J. Math. Soc. Japan
Vol. 16, No. 3, 1964

Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristique multiple

Par Yujiro OHYA

(Reçu le 30 mars, 1964)

1. Introduction.

Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques est déjà classique ; nous dirons que l'équation kowalewskienne

$$\mathcal{L}[u]=\frac{\partial^m}{\partial t^m}u(x,t)+\sum_{\substack{i+|\nu|\leqq m\\ i\leqq m-1}} a_{\nu,i}(x,t)\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\nu_1}\cdots\Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\nu_n}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{i}u(x,t) =f(x,t) \tag{1.1}$$

est hyperbolique, si cette équation a une et une seule solution $u(x, t)$ pour toutes les données initiales et le second membre supposés indéfiniment différentiables.

Soient $\lambda_i(x, t; \xi)$ les racines caractéristiques de l'équation caractéristique associée à (1.1) ;

$$p(x,t;\ \xi,\lambda)=\lambda^m+\sum_{i+|\nu|=m} a_{\nu,i}(x,t)\xi^\nu\lambda^i=0\,. \tag{1.2}$$

Alors on sait que, si toutes les racines sont réelles et distinctes, cette équation est hyperbolique. Voir à ce sujet les travaux de M. Leray [**7**], M. Gårding [**2**] et M. Mizohata [**8**], [**9**]. Mais, si l'on ne suppose plus que les λ_i sont distinctes, nous savons très peu. A ce propos, nous devrions signaler que récemment M. Yamaguti [**14**] a traité ce problème en se servant des opérateurs intégraux singuliers. Mais, si on veut envisager sur le domaine de dépendence, on ne sait pas si cette équation a le domaine de dépendence fini. Comme la question est tellement difficile, on pourrait dire que, dans le cas de plusieurs dimensions, elle est encore restée ouverte. Dans le cas de $n=1$, nous savons le résultat assez complet de M^{me}. Lax [**6**].

D'autre part, nous savons que, d'après M^{me}. Kowalewski, pour les équations du type (1.1), il existe une et une seule solution analytique si $a_{\nu,i}(x, t)$, $f(x, t)$ et les données de Cauchy sont des fonctions analytiques en (x, t). Et puis, M. Gevrey [**3**] a étendu ce résultat aux équations d'order 2 du type parabolique, en introduisant une classe de fonctions indéfiniment différentiables. (Voir aussi, M. Hörmander [**4**].)

DÉFINITION 1.1. *Espace* $\gamma^{(\alpha)}_{\mathrm{loc}}$, $\gamma^{(\alpha)}$ $(\alpha>1)$.

Nous dirons qu'une fonction $\varphi(x) \in (\mathcal{E})$[1] appartient à la classe $\gamma_{\mathrm{loc}}^{(\alpha)}$, si, pour tout compact K, il existe deux constantes positives ρ et C, dépendant en général de K; telles que

$$(1.3) \qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p \varphi(x)\right| \leq \frac{|p|!^\alpha}{\rho^{|p|}} C \text{ pour tout } x \in K, \text{ et pour tout } p=(p_1, \cdots, p_n).$$

Nous dirons que $\varphi(x) \in \gamma^{(\alpha)}$, si (1.3) a lieu pour tout x.

Pour simplifier l'éxposition, nous donnons la

DÉFINITION 1.2. (*Hyperbolicité formelle.*) Nous dirons que l'équation (1.1) est formellement hyperbolique si toutes les racines sont réelles, et de plus, leurs multiplicités sont invariantes:

$$(1.4) \qquad p(x, t ; \xi, \lambda)=(\lambda-\lambda_1(x, t ; \xi))^{\nu_1}(\lambda-\lambda_2(x, t ; \xi))^{\nu_2} \cdots (\lambda-\lambda_k(x, t ; \xi))^{\nu_k}$$

où

$$\lambda_1(x, t ; \xi)<\lambda_2(x, t ; \xi)< \cdots <\lambda_k(x, t ; \xi).$$

Dans cet article, nous allons toujours supposer que $\mathcal{L}$ soit formellement hyperbolique. Soit $\Omega=R^n \times [0, h]$, $h>0$. On suppose que

(1.5)
- 1° Les coefficients $\in \gamma_{\mathrm{loc}}^{(\alpha)}$,
- 2° Les coefficients $a_{\nu, i}(x, t)$, $|\nu|+i=m$, sont bornés dans Ω. Par conséquent, $\lambda_i(x, t ; \xi)$ sont bornés dans Ω.
- 3° $\mathcal{L}$ est formellement hyperbolique.

Enonçons maintenent un de nos résultats.

THÉORÈME 1.1. *On suppose dans* (1.5)[2] $1<\alpha<\dfrac{m}{m-1}$. *Etant donnés le second membre* $f(x, t) \in \gamma_{\mathrm{loc}}^{(\alpha)}$, *et la donnée initiale* $\left(u(x, 0), \cdots, \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u(x, 0)\right) \in \gamma_{\mathrm{loc}}^{(\alpha)}$, *il existe une solution* $u(x, t)$ *dans* Ω *de* (1.1) *appartenant à la classe* $\gamma_{\mathrm{loc}}^{(\alpha)}$, *et cette solution est unique dans la classe* $\mathcal{E}^m(\Omega)$[3].

Voici notre plan de démonstration: Nous allons d'abord démontrer le théorème 1.1 sous la forme plus réstrictive. A savoir, on suppose que, dans (1.5), les coefficients $\in \gamma^{(\alpha)}$, au lieu de $\gamma_{\mathrm{loc}}^{(\alpha)}$. La même restriction sur le second membre et la donnée initiale: $f(x, t) \in \gamma^{(\alpha)} \cap \mathcal{D}_{L^2}^{\infty}[0, h]$, $\left(u(x, 0), \cdots, \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u(x, 0)\right) \in \gamma^{(\alpha)} \cap \mathcal{D}_{L^2}^{\infty}$. Ensuite, en utilisant ce résultat, nous démontrons que $\mathcal{L}$, sous

---

1) Voir L. Schwartz [**13**].

2) On suppose que cette condition est encore vérifiée dans un voisinage de l'hyperplan $t=0$.

3) $\mathcal{E}^m(\Omega)$ signifie, par abus de langage, l'espace des fonctions m-fois continûment différentiable dans $\bar{\Omega}$.

l'hypothèse (1.5), a le domaine de dépendence fini. Finalement, d'après le procédé de la partition de l'unité, nous pouvons parvenir au théorème 1.1.

Nous utiliserons l'opérateur d'intégrale singulière (MM. Calderón et Zygmund [**1**]) et le lemme de M. Sobolev qui nous autorise d'évaluer les dérivées successives au sens de L^2. ($\| \cdots \|$ singnifie la norme de L^2_x dans la suite.)

REMARQUE 1.1. (*Lemme de Sobolev.*) Il existe une constante positive $c(n)$ dépendant seulement de la dimension n de l'espace telle que

$$\sup_x |u(x)| \leqq c(n)\Big(\sum_{|\nu| \leqq [\frac{n}{2}]+1} \Big\| \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\nu u(x) \Big\| \Big). \tag{1.6}$$

REMARQUE 1.2. (*Inégalité d'énergie.*) Soit $H(t)$ un opérateur d'intégrale singulière à symbole réel dépendant continûment de t dans l'espace $\mathcal{L}(L^2, L^2)$. Alors, la solution $w(x, t) \in L^2[0, h]$ de

$$\Big(\frac{d}{dt} - iH\Lambda\Big) w(x, t) = f(x, t) \in L^2[0, h]$$

satisfait à l'inégalité

$$\| w(x, t) \|_t' \leqq \gamma_0 \| w(x, t) \| + \| f(x, t) \| \tag{1.7}$$

où γ_0 est une constante telle que

$$\| (iH)\Lambda - \Lambda(iH^*) \|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leqq \gamma_0 .$$

Nous tenons à exprimer notre gratitude à M. S. Mizohata pour ses suggestions. Aussi, l'auteur exprime son remerciement à M. M. Yamaguti pour son encouragement continuel.

2. Existence de solutions.

Considérons l'opérateur d'intégrale singulière, associé à $p(x, t\,; \xi, \lambda)$,

$$L = \prod_{j=1}^{k} \Big(\frac{d}{dt} - iH_j\Lambda\Big)^{\nu_j}, \qquad \prod_{j=1}^{k} \nu_j = m \tag{2.1}$$

où le symbole de H_j, $\sigma(H_j) = \lambda_j(x, t\,; \xi)$.

Posons $\mathcal{L} = p + q$, $p - L = S$.

Alors, en posant $M = -(S+q)$, nous voulons résoudre l'équation

$$L[u] = f + M[u]. \tag{2.2}$$

Notre premier but est de montrer l'existence d'une solution $u(x, t) \in \mathcal{D}^\infty_{L^2}[0, h]$ de l'équation (2.2) avec la donnée initiale nulle et en même temps, nous allons montrer que cette solution $u(x, t) \in \gamma^{(\alpha)}_{x,t}$.

Nous allons construire la solution $u(x, t) \in \mathcal{D}^\infty_{L^2}[0, h]$ du problème de Cauchy pour l'équation de (2.2) avec la donnée nulle par la méthode d'approximation successive.

D'abord, on définit $u_0(x, t)$ comme la solution du problème de Cauchy :

$$L[u_0(x, t)] = f(x, t) \tag{2.3}$$

avec les données initiales nulles.

Déterminons $u_1(x, t)$ comme il suit :

$$L[u_1(x, t)] = M[u_0(x, t)] \tag{2.4}$$

avec les données de Cauchy nulles.

En général, définissons $u_N(x, t)$ $(N \geqq 1)$ par

$$L[u_N(x, t)] = M[u_{N-1}(x, t)] \tag{2.5}$$

avec les données initiales nulles.

Si l'on regarde la somme formelle $\sum_{N=0}^{\infty} u_N(x, t)$, évidemment elle satisfait à l'équation (2.2) avec les données nulles.

Avant de montrer l'existence de la solution $u_0(x, t)$, voyons la propriété de $\gamma^{(\alpha)}$. Comme nous avons déjà remarqué dans le paragraphe précédent, les coefficients $a_{\nu,i}(x, t)$ de l'équation (1.1) sont des fonctions de cette classe.

D'autre part, les racines caractéristiques $\lambda_j(x, t\,;\,\xi)$ étant des fonctions algébriques de ses coefficients, elles dépendent analytiquement des $a_{\nu,i}(x, t)$. Si l'on combine ces deux faits, on peut affirmer que $\lambda_j(x, t\,;\,\xi) \in \gamma^{(\alpha)}_{x,t}$. (Voir M. Gevrey [**3**].)

Plus précisément, nous avons alors l'évaluation de la forme suivante,

$$\sup_{\substack{|\xi| \geqq 1 \\ |\mu| \leqq 2n \\ (x,t) \in R^n \times [0,h]}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} \lambda_j(x, t\,;\,\xi) \right| = c_{|\nu|} \leqq \frac{|\nu|\,!^{\alpha}}{(k\rho)^{|\nu|}} C \tag{2.6}$$

pour tout $\nu(\geqq 0)$, j, où C est une constante,
donc,

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} [iH] \right\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leqq M(n) c_{|\nu|} \leqq \frac{|\nu|\,!^{\alpha}}{k(\rho)^{|\nu|}} K, \tag{2.7}$$

$M(n)$ étant une constante dépendant seulement de la dimension de l'espace d'après Calderón et Zygmund [**1**].

Pour évaluer les dérivées successives de la forme iHw ou vw où $v, w \in \gamma^{(\alpha)}$, préparons un lemme concernant la propriété de fonctions de classe α, essentiellement dû à S. Mizohata [**10**].

LEMME 2.1. *Soit $a(x)$, $b(x) \in \gamma^{(\alpha)}$, c'est-à-dire, il existe deux constantes ρ, C telles que*

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p} a(x) \right| \leqq \frac{(r+|p|)\,!^{\alpha}}{(k\rho)^{(r+|p|)}} A,$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p} b(x) \right| \leqq \frac{(s+|p|)\,!^{\alpha}}{\rho^{(s+|p|)}} B$$

où $r, s(\geqq 0)$ et A, B sont constantes. Alors on a, pour $\alpha \geqq 1$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p [a(x)b(x)]\right| \leqq \frac{2}{(C_s^{r+s})^\alpha} \frac{(r+s+|p|)!^\alpha}{\rho^{(r+s+|p|)}} AB \tag{2.8}$$

où $k(\geqq 2)$ est une constante.

PREUVE. En effet, en appliquant la formule de Leibniz,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p [a(x)b(x)] = \sum_{q \leqq p} C_q^p \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q [a(x)] \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p-q} [b(x)].$$

Compte tenu de $\sum_{q \leqq p} C_q^p \cdots \leqq \sum_{u=0}^{|p|} C_u^{|p|} \cdots$,

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p [ab]\right| \leqq \sum_{u=0}^{|p|} C_u^{|p|} \frac{(r+u)!^\alpha}{(k\rho)^{r+u}} A \frac{(s+|p|-u)!^\alpha}{\rho^{(s+|p|-u)}} B$$

$$\leqq \frac{AB}{\rho^{(r+s+|p|)}} \sum_{u=0}^{|p|} (C_u^{|p|}(r+u)!\,(s+|p|-u)!)^\alpha \frac{1}{k^{r+u}}.$$

Mais, $C_u^{|p|}(r+u)!\,(s+|p|-u)! = C_u^{|p|}(r+s+|p|)!/C_{s+u}^{r+s+|p|} \leqq (r+s+|p|)!/C_s^{r+s}$, car $C_{s+u}^{r+s+|p|} \geqq C_u^{|p|} C_s^{r+s}$, donc on a

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p [ab]\right| \leqq \frac{AB}{\rho^{(r+s+|p|)}} \frac{(r+s+|p|)!^\alpha}{(C_s^{r+s})^\alpha} \sum_{u=0}^{|p|} \frac{1}{k^{r+u}}$$

$$\leqq \frac{(r+s+|p|)!^\alpha}{\rho^{(r+s+|p|)}} \frac{2}{(C_s^{r+s})^\alpha} AB.$$

c. q. f. d.

Pour évaluer $u_0(x, t)$, décomposons l'opérateur L en système d'évolution de l'opérateur d'intégrale singulière, en posant $\left(\frac{d}{dt} - iH_k\Lambda\right)u_0 = v_{m-1}, \cdots$, $\left(\frac{d}{dt} - iH_1\Lambda\right)v_1 = f$ successivement,

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d}{dt} - iH_k\Lambda\right)u_0 = v_{m-1} \\ \left(\frac{d}{dt} - iH_{k-1}\Lambda\right)v_{m-1} = v_{m-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{d}{dt} - iH_1\Lambda\right)v_1 = f \end{array}\right. \tag{2.9}$$

avec les données nulles.

Pour ce système d'évolution, le travail de S. Mizohata [8] nous assure l'existence de solutions dans $(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$. Maintenant, il nous faut montrer deux lemmes suivants.

LEMME 2.2. *Considérons le problème de Cauchy pour l'équation d'évolution de l'opérateur d'intégrale singulière*

$$\left(\frac{d}{dt} - iH\Lambda\right)w(x, t) = f(x, t) \quad avec \quad w(x, 0) = 0. \tag{2.10}$$

Notons $|f|_p=\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p f(x,t)\right\|$.

En supposant que, r, s deux constantes ($\geqq 0$) *quelconques,*

$$|[iH]|_p=\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p \sigma[iH](x,t;\xi)\right\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)}\leqq\frac{(|p|-1)!^\alpha}{(k\rho)^{(|p|-1)}}K \tag{2.11}$$

$$|f|_p\leqq\frac{t^s}{s!}\frac{(r+|p|)!^\alpha}{\rho^{(r+|p|)}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|}A$$

où $K(t)=(1+\gamma_1 t)\exp[\gamma_1 t]$, $\gamma_1=nK$ *et* $k(\geqq 2)$, *K, A étant constantes. Alors*

$$|w|_p\leqq 2\frac{t^{s+1}}{(s+1)!}\frac{(r+|p|)!^\alpha}{\rho^{(r+|p|)}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|}A. \tag{2.12}$$

Preuve. Utilisons la récurrence sur $|p|$. L'inégalité (1.7) nous donne

$$(|w|_0)'_t\leqq\gamma_0|w|_0+|f|_0,$$

donc

$$|w|_0\leqq\int_0^t\exp[\gamma_0(t-\tau)]|f(\tau)|_0 d\tau$$

qui prouve notre lemme pour $|p|=0$.

En supposant que (2.12) soit vrai pour tout q tel que $|q|\leqq|p|-1$, montrons sa validité dans le cas où $|q|=|p|$.

La dérivation $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p$ de (2.10) prend la forme

$$\left(\frac{d}{dt}-iH\Lambda\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p w=\sum_{i=1}^n p_i\frac{\partial}{\partial x_i}[iH]\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p-e_i}w+\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p f$$
$$+\sum_{q\leqq p-2}C_q^p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p-q}[iH]\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q w$$

où $e_i=(0,\cdots,\overset{(i)}{1},\cdots,0)$ et $\Lambda=\sum_{j=1}^n R_j\frac{\partial}{\partial x_j}$, R_j étant l'opérateur de Riesz. Si l'on pose $\varphi_l(t)=\max_{|p|=l}|w|_p$, on a

$$\varphi_l(t)'\leqq(\gamma_0+l\gamma_1)\varphi_l(t)+|f|_p+\sum_{|q|\leqq|p|-2}C_q^p|[iH]|_{p-q}n\varphi_{|q|+1}(t).$$

Par conséquent,

$$\varphi_l(t)\leqq\int_0^t\exp[(\gamma_0+l\gamma_1)(t-\tau)]\{|f(\tau)|_p+n\sum_{|q|\leqq|p|-2}C_q^p|[iH]|_{p-q}\varphi_{|q|+1}(\tau)\}d\tau,$$

nons avons, par l'hypothèse de récurrence

$$\varphi_l(t)\leqq\int_0^t\exp[(\gamma_0+l\gamma_1)(t-\tau)]\Big\{\frac{\tau^s}{s!}\frac{(r+|p|)!^\alpha}{\rho^{(r+|p|)}}\exp[(\gamma_0+l\gamma_1)\tau](1+\gamma_1\tau)^l A$$
$$+\sum_{|q|\leqq|p|-2}C_q^p\frac{(l-|q|-1)!^\alpha}{(k\rho)^{(l-|q|-1)}}\gamma_1\frac{2\tau^{s+1}}{(s+1)!}\frac{(r+|q|+1)!^\alpha}{\rho^{(r+|q|+1)}}$$

$$\exp[(\gamma_0+(|q|+1)\gamma_1)\tau](1+\gamma_1\tau)^{|q|+1}A\Big\}d\tau\,.$$

Le premier terme du second membre étant majoré par $\dfrac{t^{s+1}}{(s+1)!}\dfrac{(r+|p|)!^{\alpha}}{\rho^{(r+|p|)}}$ $\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|}A$, son deuxième terme est plus petit que

$$\exp[(\gamma_0+|p|\gamma_1)t](1+\gamma_1 t)^{|p|}A\frac{(r+|p|)!^{\alpha}}{\rho^{(r+|p|)}}\frac{t^{s+1}}{(s+1)!}\Big(\sum_{u=1}^{l-1}\frac{1}{k^{l-u}}\Big)\frac{2\gamma_1 t}{(1+\gamma_1 t)(s+2)}$$

$$\leqq\frac{t^{s+1}}{(s+1)!}\frac{(r+|p|)!^{\alpha}}{\rho^{(r+|p|)}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|}A\,,$$

compte tenu de $s\geqq 0$, $k\geqq 2$. D'où nous avons

$$|w|_p\leqq 2\frac{t^{s+1}}{(s+1)!}\frac{(r+|p|)!^{\alpha}}{\rho^{(r+|p|)}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|}A\,.$$

c. q. f. d

LEMME 2.3. *Sous les mêmes hypothèses sur H_j $(1\leqq j\leqq m)$ et f que dans le lemme 2.2, la solution $v_{m-j}(x,t)$ du problème de Cauchy avec la donnée $v_1(x,0)$ $=\cdots=v_m(x,0)=0$ pour le système d'équation d'évolution.*

$$\text{(2.12)}\qquad\begin{cases}\Big(\dfrac{d}{dt}-iH_mA\Big)v_m=v_{m-1}\\ \quad\vdots\\ \Big(\dfrac{d}{dt}-iH_{m-j}A\Big)v_{m-j}=v_{m-j-1}\\ \quad\vdots\\ \Big(\dfrac{d}{dt}-iH_1A\Big)v_1=f\end{cases}$$

satisfait à l'inégalité

$$\text{(2.13)}\qquad |v_{m-j}|_p\leqq 2^{m-j}\frac{t^{s+m-j}}{(s+m-j)!}\frac{(r+|p|)!^{\alpha}}{\rho^{(r+|p|)}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|}A$$

$$\textit{pour}\quad 0\leqq j\leqq m-1\,.$$

Cette preuve est tout à fait analogue à celle du lemme 2.2. Car, $|v_1|_p$ étant déjà obtenu dans le lemme précédent, il suffit de l'utiliser pour la majoration $|v_2|_p$, en regardant $2A$ constante au lieu de A, etc.

Les deux lemmes ci-dessus nous assurent que notre solution avec la donnée nulle est majorée par

$$\text{(2.14)}\qquad |u_0|_p\leqq 2^m\frac{t^m}{m!}\frac{|p|!^{\alpha}}{\rho^{|p|}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|}A$$

si l'on suppose

$$|[iH]|_p\leqq\frac{(|p|-1)!^{\alpha}}{(k\rho)^{(|p|-1)}}K$$

et

$$|f|_p\leqq\frac{|p|!^{\alpha}}{\rho^{|p|}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|}A\,.$$

Maintenant nous sommes en mesure de traiter l'opérateur M. Revenant à la relation (2.1) de L, on voit que L peut s'écrire comme une somme finie de la forme

$$(2.15) \qquad H_{i_1}\Lambda H_{i_2}\Lambda \cdots H_{i_p}\Lambda\left(\frac{d}{dt}\right)^{m-p} \quad \text{plus}$$

$$K_1\Lambda^{i_1}K_2\Lambda^{i_2}\cdots K_s\Lambda^{i_s}\left(\frac{d}{dt}\right)^j \quad \text{où} \quad 0 \leqq i_1+\cdots+i_s+j \leqq m-1$$

où K_j est un opérateur qui se déduit par les dérivations en t des $H_s(s=1, 2, \cdots, k)$. Nous voulons déterminer la forme correspondant à $p-L$. Pour cela, on va montrer le

LEMME 2.4. *Soient $H_j(1 \leqq j \leqq k)$ les opérateurs d'intégrale singulière. Alors*

$$(2.16) \qquad (H_1 \circ H_2 \circ \cdots \circ H_k)\Lambda^k - (H_1H_2\cdots H_k)\Lambda^k$$
$$= \textit{combinaisons linéaires de la forme}$$
$$P_1\Lambda^{i_1}P_2\Lambda^{i_2}\cdots P_l\Lambda^{i_l}, \qquad i_1+i_2+\cdots+i_l \leqq k-1,$$

où P_j est l'une des formes suivantes:

$$(2.17) \qquad \begin{cases} H_j, \quad H_{i_1}\circ H_{i_2}\circ\cdots\circ H_{i_j} \,(=H_{i_1i_2\cdots i_j}), \quad \Lambda H_j - H_j\Lambda, \\ (H_i\circ H_j - H_iH_j)\Lambda, \quad \Lambda(H_i\circ H_j - H_iH_j), \quad (H_i\circ H_{i_1i_2\cdots i_j} - H_iH_{i_1i_2\cdots i_j})\Lambda, \\ \Lambda(H_i\circ H_{i_1i_2\cdots i_j} - H_iH_{i_1i_2\cdots i_j}). \end{cases}$$

PREUVE. Montrons par la récurrence sur k. Supposons que (2.16) soit vrai pour $k-1$, alors la différence

$$H_1H_2\cdots H_k\Lambda^k - H_1\cdots H_{k-1}\Lambda^{k-1}H_k\Lambda$$

peut s'écrire

$$\begin{aligned} &= (H_1\cdots H_{k-1})(H_k\Lambda - \Lambda H_k)\Lambda^{k-1} \\ &\quad + (H_1\cdots H_{k-1})\Lambda(H_k\Lambda - \Lambda H_k)\Lambda^{k-2} \\ &\quad + \cdots + (H_1\cdots H_{k-1})\Lambda^{k-2}(H_k\Lambda - \Lambda H_k). \end{aligned}$$

Donc, par l'hypothèse de récurrence

$$H_1H_2\cdots H_k\Lambda^k = H_1\circ H_2\circ\cdots\circ H_{k-1}\Lambda^{k-1}H_k\Lambda + P_1\Lambda^{i_1}P_2\Lambda^{i_2}\cdots P_l\Lambda^{i_l}H_k\Lambda$$

où $i_1+i_2+\cdots+i_l \leqq k-2$, de plus, son premier terme, en posant $H_0\circ\cdots\circ H_{k-1} = H_{12\cdots(k-1)}$,

$$\begin{aligned} &H_{12\cdots(k-1)}\Lambda^{k-1}H_k\Lambda - H_{12\cdots(k-1)}\circ H_k\Lambda^k \\ &\quad = (H_{12\cdots(k-1)}\Lambda^{k-1}H_k\Lambda - H_{12\cdots(k-1)}H_k\Lambda^k) \\ &\qquad + (H_{12\cdots(k-1)}H_k - H_{12\cdots(k-1)}\circ H_k)\Lambda\Lambda^{k-1} \end{aligned}$$

c. q. f. d.

D'autre part, en tenant compte de $\sigma[H_j](x, t; \xi) = \lambda_j(x, t; \xi)$ et de (2.7), nous avons de même

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu [iH_j]\Lambda - \Lambda\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu [iH_j]\right)\right\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leqq M(n)c_{|\nu|},$$

$c_{|\nu|}$ étant celle de (2.7).

Le même principe que le lemme 2.1 montre la

PROPOSITION 2.1. *Soient H_j, H_{ij} les opérateurs d'intégrale singulière tels que ses symboles $\in \gamma^{(\alpha)}$. Alors, les opérateurs de la forme de* (2.17) *ont la propriété suivante: Si $|v|_p \leqq \frac{(r+|p|)!^\alpha}{\rho^{(r+|p|)}} A$, alors on a $|Pv|_p \leqq \frac{(r+|p|)!^\alpha}{\rho^{(r+|p|)}} AC$ où C est une constante et P est l'un quelconque des opérateurs de* (2.17).

Alors

PROPOSITION 2.2. *En supposant que $u_0(x, t)$ est une solution de l'équation* (2.3)

$$M[u_0] = \sum_{j=0}^{m-1} C_j v_{m-j}$$

où v_{m-j} étant celle de (2.12) *et C_j ayant la propriété suivante.*

Si $|v|_p \leqq \frac{t^s}{s!} \frac{(r+|p|)!^\alpha}{\rho^{(r+|p|)}} \exp[\gamma_0 t] K(t)^{|p|} A,$

$$\text{(2.18)} \quad \textit{alors } |C_j v|_p \leqq const. \frac{t^s}{s!} \frac{(r+|p|+m-1-j)!^\alpha}{(r+|p|+m-1-j)} \exp[\gamma_0 t] K(t)^{|p|+m-1-j} A.$$

PREUVE. En effet, de la relation (2.12) où $v_m = u_0$.

$$\frac{d}{dt} u_0 = iH_m \Lambda u_0 + v_{m-1},$$

donc on a

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 u_0 = iH_m \Lambda \left(\frac{d}{dt}\right) u_0 + i \frac{d}{dt}(H_m) \Lambda u_0 + \frac{d}{dt} v_{m-1}$$

$$= iH_m \Lambda (iH_m \Lambda u_0 + v_{m-1}) + i \frac{d}{dt}(H_m) \Lambda u_0 + \frac{d}{dt} v_{m-1}$$

c'est-à-dire

$$= c_0' \Lambda^2 u_0 + c_1' \Lambda u_0 + c_2' \Lambda v_{m-1} + c_3' v_{m-2}.$$

Ainsi de suite, on arrive à

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k u_0 = \sum_{j=0}^{k} c_j^k (\Lambda+1)^{k-j} v_{m-j},$$

où les opérateurs c_j^k ont la même proprieté démontrée dans la proposition (1.2) pour les opérateurs (2.17).

D'autre part, du lemme 2.4, M peut s'écrire comme suit:

$$M = \sum P_1 \Lambda^{i_1} P_2 \Lambda^{i_2} \cdots P_s \Lambda^{i_s} \left(\frac{d}{dt}\right)^k \quad \text{où} \quad i_1 + \cdots + i_s + k \leqq m-1.$$

Donc, il est facile de voir

$$M[u_0] = \sum_{j=0}^{m-1} C_j v_{m-j},$$

où l'on pose

$$C_j = c_j (\Lambda+1)^{m-1-}. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

LEMME 2.5. *Sous les mêmes hypothèses que le lemme 2.3,*

$$(2.19)\qquad |M[v_m]|_p \leqq C\sum_{i=0}^{m-1} 2^{m-i}\frac{t^{s+m-i}}{(s+m-i)!}\frac{(r+|p|+m-1-i)!^{\alpha}}{\rho^{(r+|p|+m-1-i)}}$$
$$\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+m-1-i}A$$

où C est une constante convenablement choisie.

PREUVE. Si l'on combine l'évaluation de v_{m-j} dans (2.13) à (2.18) de la Proposition 2.2, on a

$$|C_j v_{m-j}|_p \leqq 2^{m-j}C\frac{t^{s+m-j}}{(s+m-j)!}\frac{(r+|p|+m-1-j)!^{\alpha}}{\rho^{(r+|p|+m-1-j)}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+m-1-j}A$$

d'où découle immédiatement notre lemme. c. q. f. d.

Nous obtenons, comme le cas particulier $r=s=0$ du lemme 2.5, à fortiori

$$(2.20)\qquad |M[u_0]|_p \leqq 2^m C\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^{m-i}}{(m-i)!}\frac{(|p|+m-1-i)!^{\alpha}}{\rho^{(|p|+m-1-i)}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+m-1}A\,,$$

car $K(t)\geqq 1$.

En utilisant cette majoration au lieu de $|f|_p$ dans les lemmes 2.2 et 2.3, nous pouvons trouver une majoration de $|u_1|_p$.

En effet, en posant dans (2.11) $s=m-i$, $r=m-1-i$ et $2^m A$ au lieu de A, nous avons, compte tenu de (2.13) où $j=0$,

$$(2.21)\qquad |u_1|_p \leqq 2^m C\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^{m-i+m}}{(m-i+m)!}\frac{(|p|+m-1-i)!^{\alpha}}{\rho^{(|p|+m-1-i)}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+m-1}2^m A$$
$$= C(2^m)^2\sum_{i=0}^{m-1}\frac{t^{m-i+m}}{(m-i+m)!}\frac{(m-1-i+|p|)!^{\alpha}}{\rho^{(m-1-i+|p|)}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+m-1}A\,.$$

De plus, en observant que nous avons obtenu (2.19) de (2.13) et en posant $s=m-i$, $r=m-1-i$ dans (2.19),

$$|M[u_1]|_p \leqq (C2^m)^2\sum_{i=0}^{m-1}\left\{\left(\sum_{j=0}^{m-1}\frac{t^{m-i+m-j}}{(m-i+m-j)!}\frac{(m-1-i+|p|+m-1-j)!^{\alpha}}{\rho^{(m-1-i+|p|+m-1-j)}}\right)\right.$$
$$\left.\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+m-1}\right\}K(t)^{m-1}A\,.$$

En rangeant cette somme double suivant les puissances de t, nous avons

$$(2.22)\qquad |M[u_1]|_p \leqq (C2^m)^2 m\sum_{i=2}^{2m}\frac{t^i}{i!}\frac{(|p|+i-2)!^{\alpha}}{\rho^{(|p|+i-2)}}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+2(m-1)}A\,.$$

De proche en proche, nous obtenons la

PROPOSITION 2.3. *La solution $u_N(x, t)$ de $L[u_N]=M[u_{N-1}]$ avec la donnée initiale nulle satisfait à l'inégalité*

$$(2.23)\qquad |u_N|_p \leqq C^N(2^m)^{N+1}m^{N-1}\sum_{i=N}^{Nm}\left\{\frac{t^{i+m}}{(i+m)!}\frac{(|p|+i-N)!^{\alpha}}{\rho^{(|p|+i-N)}}\right\}$$
$$\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+N(m-1)}A\,,$$

$$(2.24)\qquad |M[u_N]|_p \leqq (C2^m)^{N+1} m^N \sum_{i=N+1}^{(N+1)m} \left\{ \frac{t^i}{i\,!} \frac{(|p|+i-N-1)\,!^{\alpha}}{\rho^{(|p|+i-N-1)}} \right\} \exp[\gamma_0 t] K(t)^{|p|+(N+1)(m-1)} A\,.$$

PREUVE. Evidemment, pour $N=0$, notre majoration coïncide à (2.14) et (2.20) respectivement. Supposons que (2.24) soit vrai pour $N-1$, c'est-à-dire

$$|M[u_{N-1}]|_p \leqq (C2^m)^N m^{N-1} \sum_{i=N}^{Nm} \left\{ \frac{t^i}{i\,!} \frac{(|p|+i-N)\,!^{\alpha}}{\rho^{(|p|+i-N)}} \right\} \exp[\gamma_0 t] K(t)^{|p|+N(m-1)} A\,.$$

En s'appuyant sur le lemme 2.3 où l'on suppose $s=i$, $r=i-N$, on déduit de (2.13) avec $j=0$

$$|u_N|_p \leqq (C2^m)^N m^{N-1} \left[2^m \sum_{i=N}^{Nm} \left\{ \frac{t^{i+m}}{(i+m)\,!} \frac{(|p|+i-N)\,!^{\alpha}}{\rho^{(|p|+i-N)}} \right\} \right] \exp[\gamma_0 t] K(t)^{|p|+N(m-1)} A\,,$$

ce qui prouve la validité de (2.23) pour N.

De plus, il montre que (2.24) est vrai aussi pour N. En effet, en posant dans (2.13) $j=0$, $s=i$ et $r=i-N$, on déduit de (2.19)

$$|M[u_N]|_p \leqq C^N (2^m)^{N+1} m^{N-1} \sum_{i=N}^{Nm} \left[C \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ \frac{t^{i+m-j}}{(i+m-j)\,!} \frac{(|p|+i-N+m-1-j)\,!^{\alpha}}{\rho^{(|p|+i-N+m-1-j)}} \right\} \right]$$
$$\exp[\gamma_0 t] K(t)^{|p|+(N+1)(m-1)} A\,,$$

en posant $m-j=k$,

$$= (C2^m)^{N+1} m^{N-1} \sum_{i=N}^{Nm} \sum_{k=1}^{m} \left\{ \frac{t^{i+k}}{(i+k)\,!} \frac{(|p|+i+k-N-1)\,!^{\alpha}}{\rho^{(|p|+i+k-N-1)}} \right\}$$
$$\exp[\gamma_0 t] K(t)^{|p|+(N+1)(m-1)} A\,.$$

Le même procédé, déjà utilisé pour obtenir (2.22), d'arrangement suivant les puissances de t montre (2.24) c. q. f. d.

Abordons à vérifier que les séries majorantes sont uniformément convergentes. Pour simplifier, posons $B=C2^m m$ et $A'=2^m A/m$. Alors

$$(2.25)\qquad |u_N|_p \leqq (BK(t)^{m-1})^N \sum_{i=N}^{Nm} \left\{ \frac{t^{i+m}}{(i+m)\,!} \frac{(|p|+i-N)\,!^{\alpha}}{\rho^{(|p|+i-N)}} \right\} \exp[\gamma_0 t] K(t)^{|p|} A'\,.$$

En comptant tenu de $u(x,t) = \sum_{N=0}^{\infty} u_N(x,t)$,

$$(2.26)\qquad \begin{aligned} |u|_p &\leqq \sum_{N=0}^{\infty} |u_N|_p \\ &\leqq \sum_{N=0}^{\infty} (BK(t)^{m-1})^N \sum_{i=N}^{Nm} \left\{ \frac{t^{i+m}}{(i+m)\,!} \frac{(|p|+i-N)\,!^{\alpha}}{\rho^{(|p|+i-N)}} \right\} \exp[\gamma_0 t] K(t)^{|p|} A'\,. \end{aligned}$$

Pour développer (2.26) suivant les puissances de t, cherchons les termes contenant t^{i+m}. D'abord, dans les séries majorantes de $|u_N|_p$, ce qui contient t^{i+m} comme le premier terme est $|u_i|_p$ et ce qui le contient comme le dernier terme est $|u_{[\frac{i}{m}]}|_p$[4]. Donc, les coefficients de $\dfrac{t^{i+m}}{(i+m)!}$ sont

$$(2.27)\qquad \frac{|p|!^\alpha}{\rho^{|p|}}(BK(t)^{m-1})^i+\frac{(|p|+1)!^\alpha}{\rho^{(|p|+1)}}(BK(t)^{m-1})^{i-1}$$
$$+\cdots+\frac{\left(|p|+(m-1)\left[\frac{i}{m}\right]\right)!^\alpha}{\rho^{\left(|p|+(m-1)\left[\frac{i}{m}\right]\right)}}(BK(t)^{m-1})^{\left[\frac{i}{m}\right]}.$$

Mais, évidemment $\dfrac{(|p|+k)!^\alpha}{\rho^{(|p|+k)}}\leqq\dfrac{(|p|+j)!^\alpha}{\rho^{(|p|+j)}}$ pour $k\leqq j$, (2.27) est majoré par, à fortiori

$$\frac{\left(|p|+(m-1)\left[\frac{i}{m}\right]\right)!^\alpha}{\rho^{\left(|p|+(m-1)\left[\frac{i}{m}\right]\right)}}\sum_{j=0}^{i}(BK(t)^{m-1})^j$$
$$\leqq\frac{\left(|p|+(m-1)+(m-1)\left[\frac{i}{m}\right]\right)!^\alpha}{\rho^{\left(|p|+m+(m-1)\left[\frac{i}{m}\right]\right)}}(BK(t)^{m-1})^{i+1}.$$

En conséquent

$$(2.28)\qquad |u|_p\leqq\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\frac{t^{i+m}}{(i+m)!}\frac{\left(|p|+(m-1)+(m-1)\left[\frac{i}{m}\right]\right)!^\alpha}{\rho^{\left(|p|+(m-1)+(m-1)\left[\frac{i}{m}\right]\right)}}\right\}(BK(t)^{m-1})^{i+1}$$
$$\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|}A'.$$

Compte tenu de $(\alpha^\alpha)^x x!\sim x^{\frac{\alpha-1}{2}}(\alpha x)!$[5] par la formule de Stirling et $\left[\frac{i}{m}\right]\leqq\frac{i}{m}$, si l'on pose $\alpha\dfrac{m-1}{m}=\varepsilon$, on a

$$|u|_p\leqq\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^{i+m}}{(i+m)!}\frac{(\alpha|p|+m+\varepsilon i)!}{\rho^{(|p|+m+i)}}(BK(t)^{m-1})^{i+1}\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|}A'$$

où $\dfrac{m-1}{m}<\varepsilon\leqq 1$, d'après notre hypothèse sur α et $\Gamma(x+1)=x!$ pour x non entier.

En posant $\dfrac{B}{\rho}\max\limits_t K(t)^{m-1}=C$ et $\dfrac{\max\limits_t K(t)}{\rho}=C_1$, à fortiori,

$$\leqq\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(Ct)^{i+m}}{(i+m)!}C_1^{|p|}(\alpha|q|+m+\varepsilon i)!\,A'$$
$$=C_1^{|p|}(\alpha|p|)!\sum_{i=0}^{\infty}(Ct)^{i+m}\frac{(\alpha|p|+m+\varepsilon i)!\,((1-\varepsilon)i)!}{(i+m)!\,(\alpha|p|)!\,((1-\varepsilon)i)!}A'$$

4) $[k]$ signifie le plus grand entier inférieur à k.

5) $a(x)\sim b(x)$ signifie $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a(x)}{b(x)}=\text{const.}\neq 0$.

$$\leqq (\alpha|p|)!\,(2^\alpha C_1)^{|p|}\sum_{i=0}^{\infty}(2Ct)^{i+m}\frac{1}{((1-\varepsilon)i)!}A'$$

en tenant compte de $(\alpha|p|+m+\varepsilon i)!\,((1-\varepsilon)i)!\leqq(\alpha|p|+m+i)!$ à cause de $\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}=B(s,t)<1$ pour $s, t\geqq 1$ et $(\alpha|p|+m+i)!\leqq 2^{\alpha|p|+m+i}$.

Donc, nous avons montré

$$(2.29)\qquad |u|_p\leqq(\alpha|p|)!\,(2^\alpha C_1)^{|p|}A''\ \begin{cases}\text{pour } 0\leqq t\leqq h \text{ dans le cas } \varepsilon<1,\\ \text{pour } 0\leqq t\leqq h_0\ (<h) \text{ dans le cas } \varepsilon=1.\end{cases}$$

Jusqu'à maintenant, notre attention était consacrée à évaluer les dérivées successives en x seulement.

En ce moment, vérifions que $u(x, t)$ est aussi de fonctions de classe α en t.

D'abord remarquons que $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^j u(x,t)$, $0\leqq j\leqq m-1$, est une fonction de classe α, car, si nous désignons par $v_{m-j}^{(N)}$ correspondant à u_N au lieu de v_{m-j} dans (2.12), nous avons $\left(\dfrac{d}{dt}\right)^k u_N=\sum_{j=0}^{k}C_j^k v_{m-j}^{(N)}$, $k=0, 1, \cdots, m-1$, où C_j^k a la propriété suivante: si

$$|v_{m-j}^{(N)}|_p\leqq(C2^m)^N m^{N-1}2^{m-j}\sum_{i=N}^{Nm}\left\{\frac{t^{i+m-j}}{(i+m-j)!}\frac{(|p|+i-N)!^\alpha}{\rho^{(|p|+i-N)}}\right\}$$
$$\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+N(m-1)}A,$$

alors

$$|C_j^k v_{m-j}^{(N)}|_p\leqq \text{const.}\,(C2^m)^N m^{N-1}2^{m-j}\sum_{i=N}^{Nm}\left\{\frac{t^{i+m-j}}{(i+m-j)!}\frac{(|p|+i-N+k-j)!^\alpha}{\rho^{(|p|+i-N+k-j)}}\right\}$$
$$\exp[\gamma_0 t]K(t)^{|p|+N(m-1)+k-j}A.$$

D'autre part, par le lemme de Sobolev (1.6), nous avons

$$\sup_x\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p u(x,t)\right|\leqq c(n)\sum_{|\nu|\leqq|p|+[\frac{n}{2}]+1}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu u(x,t)\right\|.$$

Ceci montre que l'évaluation au sens de L^2 nous donne l'évaluation au sens du maximum.

Donc, dans la suite, utilisons la notation $\left|\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^l u(x,t)\right|_p$ au sens de $\sup_{(x,t)\in R^n\times[0,h]}\left|\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^p\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^l u(x,t)\right|$. Alors, sur les dérivées supérieures en t, nous pouvons montrer la

PROPOSITION 2.4. *Supposons que $u(x, t)$ soit une solution de $\mathcal{L}[u(x,t)]=f(x,t)$ avec la donnée initiale nulle où C, K étant constantes. Supposons que*

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l a_{\nu,i}(x,t)\right|_p\leqq(|p|+l)!^\alpha\left(\frac{K}{2}\right)^{|p|}C$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l f(x,t)\right|_p\leqq(|p|+m+l)!^\alpha\ K^{|p|}(\gamma K)^l$$

soient remplies pour tout p, l et tout i, ν.

Si l'on suppose, de plus, pour $0 \leqq j \leqq m-1$,

$$\left|\left(\frac{\partial}{t\partial}\right)^j u(x,t)\right|_p \leqq (|p|+j)!^\alpha K^{|p|}(\gamma K)^j A$$

où A est une constante, et γ est assez grand, alors, nous avons, $0 \leqq j \leqq m-1$,

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m+j} u(x,t)\right|_p \leqq (|p|+m+j)!^\alpha K^{|p|}(\gamma K)^{j+m} A. \tag{2.30}$$

Preuve. Supposons que (2.30) était déjà montré pour $j \leqq m-2$. La formule de Leibniz nous donne, en opérant $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m+j} u = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f - \sum_{\substack{i+|\nu| \leqq m \\ i \leqq m-1}} \sum_{k=0}^{j} C_k^j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-k} [a_{\nu,i}(x,t)] \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{i+k} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu u$$

d'où l'on tire

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m+j} u\right|_p \leqq \left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f\right|_p + \sum_{\substack{i+|\nu| \leqq m \\ i \leqq m-1}} \sum_{k=0}^{j} C_k^i \left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-k} [a_{\nu,i}(x,t)] \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k+i} u\right|_p. \tag{2.31}$$

Par les hypothèses de récurrence

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-k} [a_{\nu,i}(x,t)]\right|_p \leqq (|p|+j-k)!^\alpha \left(\frac{K}{2}\right)^{|p|} C$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{i+k} u\right|_{p+\nu} \leqq (|p|+|\nu|+i+k)!^\alpha K^{|p|+|\nu|}(\gamma K)^{i+k} A.$$

Or, l'application du lemme 2.1 nous donne, en posant $r=j-k$, $s=|\nu|+i+k$,

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-k} [a_{\nu,i}] \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{i+k} u\right|_p$$
$$\leqq (|p|+|\nu|+i+j)!^\alpha K^{|p|+|\nu|}(\gamma K)^{i+k} \frac{2}{(C_{|\nu|+i+k}^{|\nu|+i+j})^\alpha} AC.$$

Donc, le deuxième terme du second membre peut être majoré par

$$(|p|+m+j)!^\alpha K^{|p|}(\gamma K)^{j+m} \sum_{\substack{i+|\nu| \leqq m \\ i \leqq m-1}} \sum_{k=0}^{j} C_k^j \left(\frac{1}{C_k^j}\right)^\alpha \gamma^{i-m+j-k} 2AC$$

compte tenu de $C_{|\nu|+i+k}^{|\nu|+i+j} \geqq C_k^j$ et $i+|\nu| \leqq m$, à fortiori, il est majoré encore par

$$(|p|+m+j)!^\alpha K^{|p|}(\gamma K)^{j+m} 2\frac{AC}{\gamma},$$

ce qui prouve notre proposition. c. q. f. d.

Finalement, nous devons traiter le cas où les données initiales sont des fonctions de classes α, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}[u(x, t)]=f(x, t) \quad \text{avec} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i u(x, 0)=\varphi_i(x) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq i \leqq m-1 .$$

En posant $g(x, t)=\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}\varphi_k(x)$, si l'on considère $v(x, t)=u(x, t)-g(x, t)$, alors $v(x, t)$ satisfait à l'équation

$$(2.31) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{L}[v(x, t)]=f(x, t)-\mathcal{L}[g(x, t)] \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i v(x, 0)=0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq i \leqq m-1 , \end{aligned}$$

qui entre dans notre cadre, car les données de Cauchy sont nulles et $f-\mathcal{L}[g]$ est une fonction connue $\in \gamma_{x,t}^{(\alpha)}$.

Enfin, nous sommes arrivés au

THÉORÈME 2.1. *On suppose que l'équation* (1.1) *satisfait à* (1.5), *dont les coefficients* $\in \gamma_{x,t}^{(\alpha)}$. *Etant donnés second membre* $f(x, t) \in \gamma_{x,t}^{(\alpha)} \cap \mathcal{D}_{L^2}^{\infty}[0, h]$ *et la donnée initiale* $\left(u(x, 0), \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} u(x, 0)\right) \in \gamma_x^{(\alpha)} \cap \mathcal{D}_{L^2}^{\infty}$, *alors, si* $1<\alpha<\frac{m}{m-1}$, *il existe toujours une solution* $u(x, t) \in \gamma_{x,t}^{(\alpha)} \cap \mathcal{D}_{L^2}^{\infty}[0, h]$. *Si* $\alpha=\frac{m}{m-1}$, *il existe un* $h_0>0$ *tel que la solution* $u(x, t)$ *existe pour* $0 \leqq t \leqq h_0$ *et* $u(x, t) \in \gamma_{x,t}^{(\alpha)} \cap \mathcal{D}_{L^2}^{\infty}[0, h_0]$.

3. Unicité et Domaine de dépendence.

La raison essentielle de la difficulté dans le paragraphe précédent était l'absence de l'inégalité d'énergie ordinaire pour l'équation (1.1). Mais, comme nous avons déjà établi l'existence d'une solution, montrons l'unicité de cette solution. D'abord,

LEMME 3.1. *Soit* $p(\xi, \lambda)$ *un polynôme homogène de degré* m *en* (ξ, λ), *tel que*

$$p(\xi, \lambda)=(\lambda-\lambda_1(\xi))^{\nu_1} \cdots (\lambda-\lambda_k(\xi))^{\nu_k}$$

où $\lambda_1(\xi)<\lambda_2(\xi)<\cdots<\lambda_k(\xi)$ *pour* ξ *réel* $\neq 0$, *et les multiplicités* $\nu_1, \cdots, \nu_k$ *sont invariantes. Posons*

$$\lambda_{\max}=\sup_{\substack{j=1,2,\cdots,k \\ |\xi|=1}} |\lambda_j(\xi)| .$$

Soit $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ *un vecteur réel tel que* $|\alpha|=\sqrt{\alpha_1^2+\cdots+\alpha_n^2}<\frac{1}{\lambda_{\max}}$, *et* $\tilde{p}(\xi, \mu)=p(\mu \cdot \alpha+\xi, \mu)$. *Alors on a* $\tilde{p}(\xi, \mu)=p(\alpha, 1)(\mu-\mu_1(\xi))^{\nu_1} \cdots (\mu-\mu_k(\xi))^{\nu_k}$ *où* $\mu_1(\xi)<\cdots<\mu_k(\xi)$ *et* $p(\alpha, 1) \neq 0$.

PREUVE.

$$\begin{aligned} p(\mu \cdot \alpha+\xi, \mu-\lambda) &=(-1)^m(\lambda-\mu+\lambda_1(\mu \cdot \alpha+\xi))^{\nu_1} \cdots (\lambda-\mu+\lambda_k(\mu \cdot \alpha+\xi))^{\nu_k} \\ &\equiv(-1)^m(\lambda-\varphi_1(\mu))^{\nu_1} \cdots (\lambda-\varphi_k(\xi))^{\nu_k} \end{aligned}$$

où $\varphi_i(\mu)=\mu-\lambda_i(\mu\cdot\alpha+\xi)$. Ici nous avons fixé ξ. Donc, $p(\mu\cdot\alpha+\xi,\mu)=\varphi_1(\xi)^{\nu_1}\cdots\varphi_k(\xi)^{\nu_k}$. Il est évident que $\varphi_1(\mu)>\varphi_2(\mu)>\cdots>\varphi_k(\mu)$. Nous allons montrer que les zéros des fonctions $\varphi_i(\mu)$ sont deux à deux distincts.

En effet, pour ξ fixé, lorsque $\mu\to\pm\infty$, on a

$$\frac{\varphi_i(\mu)}{\mu}\sim 1-\lambda_i(\alpha)=1-\lambda_i\Big(\frac{\alpha}{|\alpha|}\Big)|\alpha|>0.$$

Ceci montre que $\varphi_i(\mu)\to\pm\infty$ suivant que $\mu\to\pm\infty$. On voit aisément que les $\varphi_i(\mu)$ sont strictement croissantes. Nous avons donc $\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_k$ et μ_i sont des zéros de $p(\mu\cdot\alpha+\xi,\mu)=0$ avec les multiplicités $\nu_1,\cdots,\nu_k$. c. q. f. d.

Faisons la transformation

$$\text{(3.1)}\qquad \begin{cases} t'=t+\sum_{j=1}^{n}x_j^2 \\ x_j'=x_j\,. \end{cases}$$

Alors, $\Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\Big)$ se transforme en $\Big(\frac{\partial}{\partial x'}+2x'\frac{\partial}{\partial t'},\frac{\partial}{\partial t'}\Big)$. D'après le lemme 3.1,

$$\begin{aligned}\tilde p(x',t';\xi,\mu)&=p(x,t;2x\mu+\xi,\mu)\\ &=p(x,t;2x,1)(\mu-\mu_1(x,t;\xi))^{\nu_1}\cdots(\mu-\mu_k(x,t;\xi))^{\nu_k}\,.\end{aligned}$$

Ceci montre que l'hyperbolicité formelle est encore conservé par la transformation ci-dessus (au moins au voisinage de l'origine). Maintenent on est en mesure d'étendre le théorème de Holmgren.

Proposition 3.1. (Holmgren.) *Soit $\mathcal{L}\Big(x,t;\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\Big)$ formellement hyperbolique, défini au voisinage de l'origine, avec les coefficients $\in\gamma^{(\alpha)}_{\mathrm{loc}}$, $1<\alpha<\frac{m}{m-1}$. Soit $u(x,t)\in\mathcal{E}^m(U)$, une solution de $\mathcal{L}[u]=0$ avec la donnée nulle sur $U\cap(t=0)$, U étant un voisinage de l'origine, alors $u(x,t)\equiv 0$ dans un voisinage $V(V\subset U)$ de l'origine.*

Preuve. Par la transformation de Holmgren (3.1), D_ε se transforme dans le domaine $\tilde D_\varepsilon$: $\{(x,t);\ t'\geqq|x'|^2,\ t'\leqq\varepsilon\}$. Si l'on prend ε assez petit, $\tilde p$ est aussi formellement hyperbolique dans un voisinage de $\tilde D_\varepsilon$. Plus précisément $\tilde u(x',t')$ est la solution de $\tilde{\mathcal{L}}[\tilde u(x',t')]=0$ dans un voisinage de $\tilde D_\varepsilon$ et de plus $\tilde{\mathcal{L}}$ a la forme de (1.1) et formellement hyperbolique avec les coefficients $\in\gamma^{(\alpha)}_{\mathrm{loc}}$. Maintenent, on étend $\tilde{\mathcal{L}}$ au domaine $\Omega=R^n\times[0,h]$ de manière que $\tilde{\mathcal{L}}$ satisfait aux conditions énoncées dans le théorème 2.1 dans Ω.

Alors, si on étend $\tilde u(x,t)$ dans Ω, en posant $\tilde u(x,t)=0$ en dehors de $\tilde D_\varepsilon$, $\tilde{\mathcal{L}}[\tilde u(x',t')]=0$ pour $(x',t')\in\Omega$, $\tilde u$ a la donnée de Cauchy nulle et a son support dans $\tilde D_\varepsilon$.

Or, il est évident que ${}^t\tilde{\mathcal{L}}$ (l'opérateur transposé de $\tilde{\mathcal{L}}$) satisfait aussi dans Ω aux mêmes conditions que dans le théorème 2.1. Supposons maintenant que $u(x, t)$ ne s'annule identiquement dans aucun voisinage de l'origine, alors il existe un h $(0 < h \leqq \varepsilon)$ tel que $\tilde{u}(x', h) \not\equiv 0$. Alors la formule

$$(3.2) \qquad 0 = \int_{(x',t') \in R^n \times [0,h]} (\tilde{u}\, {}^t\tilde{\mathcal{L}}[v] - v\tilde{\mathcal{L}}[\tilde{u}]) dx'dt'$$

$$= (-1)^m \int \tilde{u}(x', h) \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} v(x', h) dx'$$

où v est une solution de ${}^t\tilde{\mathcal{L}}[v] = 0$ avec la donnée initiale

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^i v(x', h) = 0, \, i = 0, 1, \cdots, m-2 .$$

Or, le théorème 2.1, appliqué à l'opérateur ${}^t\tilde{\mathcal{L}}$ défini dans Ω, affirme l'éxistence de telles solutions, et on peut choisir la donnée initiale où $t = h$ de telle manière que le second membre (3.2) ne s'annule pas, ce qui est une contradiction.

THÉORÈME 3.1. *On suppose que*

$$\lambda_{\max} = \sup_{\substack{|\xi| = 1 \\ 1 \leqq j \leqq k,\, (x,t) \in \Omega}} |\lambda_j(x, t\,;\, \xi)| < +\infty$$

et que l'opérateur $\mathcal{L}$, *formellement hyperbolique, a ses coefficients dans* $\gamma_{\mathrm{loc}}^{(\alpha)}$ *avec* $\alpha < \dfrac{m}{m-1}$. *Etant donnée une hypersurface S régulière, analytique, définie par* $\varphi(x, t) = 0$ *avec* $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 > \lambda_{\max}^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2$. *Soit* $u(x, t)$ *une solution de* $\mathcal{L}[u] = 0$ *au voisinage de* $(x_0, t_0) \in S$, *ayant la donnée de Cauchy nulle sur S, alors* $u(x, t) \equiv 0$ *au voisinage de* (x_0, t_0).

Ce théorème est une variante de celle de S. Mizohata [**11**]. Comme nous avons déjà remarqué ci-dessus, sa méthode s'applique même dans notre situation à cause du lemme 3.1 et de la proposition 3.1.

THÉORÈME 3.2. *Etant l'équation* (1.1) *formellement hyperbolique dans* $\Omega = R^n \times [0, h]$, $(x_0, t_0) \in \Omega$, *soit C un cône passé défini par*

$$\{t - t_0 = d_0 |x - x_0|,\, t < t_0\} \quad \text{où} \quad d_0 = \frac{1}{\lambda_{\max}} .$$

Notons D l'intérieur de ce cône passé.

Si $u(x, t)$ *est une solution de* $(\mathcal{E}^m)$ *de* (1.1) *où* $f \equiv 0$ *dans* $D + C$ *qui est nulle ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre* $m-1$ *sur* $D_0 = D \cap (t = 0)$, *alors* $u(x, t)$ *s'annule identiquement sur* $D + C$. *En particulier,* $u(x_0, t_0) = 0$.

DÉMONSTRATION. (F. John [**5**], S. Mizohata [**11**].) Soit $S_\theta (0 < \theta \leqq t_0^2)$ une famille d'hypersurface dépendant d'un paramètre θ définie par

$$\varphi(x, t\,;\, \theta)=(t-t_0)^2-d_0^2|x-x_0|^2-\theta=0\,.$$

Evidemment

$$\bigcup_{t_0^2\geqq\theta>0} S_\theta\supset D\cap(t=0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\Big/\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2=\frac{(t-t_0)^2}{d_0^4|x-x_0|^2}>\frac{1}{d_0^2}=\lambda^2{}_{\max}\,.$$

D'après le théorème 3.1, si u est nulle sur S_{θ_0} pour certain θ_0, alors elle s'annule identiquement pour θ appartenant au voisinage de θ_0. L'ensemble de θ pour lequel u s'annule sur S_θ est donc ouvert. Il est aussi fermé et non vide. Donc, il est l'ensemble entier, c'est-à-dire $u(x, t)$ s'annule identiquement dans le cône entier $D+C$. c. q. f. d.

Les deux théorèmes derniers nous montrent que, si la solution véritable du problème de Cauchy pour l'équation (1.1) existe, elle doit être unique. Mais, en remarquant $\gamma^{(\alpha)}\subset(\mathcal{E}^m)$, on peut affirmer que la solution obtenue dans le théorème 2.1 doit être unique.

Finalement, nous allons montrer le théorème 1.1. A savoir, le théorème 2.1 (théorème d'éxistence) est encore valable même quand on suppose seulement $\gamma^{(\alpha)}_{\text{loc}}$ au lieu de $\gamma^{(\alpha)}$ sur les coefficients et les données.

Prenons une partition de l'unité $\beta_j(x)$ $(j=0, 1, 2, \cdots)$, $\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j(x)\equiv 1$ qui sont des fonctions de $\gamma^{(\alpha)}$. En notant K_j son support, désignons le domaine $\{(y)\,;\, h\cdot\lambda_{\max}\geqq|y-x|, (x)\in K_j\}$ par U_j et construisons une fonction $\delta_j(x)\in\gamma^{(\alpha)}$ qui est identiquement égale à 1 dans un voisinage fixé de U_j et zéro en dehors de l'ensemble compact V_j contenant U_j. En utilisant cette fonction $\delta_j(x)$, considérons l'opérateur

$$\mathcal{L}_j=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m+\sum_{\substack{i+|\nu|\leqq m\\ i\leqq m-1}} a_{\nu,i}(\delta_j(x)x, t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i$$

et le problème de Cauchy

$$\mathcal{L}_j[u(x, t)]=\beta_j(x)f(x, t) \tag{3.3}$$

avec les données initiales

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i u(x, 0)=\beta_j(x)\varphi_i(x) \qquad 0\leqq i\leqq m-1\,.$$

Mais, à cause du théorème 2.1, la solution $u_j(x, t)$ de (3.3) existe et satisfait à la relation $\mathcal{L}_j[u_j(x, t)]=\beta_j(x)f(x, t)$. Posons $u(x, t)=\sum_{j=0}^{\infty}u_j(x, t)$ et prenons un ensemble compact N de $\Omega=R^n\times[0, h]$. Compte tenu du domaine de dépendence, les u_j sont identiquement nulles sauf un nombre fini d'elles. D'où, sur N, on a $u(x, t)=\sum_{j}^{\text{fini}}u_j(x, t)$. Donc, $\mathcal{L}[u]=\mathcal{L}(\sum_{j}^{\text{fini}}u_j)=\sum_{j}^{\text{fini}}\mathcal{L}_j[u_j]=\sum_{j}^{\text{fini}}\beta_jf=f$, sur N.

REMARQUE. Supposons que les coefficients et le second membre f et la donnée de Cauchy pour $t=0$ soient tous analytiques. Alors, le théorème 1.1

affirme l'existence de solution $u(x, t)$ de classe $\alpha, \alpha > 1$ étant quelconque. Mais, nous ne savons pas si cette solution $u(x, t)$ soit analytique ou non dans $\Omega = R^n \times [0, h]$.

University of Kyoto

Bibliographie

[1] A. P. Caldéron and A. Zygmund, Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math., **79** (1957), 901-921.

[2] L. Gårding, Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta Math., **85** (1951), 1-62.

[3] M. Gevrey, Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. de l'Ecole norm. sup., **35** (1917), 129-189.

[4] L. Hörmander, Lectures on linear partial differential operators.

[5] F. John, On linear partial differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., **2** (1949), 209-253.

[6] A. Lax, On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, Comm. Pure Appl. Math., **9** (1956), 135-169.

[7] J. Leray, Hyperbolic differential equations, Cours de Princeton, 1954.

[8] S. Mizohata, Système hyperbolique, J. Math. Soc. Japan, **11** (1959), 205-233.

[9] S. Mizohata, Analyticity of solutions of hyperbolic systems with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 547-559.

[10] S. Mizohata, Solutions nulles et solution non analytiques, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962), 271-302.

[11] S. Mizohata, Cours de l'Institut de Tata (à paraître).

[12] Y. Ohya, Existence des solutions de classe supérieure dans les équations différentielles faiblement hyperboliques à coefficients variables, Proc. Jap. Acad., **38** (1962), 726-730.

[13] L. Schwartz, Théorie des Distributions, t. 1, 2, 1951, Paris.

[14] M. Yamaguti, Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrale singulière, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, **32** (1959), 121-151.