k-1})$ et écrivons $n_3=1+t^{2k-1}a_3+\tau t^{k-1}b_3$ $(a_3, b_3\in\mathfrak{o})$. On a facilement $b_1\equiv b_2+b_3 \pmod{\mathfrak{p}}$ et notre assertion se déduit du Lemme 1.

Soient ensuite n_1, n_2 des éléments de N_{k-1} et soit n_0 l'élément de N_{k-1} de la forme $1+t^{2k-1}a_0+\tau t^{k-1}(b_1+b_2)$. L'assertion ci-dessus implique que $n_1n_2\equiv n_0$ $(\bmod N_k)$, d'où le Lemme.

Calculons la fonction de Bessel d'indice χ (χ : non-trivial):

$$J_\chi(z) = \int_{N_0} E(zn)\overline{\chi(n)}dn.$$

La famille de sous-groupes $\{N_k\}$ forme un système fondamental de voisiages de l'élément neutre de N_0. Il existe donc un nombre naturel h (dit "*conducteur*" du caractère χ) tel que χ soit trivial sur N_h et nontrivial sur N_{h-1}.

Rappelons que les caractères e_v de $\mathfrak{o}: x \to e(t^{-1}vx)$ $(v \in \mathfrak{o})$ épuisent tous les caractères de $\mathfrak{o}$ qui est trivial sur $\mathfrak{p}$. Le Lemme 4 implique qu'il existe un élément non-nul v de $\mathfrak{o}$ déterminé modulo $\mathfrak{p}$ tel qu'on ait

$$\chi(n) = e(t^{-1}vb)$$

pour tout $n = 1 + t^{2h-1}a + \tau t^{h-1}b$ $(a, b \in \mathfrak{o})$ dans N_{h-1}. Réservons dans ce qui suit la lettre v toujours pour cet usage.

THÉORÈME 3. *Pour un élément z dans K, on a*

$$J_\chi(z) = \begin{cases} 0 & si\ |z| \neq q^h \\ 1 & si\ z = t^{-1}u\ (u \in \mathfrak{u}),\ 2u \equiv v \pmod{\mathfrak{p}} \\ q^{1-h} \sum\limits_{n \in N_0 \bmod N_{h-1}} E(zn)\overline{\chi(n)} & si\ z = t^{-h}u\ (h > 1,\ u \in \mathfrak{u})\ 2u \equiv v \pmod{\mathfrak{p}} \\ 0 & si\ z = t^{-h}u\ (u \in \mathfrak{u}),\ 2u \not\equiv v \pmod{\mathfrak{p}}. \end{cases}$$

Pour un élément $z = \tau t^{-k}u$ $(u \in \mathfrak{u})$ dans τK, la fonction $J_\chi(z)$ est donnée par la table suivante:

$k \leqq h$	0
$h < k < 2h-1$	$q^{1-h} \sum\limits_{n \in N_{k-h} \bmod N_{h-1}} E(zn_0n)\overline{\chi(n_0n)}$
$k = 2h-1$	$q^{1-h}E(zn_0)\overline{\chi(n_0)}$
$k = 2h$	$q^{-h}E(z)e(-t^{-1}4^{-1}u^{-1}v^2)G(q, u)$
$2h < k,\quad k = 2l+1$	$q^{-l}E(z)$
$2h < k,\quad k = 2l$	$q^{-l}E(z)G(q, u)$.

Ici, n_0 est l'élément de N_0 de la forme $1 + ta + \tau 2^{-1}u^{-1}v$ $(a \in \mathfrak{o})$.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord $z \in K$. Si $z \in \mathfrak{o}$, on a

$$J_\chi(z) = \int_{N_0} \overline{\chi(n)}dn = 0.$$

Soit $z \notin \mathfrak{o}$ et posons $z = t^{-k}u$ $(u \in \mathfrak{u},\ k > 0)$. Si $k < h$, on a $\int_{N_k} E(znm)\overline{\chi(nm)}dm = E(zn)\overline{\chi(n)}\int_{N_k}\overline{\chi(m)}dm = 0$, d'où $J_\chi(z) = 0$. Si $k \geqq h$, on a $\int_{N_k} E(znm)\overline{\chi(nm)}dm = q^{-k}E(zn)\overline{\chi(n)}$, et par suite

$$J_\chi(z) = q^{-k} \sum_{n \in N_0 \bmod N_k} E(zn)\overline{\chi(n)}.$$

Si $k>h$, on a, en écrivant $m=1+t^{2k-1}c+\tau t^{k-1}d$ $(c,\ d\in\mathfrak{o})$,

$$\sum_{m\in N_{k-1} \bmod N_k} E(znm)\overline{\chi(nm)}=E(zn)\overline{\chi(n)}\sum_{d\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e(t^{-1}2ud)=0\,,$$

d'où $J_\chi(z)=0$.

Si $k=h$, on a

$$\sum_{m\in N_{h-1} \bmod N_h} E(znm)\overline{\chi(nm)}=E(zn)\overline{\chi(n)}\sum_{d\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e(t^{-1}2ud)e(-t^{-1}vd)$$

$$=\begin{cases} qE(zn)\overline{\chi(n)} & \text{si } 2u\equiv v \pmod{\mathfrak{p}}\,,\\ 0 & \text{si } 2u\not\equiv v \pmod{\mathfrak{p}}\,,\end{cases}$$

d'où résulte la première moitié du Théorème.

Supposons ensuite $z=\tau y$ $(y\in K)$. Si $y\in\mathfrak{o}$, on a

$$J_\chi(z)=\int_{N_0}\overline{\chi(n)}dn=0\,.$$

Soit $y\notin\mathfrak{o}$ et posons $y=t^{-k}u$ $(u\in\mathfrak{u},\ k>0)$. On a, pour tout n dans N_0,

$$\int_{N_k} E(znm)\overline{\chi(nm)}dm=E(zn)\overline{\chi(n)}\int_{N_k}\overline{\chi(m)}dm=\begin{cases} 0 & \text{si } k<h\\ q^{-k}E(zn)\overline{\chi(n)} & \text{si } k\geqq h\,.\end{cases}$$

On a donc $J_\chi(z)=0$ si $k<h$. Si $k\geqq h$, on a pour tout n dans N_0

$$\sum_{m\in N_{k-1} \bmod N_k} E(znm)\overline{\chi(nm)}=E(zn)\overline{\chi(n)}\sum_{m\in N_{k-1} \bmod N_k}\overline{\chi(m)}$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{si } k=h\\ qE(zn)\overline{\chi(n)} & \text{si } k>h\,,\end{cases}$$

d'où $J_\chi(z)=0$ si $k\leqq h$. Supposons désormais que $k>h$. On a alors

$$J_\chi(z)=q^{1-k}\sum_{n\in N_0 \bmod N_{k-1}} E(zn)\overline{\chi(n)}\,.$$

Mettons un lemme qui généralise le Lemme 3.

LEMME 5. *Soient* $0\leqq i<j$, $i+j=k-1$, $j\geqq h$ *et*

$$A_{i,j}(z)=\sum_{n\in N_i \bmod N_j} E(zn)\overline{\chi(n)}\,.$$

Alors $A_{i,j}(z)$ *est donné par la table suivante:*

	$j>h$	$j=h$
$i+1=j$	$E(z)G(q,\ u)$	$E(z)e(-t^{-1}4^{-1}u^{-1}v^2)G(q,\ u)$
$i+2=j$	$qE(z)$	$qE(zn_0)\overline{\chi(n_0)}$
$i+2<j$	$qA_{i+1,j-1}(z)$	$qA_{i+1,j-1}(zn_0)$

DÉMONSTRATION. Ecrivons $n=1+t^{2i+1}a+\tau t^i b$ $(a, b\in\mathfrak{o})$.

a) $i+1=j$. $A_{i,j}(z)=E(z)\sum_{b\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e(t^{-1}ub^2)\overline{\chi(n)}$.

Cas $j>h$. $A_{i,j}(z)=E(z)G(q, u)$.

Cas $j=h$. $A_{i,j}(z)=E(z)\sum_{b\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e(t^{-1}ub^2)e(-t^{-1}vb)$

$$=E(z)e(-t^{-1}4^{-1}u^{-1}v^2)G(q, u).$$

Supposons ensuite que $i+2\leqq j$. Soit m un élément générique de N_{j-1} modulo N_j et écrivons $m=1+t^{2j-1}c+\tau t^{j-1}d$ $(c, d\in\mathfrak{o})$. On a alors

$$\sum_{m\in N_{j-1} \bmod N_j} E(znm)\overline{\chi(nm)}=E(zn)\overline{\chi(n)}\sum_{d\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} E(t^{j-k}und)\overline{\chi(m)}$$

$$=E(zn)\overline{\chi(n)}\sum_{d\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e(t^{-1}2ubd)\overline{\chi(m)}$$

$$=\begin{cases} E(zn)\overline{\chi(n)}\sum_{d\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e(t^{-1}2ubd) & \text{si } j>h, \\ E(zn)\overline{\chi(n)}\sum_{d\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e[t^{-1}(2ub-v)d] & \text{si } j=h \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \text{Cas } j>h \begin{cases} qE(zn)\overline{\chi(n)} & \text{si } b\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \\ 0 & \text{si } b\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \end{cases} \\ \text{Cas } j=h \begin{cases} qE(zn)\overline{\chi(n)} & \text{si } 2ub\equiv v \pmod{\mathfrak{p}} \\ 0 & \text{si } 2ub\not\equiv v \pmod{\mathfrak{p}}, \end{cases} \end{cases}$$

d'où le Lemme.

L'application successive du Lemme 5 à la formule

$$J_\chi(z)=q^{1-k}\sum_{n\in N_0 \bmod N_{k-1}} E(zn)\overline{\chi(n)}$$

entraîne le Théorème 3.

Appendice.

Soit G un groupe commutatif, localement compact et dénombrable à l'infini. Désignons par $L^2(G)$ l'espane hilbertien des fonctions sur G de carré intégrable par rapport à une mesure de Haar dx. Pour une fonction mesurable bornée φ sur G, M_φ désignera l'opérateur borné dans $L^2(G)$ défini par la formule $M_\varphi f(x)=\varphi(x)f(x)$ $(f\in L^2(G))$.

LEMME 6. *Soit A un opérateur borné dans $L^2(G)$ qui commute avec M_χ pour tout caractère unitaire χ de G. Il existe alors une fonction mesurable bornée $a(x)$ telle qu'on ait $A=M_a$.*

DÉMONSTRATION. 1°. Soient $L^1(G)$ l'espace des fonctions intégrables sur G et $L^\infty(G)$ l'espace des fonctions mesurables bornées sur G. Alors $L^\infty(G)$ est l'espace dual de $L^1(G)$.

Si f est une fonction dans $L^1(G)$ telle que $\int_G f(x)\chi(x)=0$ pour tout caractère unitaire χ de G, alors le théorème d'unicité de la transformation de Fourier implique que $f=0$. Rappelons que tout sous-espace faiblement fermé dans l'espace dual d'un espace localement convexe L est l'annulateur d'un sous-espace fermé dans L (voir par exemple Naimark [4], p. 65). Par conséquent, les caractères de G engendrent linéairement un sous-espace S partout dense dans $L^\infty(G)$. Ceci equivaut à dire que pour toute fonction φ dans $L^\infty(G)$, il existe une suite de fonctions $\{\chi_n\}$ dans S telle qu'on ait

$$\int_G \varphi(x)f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_G \chi_n(x)f(x)dx$$

pour toute fonction f dans $L^1(G)$.

Pour deux fonctions f, g dans $L^2(G)$, les fonctions $f(x)\cdot\overline{A^*g(x)}$ et $Af(x)\cdot\overline{g(x)}$ appartiennent à $L^1(G)$, où A^* est l'operateur adjoint de A. On a par consequent

$$\begin{aligned}(AM_\varphi f, g)=(M_\varphi f, A^*g)&=\int_G \varphi(x)f(x)\overline{A^*g(x)}dx\\ &=\lim\int_G \chi_n(x)f(x)\overline{A^*g(x)}dx=\lim\,(M_{\chi_n}f, A^*g)\\ &=\lim\,(AM_{\chi_n}f, g)=\lim\,(M_{\chi_n}Af, g)\\ &=\lim\int_G \chi_n(x)Af(x)\cdot\overline{g(x)}dx\\ &=\int_G \varphi(x)Af(x)\cdot\overline{g(x)}dx=(M_\varphi Af, g).\end{aligned}$$

On a donc démontré que l'opérateur A commute avec M_φ pour toute fonction φ dans $L^\infty(G)$.

2°. Soit $\{G_n\}_{n=1,2,\dots}$ une suite de sous-espaces compacts de G telle que $G_n\subset G_{n+1}$ et $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$. Soit e_n la fonction caractéristique de G_n et posons $a(x)=Ae_n(x)$ pour x dans G_n. La fonction a sur G est bien-définie, parce que l'on a $e_n=e_ne_m$ pour $n\leqq m$ et que l'on a par conséquent $Ae_n(x)=A(e_ne_m)(x)$ $=e_n(x)Ae_m(x)=Ae_m(x)$ pour x dans G_n.

Il existe une fonction continue, partout positive, bornée et de carré intégrable f_0 sur G. On a alors $a(x)=Af_0(x)/f_0(x)$. En effet, pour x dans G_n, on a

$$f_0(x)a(x)=f_0(x)Ae_n(x)=A(f_0e_n)(x)=e_n(x)Af_0(x)=Af_0(x).$$

Pour une fonction continue φ à support compact, la fonction $\varphi(x)/f_0(x)$ est bornée, d'où

$$A\varphi(x)=A\Big(\frac{\varphi}{f_0}f_0\Big)(x)=\frac{\varphi(x)}{f_0(x)}Af_0(x)=\frac{\varphi(x)}{f_0(x)}a(x)f_0(x)=a(x)\varphi(x)\,.$$

L'espace des fonctions continues à support compact etant partout dense dans $L^2(G)$, il en résulte que $A=M_a$.

Il suffit donc de montrer que la fonction a est bornee. Soit N la norme de l'opératour A:

$$N=\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|}\,.$$

Soient G_0 l'ensemble des éléments x dans G tels que $|a(x)|\geqq N+1$ et φ_n la fonction caractéristique de $G_0\cap G_n$. Les fonctions φ_n sont bornées, à support compact et de carré intégrable. On a alors

$$\begin{aligned}(N+1)^2\mu(G_0\cap G_n)&=(N+1)^2\int_{G_0}|\varphi_n(x)|^2dx\leqq\int_{G_0}|a(x)\varphi_n(x)|^2dx\\&\leqq\int_G|A\varphi_n(x)|^2dx\leqq N^2\int_G|\varphi_n(x)|^2dx=N^2\mu(G_0\cap G_n)\end{aligned}$$

où $\mu(G_0\cap G_n)$ est la masse totale de l'ensemble $G_0\cap G_n$. D'où résulte que $\mu(G_0\cap G_n)=0$ pour tout n, ce qui implique que $\mu(G_0)=0$. La fonction $a(x)$ est donc bornée et le Lemme 6 est démontré.

Université de Tokyo

Bibliographie

[1] R. Godement, Introduction aux travaux de Selberg, Séminaire Bourbaki, **9** (1956/57), n° 144.

[2] G. W. Mackey, Imprimitivity for representations of locally compact groups I, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **35** (1949), 537-545.

[3] G. W. Mackey, Induced representations of locally compact groups I, Ann. of Math., **55** (1952), 101-139.

[4] М. А. Наймарк, Нормированные кольца, Москва, 1956, глава 1, § 3, 11.

[5] M. Saito, Représentations unitaires du groupe des déplacements du plan $\mathfrak{p}$-adique, Proc. Japan Acad., **39** (1963), 407-409.

[6] P. J. Sally Jr., Invariant subspaces and Fourier-Bessel transforms on the $\mathfrak{p}$-adiq plane, à parître dans Math. Ann.

[7] Н. Я. Виленкин, Бесселевы функции и представления группы евклидовых движений, Успехи Математических Наук, **11** (3) (69) (1956), 69-112.