J. Math. Soc. Japan
Vol. 17, No. 3, 1965

Sur les ensembles pseudoconcaves généraux

Machio TADOKORO

(Received Sept. 21, 1964)
(Revised March 10, 1965)

§ 0. Introduction.

Depuis la découverte de F. Hartogs [3] en 1906, E. E. Levi [6], G. Julia [5] et K. Oka [8, 10] ont montré que divers domaines importants, que l'on envisage dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, sont soumis à une restriction curieuse: leur extérieur satisfait au théorème de la continuité.

Les ensembles pseudoconcaves[1], ensembles satisfaisant au théorème de la continuité, ont été étudiés, en 1909, pour la première fois par Hartogs [4]. En 1934, K. Oka [8] a donné quelques généralisations d'un théorème dû à Hartogs. Une démonstration complète de ces généralisations d'Oka se trouve dans le mémoire de T. Nishino [7] publié en 1962.

Dans le présent mémoire, nous généralisons la notion d'ensemble pseudoconcave en notion d'ensemble pseudoconcave d'ordre q[2] et montrons que les théorèmes de Hartogs, généralisés par Oka, sont valables pour les ensembles pseudoconcaves d'ordre q sous une forme correspondante.

Dans le § 1, nous introduisons la notion d'ensemble pseudoconcave d'ordre q et, dans le § 2, nous rappelons les théorèmes de Hartogs et d'Oka. Dans le

1) Oka a appelé ensemble de la classe H un ensemble pseudoconcave. Dans l'espace de n variables complexes, c'est un ensemble pseudoconcave d'ordre $(n-1)$ en nos termes.

2) Nous appelons domaine pseudoconvexe d'ordre q tout domaine dont le complémentaire est un ensemble pseudoconcave d'ordre q. La notion de tel domaine est une généralisation de celle de domaine pseudoconvexe. A propos du prolongement des ensembles analytiques, W. Rothstein [11] a introduit la notion de domaine q-convexe qui généralise la notion de domaine holomorphe-convexe. D'autre part, H. Grauert [2] a introduit une autre notion de domaine q-convexe à l'aide d'une fonction q-convexe qui est la généralisation de la fonction de Levi.

Dans l'espace de n variables complexes, les domaines q-convexes de W. Rothstein et les domaines $(n-q)$-convexes de H. Grauert sont, tous les deux, des domaines pseudoconvexes d'ordre q dans notre sens.

Récemment, O. Fujita [1] a montré que le domaine de normalité d'une famille d'ensembles analytiques de dimension q est un domaine pseudoconvexe d'ordre q.

§ 3, nous montrons les théorèmes correspondants pour les ensembles pseudoconcaves d'ordre q.

§ 1. Ensembles pseudoconcaves généraux.

1. Définitions. Nous allons donner les théorèmes de la continuité d'ordre q et définir la pseudoconcavité d'ordre q d'un ensemble.

Dans l'espace de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$[3], considérons un domaine D et une partie E de D. Soit q un nombre entier tel que $0 < q \leqq n-1$. Soit $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ un point de E. On dit que E satisfait au théorème de la continuité d'ordre q au point $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ si la condition suivante est vérifiée: si le plan analytique de dimension $n-q$ défini par $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \cdots, x_q = a_q$ n'intersecte E, au voisinage de $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, qu'au point $(a_1, a_2. \cdots, a_n)$, alors, pour tout nombre positif $r > 0$, on peut choisir un nombre positif $\rho > 0$ suffisamment petit, de manière que, pour tout point $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$ dans le polycylindre $\gamma: |x_i - a_i| < \rho$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$, il existe au moins un point $(\eta_{q+1}, \eta_{q+2}, \cdots, \eta_n)$ dans le polycylindre $\gamma': |x_i - a_i| < r$ $(i = q+1, q+2, \cdots, n)$ dans l'espace $(x_{q+1}, x_{q+2}, \cdots, x_n)$ tel que le point $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q, \eta_{q+1}, \eta_{q+2}, \cdots, \eta_n)$ appartienne à E. Pour des raisons de convenance, nous disons que tout ensemble E satisfait au théorème de la continuité d'ordre 0 en tout point de E.

Dans l'espace de n variables complexes, le théorème de la continuité d'ordre $n-1$ coïncide avec le théorème de la continuité que l'on dit usuellement[4]. Si l'ensemble E satisfait au théorème de la continuité d'ordre q en un point de E, alors il satisfait aussi à celui d'ordre 0, d'ordre 1, $\cdots$, d'ordre $q-1$.

On dit qu'un ensemble E dans un domaine D est pseudoconcave d'ordre q, si E est relativement fermé dans D, qu'il satisfait au théorème de la continuité d'ordre q en tout point de E et que cette propriété reste invariante sous toute transformation biunivoque et biholomorphe des coordonnées au voisinage d'un point quelconque de E.

Un ensemble analytique A dans un domaine D, dont toutes les composantes irréductibles possèdent la même dimension q, est pseudoconcave d'ordre q et n'est pas pseudoconcave d'ordre $> q$. Le complémentaire de la réunion de deux domaines d'holomorphie dans l'espace de n variables est pseudoconcave d'ordre $(n-2)$.

---

3) Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons toujours que le nombre des variables complexes est plus grand que 1.

4) Voir K. Oka [**9**]. Dans le présent mémoire nous dirons simplement, dans l'espace de n variables complexes, le théorème de la continuité et les ensembles pseudoconcaves au lieu du théorème de la continuité d'ordre $n-1$ et des ensembles d'ordre $n-1$, respectivement.

2. Autres définitions. On peut définir les ensembles pseudoconcaves d'ordre q dans d'autres formes, de même que les ensembles pseudoconcaves[5]. Pour discerner divers formes du théorème de la continuité, nous appelons théorème de la continuité (A) celui que l'on a introduit dans le numéro précédent.

Considérons une partie E dans un domaine D de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et un entier q tel que $0 < q \leqq n-1$. Soit $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ un point de E. On dit que E satisfait au théorème de la continuité (B) d'ordre q au point $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ si la condition suivante est vérifiée : pour toute hypersphère S dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-q+1})$ dont la frontière passe par $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-q+1})$ et pour toute hypersphère suffisamment petite σ dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-q+1})$ dont le centre est $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-q+1})$, il existe au moins un point $(b_1, b_2, \cdots, b_{n-q+1})$, intérieur à σ et extérieur à S, tel que $(b_1, b_2, \cdots, b_{n-q+1}, a_{n-q+2}, a_{n-q+3}, \cdots, a_n)$ appartienne à E. On dit qu'une partie quelconque de D satisfait au théorème de la continuité (B) d'ordre 0 en tout point de la partie.

Soient E une partie d'un domaine D de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et q un entier tel que $0 \leqq q \leqq n-1$. On dit que E satisfait au théorème de la continuité (C) d'ordre q au point $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de E, s'il existe un voisinage U de $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ satisfaisant à la condition suivante : pour tout point $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ de U et pour $0 < r' < r$ et $0 < \rho' < \rho$, si le polycylindre

$$\Delta : |x_i - x_i^0| < r \ (i = 1, 2, \cdots, q), \qquad |x_i - x_i^0| < \rho \ (i = q+1, q+2, \cdots, n)$$

est contenu dans U et qu'aucun des ensembles $\Delta_0, \Delta_{q+1}, \Delta_{q+2}, \cdots, \Delta_n$ définis par

$$\Delta_0 : |x_i - x_i^0| < r' \ (i = 1, 2, \cdots, q), \qquad |x_i - x_i^0| < \rho \ (i = q+1, q+2, \cdots, n);$$

$$\Delta_k : |x_i - x_i^0| < r \ \ (i = 1, 2, \cdots, q), \qquad |x_i - x_i^0| < \rho \ (q+1 \leqq i \leqq n, i \neq k),$$

$$\rho' < |x_k - x_k^0| < \rho,$$

pour $k = q+1, q+2, \cdots, n$, ne contient de point de E, alors Δ ne contient pas de point de E.

De la même manière que nous avons défini, à l'aide du théorème de la continuité (A) d'ordre q, l'ensemble pseudoconcave d'ordre q, que nous appelerons pour le moment ensemble A-pseudoconcave d'ordre q, on pourra définir la B-pseudoconcavité et la C-pseudoconcavité d'ordre q en se servant des théorèmes de la continuité (B) et (C) d'ordre q, respectivement.

3. Equivalences des définitions. Nous allons montrer l'équivalence de ces trois définitions de pseudoconcavité, d'une façon parallèle à celle de K. Oka [**9**].

Soit E une partie d'un domaine D et soit q une entier tel que $0 \leqq q \leqq n-1$ dans l'espace de n variables complexes. On voit facilement que, si E est A-pseudoconcave d'ordre q, E est B-pseudoconcave d'ordre q et que, si E est C-

5) Voir K. Oka [**9**].

pseudoconcave d'ordre q, E est A-pseudoconcave d'ordre q.

Il nous reste à montrer que, si E est B-pseudoconcave d'ordre q, E est C-pseudoconcave. Supposons donc que E soit un ensemble B-pseudoconcave d'ordre q dans un domaine D. Soient $0<r'<r$ et $0<\rho'<\rho$. Considérons un polycylindre

$$\Delta:\ |x_i|<r\ (i=1, 2, \cdots, q), \qquad |x_i|<\rho\ (i=q+1, q+2, \cdots, n)$$

et $n-q+1$ domaines

$$\Delta_0:\ |x_i|<r'\ (i=1, 2, \cdots, q), \qquad |x_i|<\rho\ (i=q+1, q+2, \cdots, n);$$
$$\Delta_k:\ |x_i|<r\ \ (i=1, 2, \cdots, q), \qquad |x_i|<\rho\ (q+1\leqq i\leqq n, i\neq k),$$
$$\rho'<|x_k|<\rho,$$

pour $k=q+1, q+2, \cdots, n$. Pour montrer la C-pseudoconcavité d'ordre q de E, il suffit, sans perdre la généralité, de montrer que, si Δ est contenu dans D et qu'aucun des domaines Δ_0, Δ_{q+1}, $\Delta_{q+2}, \cdots, \Delta_n$ ne contient de point de E, alors Δ ne contient pas de point de E.

Décrivons le polycylindre γ_1: $|x_1|<r$, $|x_i|<r'$ $(i=2, 3, \cdots, q)$ dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ et le polycylindre γ': $|x_i|<\rho$ $(i=q+1, q+2, \cdots, n)$ dans l'espace $(x_{q+1}, x_{q+2}, \cdots, x_n)$. Etant $\rho''=\dfrac{\rho+\rho'}{2}$, traçons l'ensemble Σ': $|x_{q+1}|=\rho''$, $|x_{q+2}|=\rho'', \cdots, |x_n|=\rho''$ dans l'espace $(x_{q+1}, x_{q+2}, \cdots, x_n)$. Soit $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$ un point quelconque de (γ_1, Σ'). Pour chaque $k=q+1, q+2, \cdots, n$. Soit L_k le segment fermé dans le x_k-plan, joignant x_k' à l'origine. Lorsque l'ensemble $((x_1', x_2', \cdots, x_q'), L_{q+1}, L_{q+2}, \cdots, L_n)\cap E$ n'est pas vide, soit $(x_1', x_2', \cdots, x_q', x_{q+1}'', x_{q+2}'', \cdots, x_n'')$ un des points de cet ensemble les plus loins de $(x_1', x_2', \cdots, x_q', 0, 0, \cdots, 0)$. Nous appelons un tel point $(x_1', x_2', \cdots, x_q', x_{q+1}'', x_{q+2}'', \cdots, x_n'')$ α-point relatif à $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$.

Maintenant, on va montrer que le polycylindre (γ_1, γ') ne contient pas de point de E. Supposons au contraire que (γ_1, γ') contienne au moins un point de E. Donc, il existerait au moins un α-point. Soit $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ un α-point. Alors, $r'\leqq|a_1|<r$. Prenons un nombre réel r_1 tel que $|a_1|<r_1<r$ et un nombre réel K assez grand pour que l'on ait

$$\sqrt{\left|\frac{K}{a_1}\right|^2+|a_{q+1}|^2+|a_{q+2}|^2+\cdots+|a_n|^2}>\sqrt{\left(\frac{K}{r_1}\right)^2+(n-q)(\rho'')^2}=d_1\,.$$

Considérons dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ l'ensemble Σ: $|x_1|<r$, $x_2=a_2$, $x_3=a_3$, $\cdots, x_q=a_q$. A chaque point $(x_1', a_2, a_3, \cdots, a_q, x_{q+1}', x_{q+2}', \cdots, x_n')$ de (Σ, Σ'), faisons correspondre 0 quand le point $(x_1', a_2, a_3, \cdots, a_q, x_{q+1}', x_{q+2}', \cdots, x_n')$ n'admet pas de α-point et la quantité

$$\sqrt{\left|\frac{K}{x_1'}\right|^2+|x_{q+1}''|^2+|x_{q+2}''|^2+\cdots+|x_n''|^2}$$

quand $(x'_1, a_2, a_3, \cdots, a_q, x'_{q+1}, x'_{q+2}, \cdots, x'_n)$ admet un α-point $(x'_1, a_2, a_3, \cdots, a_q, x''_{q+1}, x''_{q+2}, \cdots, x''_n)$. Cette quantité, regardée comme fonction définie sur (Σ, Σ'), est bornée. La borne supérieure d_0 de cette quantité est manifestement plus grande que d_1: $d_0 > d_1$. D'autre part, la quantité correspondante en un point de (Σ, Σ') avec $r_1 < |x'_1| < r$ est plus petite que d_1. Donc, il existe un α-point $(a'_1, a_2, a_3, \cdots, a_q, a'_{q+1}, a'_{q+2}, \cdots, a'_n)$ auquel correspond la quantité

$$d_0 = \sqrt{\left|\frac{K}{a'_1}\right|^2 + |a'_{q+1}|^2 + |a'_{q+2}|^2 + \cdots + |a'_n|^2}\,.$$

Cet α-point $(a'_1, a_2, a_3, \cdots, a_q, a'_{q+1}, a'_{q+2}, \cdots, a'_n)$ est, par définition, un point de E. Effectuons au voisinage de ce point la transformation biholomorphe des coordonnées $X_1 = \dfrac{K}{x_1}$, $X_2 = x_2$, $X_3 = x_3, \cdots, X_n = x_n$. Décrivons, dans l'espace de $n-q+1$ variables $X_1, X_{q+1}, X_{q+2}, \cdots, X_n$, une hypersphère σ suffisamment petite de centre $\left(\dfrac{K}{a'_1}, a'_{q+1}, a'_{q+2}, \cdots, a'_n\right)$ et une autre hypersphère S de centre $(0, 0, \cdots, 0)$ dont la frontière passe par $\left(\dfrac{K}{a'_1}, a'_{q+1}, a'_{q+2}, \cdots, a'_n\right)$.

Soit β l'ensemble des points, intérieurs à σ et extérieurs à S, et soit B l'ensemble des points $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ tels que $(X_1, X_{q+1}, X_{q+2}, \cdots, X_n) \in \beta$, $X_2 = a_2$, $X_3 = a_3, \cdots, X_q = a_q$. Alors, on voit facilement que B ne contient pas de point de E. Or, E est B-pseudoconcave d'ordre q, d'après l'hypothèse. B doit contenir au moins un point de E. Nous avons ainsi une contradiction. Ceci montre que le polycylindre (γ_1, γ') ne contient pas de point de E.

Pour chaque $k = 1, 2, \cdots, q$, soit γ_k le polycylindre dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ défini par

$$\gamma_k:\ |x_i| < r\ (i = 1, 2, \cdots, k), \qquad |x_i| < r'\ (i = k+1, k+2, \cdots, q)\,.$$

De la même manière, nous pouvons montrer ensuite que (γ_2, γ') ne contient pas de point de E; puis, que (γ_3, γ') ne contient pas de point de E; et ainsi de suite. $\Delta = (\gamma_q, \gamma')$ ne contient donc pas de point de E. Nous avons ainsi achevé la démonstration de l'équivalence.

4. Remarque. Nous avons vu que les trois définitions de pseudoconcavité d'ordre q sont équivalentes l'une à l'autre. D'ailleurs, la démonstration précédente montre que tout ensemble pseudoconcave d'ordre q satisfait au théorème de la continuité (C) sous la forme globale. A savoir, supposons que E soit un ensemble pseudoconcave d'ordre q dans un domaine D de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$, que, pour $0 < r'_i < r_i$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ et pour $0 < \rho'_i < \rho_i$ $(i = q+1, q+2, \cdots, n)$, aucun des ensembles $\Delta_0, \Delta_{q+1}, \Delta_{q+2}, \cdots, \Delta_n$ définis par

$$\Delta_0:\ |x_i - x_i^0| < r'_i\ (i = 1, 2, \cdots, q), \quad |x_i - x_i^0| < \rho_i\ (i = q+1, q+2, \cdots, n);$$

$$\Delta_k:\ |x_i - x_i^0| < r_i\ (i = 1, 2, \cdots, q), \quad |x_i - x_i^0| < \rho_i\ (q+1 \leqq i \leqq n,\ i \neq k),$$

$$\rho_k' < |x_k - x_k^0| < \rho_k ,$$

pour $k = q+1, q+2, \cdots, n$, ne contienne de point de E et que le polycylindre

$$\varDelta: |x_i - x_i^0| < r_i \ (i=1, 2, \cdots, q), \qquad |x_i - x_i^0| < \rho_i \ (i=q+1, q+2, \cdots, n),$$

soit contenu dans D, alors $\varDelta$ ne contient pas de point de E.

§ 2. Résultats connus.

5. Théorème de Hartogs concernant les ensembles pseudoconcaves. Les ensembles pseudoconcaves ont été étudiés pour la première fois par F. Hartogs [4], dont un des résultats est le

THÉORÈME DE HARTOGS. *Soit* $\Gamma: |x_i| < \rho_i \ (i=1, 2, \cdots, n-1) \ (\rho_i > 0)$ *un polycylindre dans l'espace de* $n-1$ *variables* $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ *et soit* $\Gamma': |y| < r$ $(r > 0)$ *un cercle dans le plan d'une variable* y. *Soit* E *un ensemble pseudoconcave dans le polycylindre* (Γ, Γ'). *Supposons que, pour chaque point* $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ *dans* Γ, *il existe un et un seul point* $\eta = \varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ *dans le cercle* Γ' *tel que* $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}, \eta)$ *appartienne à* E. *Alors,* $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ *est une fonction holomorphe dans* Γ *et* E *est une surface analytique dans* (Γ, Γ') *donnée par* $y = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$.

6. Généralisations dues à Oka. Le théorème de Hartogs ci-dessus a été généralisé par K. Oka [8] dans le cas de deux variables et par T. Nishino [7], avec une démonstration complète, dans le cas de n variables. Pour énoncer leur théorèmes, donnons d'abord la notion de capacité.

Soit e un ensemble dans l'espace de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et soit P un point de e. Nous appelons P point (α) de e, si toute fonction plurisousharmonique dans un voisinage quelconque U de P, prenant la valeur $-\infty$ sur $e \cap U$, se réduit à la constante $-\infty$ dans U. Un ensemble est dit de capacité nulle s'il est réunion dénombrable d'ensembles n'ayant aucun point (α). Un ensemble qui n'est pas de capacité nulle sera dit de capacité non nulle[6].

La première généralisation, due à K. Oka, du théorème de Hartogs est le

THÉORÈME A. *Soit* D *un domaine dans l'espace de* $n-1$ *variables complexes* $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ *et soit* E *un ensemble pseudoconcave dans le domaine* $(D, |y| < \infty)$ *de* n *variables* $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, y$. *Supposons que, pour tout point* $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ *de* D, *la section* $E(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ *de* E *par le plan* $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \cdots, x_{n-1} = \xi_{n-1}$, *regardée comme ensemble dans le* y*-plan, est bornée et qu'il existe un ensemble* e *de capacité non nulle dans* D *tel que, pour tout point* $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ *de* e *la section* $E(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ *se réduise à un nombre fini de points. Sous ces hypothèses, l'ensemble* $E(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ *peut être exprimé par une fonction algébroïde de* $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ *dans* D. *Donc,* E *est une surface analytique dans le domaine*

6) Voir T. Nishino [7].

$(D, |y| < \infty)$.

Soit D un domaine dans l'espace de plusieurs variables complexes. Nous appelons, avec T. Nishino [7], ensemble analytique général irréductible dans D l'ensemble dans D obtenu, à partir d'un germe d'ensemble analytique irréductible en un point dans D, par le prolongement analytique autant que possible dans D.

Ceci étant fait, la deuxième généralisation, due à Oka, du théorème de Hartogs s'énonce sous la forme suivante:

THÉORÈME B. *Soit D un domaine dans l'espace de $n-1$ variables $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ et soit E un ensemble pseudoconcave dans le domaine $(D, |y| < \infty)$ de n variables $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, y$. Supposons que, pour tout point $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ de D, la section $E(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ de E par le plan $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \cdots, x_{n-1} = \xi_{n-1}$ est borneé et qu'il existe un ensemble e de capacité non nulle dans le domaine D tel que, pour tout point $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ de e, la section $E(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ consiste en un nombre dénombrable de points. Alors E est réunion au plus dénombrable d'ensembles analytiques généraux irréductibles, de dimension $n-1$, dans le domaine $(D, |y| < \infty)$.*

§ 3. Résultats obtenus.

7. Projection des ensembles pseudoconcaves généraux. Le but de notre travail est de montrer que le théorème de Hartogs et les deux théorèmes A et B peuvent se généraliser au cas des ensembles pseudoconcaves d'ordre q. Pour ceci, le théorème suivant, qui concerne la projection des ensembles pseudoconcaves d'ordre q joue un rôle principal.

THÉORÈME I. *Soient D un domaine dans l'espace de l variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_l$ et γ un polycylindre $|y_1| < R, |y_2| < R, \cdots, |y_m| < R$ ayant son centre à l'origine et son rayon $R > 0$ dans l'espace de m variables complexes $y_1, y_2, \cdots, y_m$. Soit E un ensemble pseudoconcave d'ordre q dans le domaine (D, γ) de $l+m$ variables $x_1, x_2, \cdots, x_l, y_1, y_2, \cdots, y_m$. Supposons que $0 \leqq q < l$ et que la projection de E sur l'espace des variables $y_1, y_2, \cdots, y_m$ est contenu à l'intérieur complet de γ. Alors, la projection de E sur l'espace des variables $x_1, x_2, \cdots, x_l$ est un ensemble pseudoconcave d'ordre q dans D.*

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse, on peut choisir un nombre réel positif R' tel que $0 < R' < R$ et que la projection de E sur l'espace $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ soit contenu dans le polycylindre γ': $|y_j| < R'$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$. Prenons un point $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_l^0)$ dans D et des nombres réels $0 < r_i' < r_i$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ et $0 < \rho_i' < \rho_i$ $(i = q+1, q+2, \cdots, l)$. Décrivons ensuite les domaines $\Delta_0, \Delta_{q+1}, \Delta_{q+2}, \cdots, \Delta_l$ données par

$$\Delta_0: \ |x_i - x_i^0| < r_i' \ (i = 1, 2, \cdots, q), \qquad |x_i - x_i^0| < \rho_i \ (i = q+1, q+2, \cdots, l);$$

$$\Delta_k: |x_i-x_i^0|<r_i \ (i=1,2,\cdots,q), \qquad |x_i-x_i^0|<\rho_i \ (q+1\leqq i\leqq l, i\neq k), \quad \rho_k'<|x_k-x_k^0|<\rho_k,$$

$(k=q+1, q+2, \cdots, l)$. Supposons que le polycylindre

$$\Delta: |x_i-x_i^0|<r_i \ (i=1,2,\cdots,q), \qquad |x_i-x_i^0|<\rho_i \ (i=q+1, q+2, \cdots, l),$$

soit contenu dans D et qu'aucun des domaines $\Delta_0, \Delta_{q+1}, \Delta_{q+2}, \cdots, \Delta_l$ ne contienne de point de la projection E_0 de E sur l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_l)$. Nous allons montrer que Δ ne contient pas de point de E_0. Dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_l, y_1, y_2, \cdots, y_m)$, considérons des domaines

$$D_0: |x_i-x_i^0|<r_i \ (i=1,2,\cdots,q), \qquad |x_i-x_i^0|<\rho_i \ (i=q+1, q+2, \cdots, l), \quad |y_j|<R \ (j=1,2,\cdots,m);$$

$$D_k: |x_i-x_i^0|<r_i \ (i=1,2,\cdots,q), \qquad |x_i-x_i^0|<\rho_i \ (q+1\leqq i\leqq l, i\neq k), \quad \rho_k'<|x_k-x_k^0|<\rho_k, \qquad |y_j|<R \ (j=1,2,\cdots,m);$$

$$D_{l+s}: |x_i-x_i^0|<r_i \ (i=1,2,\cdots,q), \qquad |x_i-x_i^0|<\rho_i \ (i=q+1, q+2, \cdots, l), \quad |y_j|<R \ (1\leqq j\leqq m, j\neq s), \qquad R'<|y_s|<R,$$

pour $k=q+1, q+2, \cdots, l$, $s=1,2,\cdots,m$. Alors, on voit immédiatement que le polycylindre

$$D: |x_i-x_i^0|<r_i \ (i=1,2,\cdots,q), \qquad |x_i-x_i^0|<\rho_i \ (i=q+1, q+2, \cdots, l), \quad |y_j|<R \ (j=1,2,\cdots,m),$$

est contenu dans (D, γ) et qu'aucun des domaines $D_0, D_{q+1}, D_{q+2}, \cdots, D_l, D_{l+1}, \cdots, D_{l+m}$ ne contient de point de E. De la pseudoconcavité d'ordre q de l'ensemble E et de la remarque faite au n°4, il résulte que D ne contient pas de point de E. Donc, la projection Δ de D sur l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_l)$ ne contient pas de point de la projection E_0 de E. Il est d'ailleurs facile de voir que E_0 est fermé dans D et que la propriété de E_0 que nous venons d'étudier est invariante sous toute transformation, biunivoque et biholomorphe. des coordonnées $x_1, x_2, \cdots, x_l$. La projection E_0 de E est, donc, pseudoconcave d'ordre q dans D. c. q. f. d.

8. Théorèmes. D'après le théorème I que l'on vient d'obtenir, on va établir les théorèmes suivants II, III et IV, qui correspondent respectivement au théorème de Hartogs et aux théorème A et B du § 2.

THÉORÈME II. *Soient D un domaine dans l'espace de q variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_q$ et D' un domaine dans l'espace de p variables complexes $y_1, y_2, \cdots, y_p$ $(p\geqq 1)$. Soit E un ensemble pseudoconcave d'ordre q dans le domaine (D, D') de $p+q$ variables $x_1. x_2, \cdots, x_q, y_1, y_2, \cdots, y_p$. Supposons que, pour tout point $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$ de D, il existe un et un seul point $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p)$ dans D' tel que $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p)$ appartienne à E. Alors, chaque coordonnée η_j $(j=1,2,\cdots,p)$ étant régardée comme fonction $\varphi_j(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$ des ξ_i définie* *dans D, les fonctions $\varphi_j(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ $(j=1, 2, \cdots, p)$ sont des fonctions holomorphes dans D. Donc, E est un ensemble analytique de dimension q dans (D, D') donné par $y_j=\varphi_j(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ $(j=1, 2, \cdots, p)$.*

En effet, soit $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_q^0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_p^0)$ un point de E. Soit γ' un polycylindre, contenu à l'intérieur complet de D', défini par $\gamma' : |y_j-y_j^0|<\rho$ $(j=1, 2, \cdots, p)$. D'après la définition de la pseudoconcavité (A) d'ordre q, on peut trouver un polycylindre γ, contenu dans D, autour de $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_q^0)$ assez petit pour qu'il existe un polycylindre $\gamma'' : |y_j-y_j^0|<\rho'$ $(j=1, 2, \cdots, p)$ avec $0<\rho'<\rho$, de telle manière que, pour tout point $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$ de γ, il y ait au moins un point $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p)$ de γ'' tel que $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p)$ appartienne à E. Considérons, pour chaque $j=1, 2, \cdots, p$, la projection E_j' de $E'=E\cap(\gamma, \gamma')$ l'espace de $q+1$ variables $x_1, x_2, \cdots, x_q, y_j$. Alors, pour E' et E_j', les conditions du théorème I sont vérifiées. Il en résulte que E_j' est pseudoconcave d'ordre q dans le polycylindre $(\gamma, |y_j|<\rho)$. D'ailleurs, pour tout point $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$ de γ, il existe un et un seul point $\eta_j=\varphi_j(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$ dans le cercle $|y_j-y_j^0|<\rho$ du y_j-plan. Grâce au théorème de Hartogs, on voit que $\varphi_j(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ est une fonction, holomorphe dans γ, donc holomorphe dans D tout entier.

c. q. f. d.

THÉORÈME III. *Soient D un domaine dans l'espace de q variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_q$ et D' un domaine dans l'espace de p variables complexes $y_1, y_2, \cdots, y_p$ $(p\geqq 1)$. Soit E un ensemble pseudoconcave d'ordre q dans le domaine (D, D'). Supposons que la projection de E sur l'espace $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ se trouve dans l'intérieur complet de D' et qu'il existe un ensemble e dans D de capacité non nulle, tel que, pour tout point $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$ de e, la section $E(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$ de E par le plan linéaire $x_1=\xi_1, x_2=\xi_2, \cdots, x_q=\xi_q$ se réduise à un nombre fini de points. Sous ces hypothèses, l'ensemble E est un ensemble analytique dans (D, D') dont toutes les composantes irréductibles ont la même dimension q.*

On pourra démontrer ce théorème et le suivant d'après le théorème I et les théorèmes A et B, comme on l'a fait pour le théorème II.

THÉORÈME IV. *Soient D un domaine dans l'espace de q variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_q$ et D' un domaine dans l'espace de p variables complexes $y_1, y_2, \cdots, y_p$ $(p\geqq 1)$. Soit E un ensemble pseudoconcave d'ordre q dans le domaine (D, D'). Supposons que la projection de E sur l'espace $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ se trouve dans l'intérieur complet de D' et qu'il existe un ensemble e dans D de capacité non nulle, tel que, pour tout point $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$ de e, la section $E(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_q)$ de E par le plan linéaire $x_1=\xi_1, x_2=\xi_2, \cdots, x_q=\xi_q$ consiste en un nombre au plus dénombrable de points. Sous ces hypothèses, l'ensemble E est réunion au plus dénombrable d'ensembles analytiques généraux irréductibles, de dimension q, dans (D, D').*

Kônan Université

Bibliographie

[1] O. Fujita, Sur les familles d'ensembles analytiques, J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), 379-405.

[2] H. Grauert, Une notion de dimension cohomologique dans la théorie des espaces complexes, Bull. Soc. math. France, **87** (1959), 341-350.

[3] F. Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, Math. Ann., **62** (1906), 1-88.

[4] F. Hartogs, Über die aus den singulären Stellen einer analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen bestehended Gebilde, Acta Math., **32** (1909), 57-79.

[5] G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, Acta Math., **47** (1926), 53-115.

[6] E.E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse, Ann. Mat. Pura Appl., (3) **17** (1910), 61-87.

[7] T. Nishino, Sur les ensembles pseudoconcaves, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962), 225-245.

[8] K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc., J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, **4** (1934), 93-98.

[9] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables IX, Japan. J. Math., **23** (1953), 97-155.

[10] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables X, Japan. J. Math., **32** (1962), 1-12.

[11] W. Rothstein, Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlischen, Math. Ann., **129** (1955), 96-138.