J. Math. Soc. Japan
Vol. 15, No. 4, 1963

Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe

Par Reiko FUJITA

(Reçu le 1 juli, 1963)

Introduction. En 1953, Oka [1] a montré que tout domaine pseudoconvexe fini sans point critique intérieur sur l'espace de n variables complexes est holomorphe-convexe. Il a indiqué en chemin que dans tout domaine de cette sorte, il existe une fonction pseudoconvexe ayant certaines propriétés.[1]

En 1962, Nishino [2] a indiqué que d'après une idée des méthodes d'Oka, un espace analytique est holomorphiquement complet, s'il admet une fonction de Levi strictement positive et complète.

Dans le présent Mémoire, on verra que dans tout domaine pseudoconvexe sans point critique intérieur ayant au moins un point frontière sur l'espace projectif complexe à n dimensions, il existe une fonction pseudoconvexe ayant les propriétés d'Oka,[2] qui est par définition même, une fonction de Levi strictement positive et complète d'après Nishino.

I. Fonctions pseudoconvexes particulières.

1. Définitions. Considérons un espace projectif complexe P^n à n dimensions ayant $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1})$ pour les coordonnées homogènes. Soit P_0 $(u_1^0, u_2^0, \cdots, u_{n+1}^0)$ un point quelconque de P^n. Considérons une transformation de la forme

$$x_i = \frac{a_{i\,1}u_1 + a_{i\,2}u_2 + \cdots + a_{i\,n+1}u_{n+1}}{a_{n+1\,1}u_1 + a_{n+1\,2}u_2 + \cdots + a_{n+1\,n+1}u_{n+1}} \tag{1}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$|a_{j,k}| \neq 0, \qquad (j, k = 1, 2, \cdots, n+1),$$

satisfaisant à la condition

$$a_{n+1\,1}u_1^0 + a_{n+1\,2}u_2^0 + \cdots + a_{n+1\,n+1}u_{n+1}^0 \neq 0\,.$$

Au point P_0, il correspond un point fini de l'espace de n variables complexes (x), et à un voisinage de P_0 qui est choisi convenablement, il correspond un voisinage de l'image de P_0 dans l'espace (x). On peut alors regarder un en-

1) Oka [1], p. 133, Lemme II.

2) Pour un énoncé plus précise, voir p. 473, Théorème.

semble de points de l'espace projectif P^n comme ensemble de points de l'espace de n variables complexes, localement.

Soit D un domaine sur l'espace projectif complexe P^n,[3] *sans point critique intérieur.*[4] Nous appellerons que D est *pseudoconvexe,* si tout point frontière M de D satisfait au *théorème de la continuité,*[5] et encore si cette propriété de M admet toute transformation pseudoconforme biunivoque de l'espace projectif P^n au voisinage du *base-point*[6] $\underline{M}$ de M.

Soit D un domaine pseudoconvexe sur P^n. Soit D' l'ensemble des points de D excepté des points sur le plan infini de l'espace (x) par une transformation de la forme (1). Il est évident que l'ensemble D' est un domaine pseudocovexe sur l'espace P^n, et que l'on peut considérer D' comme un domaine pseudoconvexe sur l'espace (x).

Considérons à nouveau un domain D fini et univalent dans l'espace de n variables complexes (x). Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle univoque (qui peut prendre la valeur $-\infty$) dans D. $\varphi(x)$ est appelée *une fonction pseudoconvexe*[7] dans D, si elle satisfait aux conditions suivantes: 1°. $e^{\varphi(x)}$ est finie et semicontinue supérieurement. 2°. Soit (x^0) un point quelconque de D, et soit L une variété caractéristique à une dimension complexe passant par (x^0) et de la forme

$$x_i = a_i x_j + b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

où x_j signifie une des variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, mais d'ailleurs quelconque; la trace de $\varphi(x)$ sur L est alors une fonction sousharmonique par rapport à x_j au voisinage de x_j^0.

Considérons un domaine D sur l'espace projectif P^n. Soit P un point quelconque de D ayant les coordonnées homogènes $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1})$. Soit $\varphi(P)$ une fonction réelle et univoque (qui peut prendre la valeur $-\infty$) de P dans D. Nous dirons que $\varphi(P)$ est *une fonction pseudoconvexe* de P dans D, si elle satisfait à la condition suivante: Soit P_0 un point quelconque dans D, soit V un voisinage de P_0 qui se transforme en un domaine univalent sur l'espace de n variables complexes (x) par une transformation convenable de la forme (1),[8] mais d'ailleurs quelconque, et regardons V comme un domaine dans

3) Au sens de Behnke-Thullen [3].

4) Dans le présent Mémoire, nous ne traiterons que les domaines sans point critique intérieur nous les appellerons simplement domaines pour abréger.

5) Voir Oka [1], No. 9.

6) Grundpunkt d'après Behnke-Thullen. Projection d'après Oka.

7) Plurisousharmonique d'après Lelong.

8) Toute fonction pseudoconvexe admet toute tranformation pseudoconforme biunivoque. Voir, Oka [1]. On peut donc choisir arbitrairement une transformation de la forme (1), excepté des transformations qui transforment le point P_0 à un point sur le plan infini de l'espace (x).

l'espace (x); $\varphi(P)$ est alors une fonction pseudoconvexe de (x) dans V.

2. Fonctions $\delta_j(P)$ et $\delta(P)$. Considérons un domaine D sur l'espace de n variables complexes $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, soit P_0 un point de D ayant les coordonnées $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$. Dans l'espace (x), en choisissant un nombre positif r' convenablement, on peut tracer un polycylindre

$$\gamma \qquad |x_i - x_i^0| < r', \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

de façon qu'il y ait un domaine partiel univalent γ^* de D satisfaisant à la condition $\underline{\gamma}^* = \gamma$, $\underline{\gamma}^*$ étant l'ensemble des bases-points des points de γ^* dans l'espace (x). Soit r la borne supérieure de tous les r'. Nous appellerons avec Oka γ^* *voisinage polycylindrique* de domaine D de centre P_0 et de rayon r', et r *distance frontière polycylindrique* de P_0 par rapport à D.

De même, traçons une hypersphère S autour de (x^0) et de rayon ρ' de façon qu'il y ait un domaine partiel univalent S^* de D satisfaisant à la condition $\underline{S}^* = S$, $\underline{S}^*$ étant l'ensemble des bases-points de S^* dans l'espace (x). Nous appellerons S^* *voisinage hypersphérique* de centre P_0 et de rayon ρ'. Soit ρ la borne supérieure de tous les ρ'. Nous appellerons, avec Oka, ρ *distance frontière euclidienne* de P_0 par rapport à D.

Considérons l'espace projectif complexe P^n à n dimensions ayant les coordonnées homogènes $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1})$. Soit D un domaine pseudoconvexe sur P^n. *Supposons que D ait au moins un point frontière.* Soit M_0 un point frontière de D. Considérons dans P^n, un plan analytique

$$L_1 \qquad a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_{n+1}u_{n+1} = 0$$

ne passant pas par le base-point $\underline{M}_0$ de M_0, mais d'ailleurs quelconque. En appliquant une transformation linéaire non singulière à l'espace P^n, on peut se ramener au cas où le plan analytique L_1 est donné par $u_1 = 0$. Considérons une correspondance (P_1) entre des points de P^n et de l'espace de n variables complexes $X_1(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n})$ de la forme

$$(P_1) \qquad x_{11} = \frac{u_2}{u_1}, \; x_{12} = \frac{u_3}{u_1}, \; \cdots, \; x_{1n} = \frac{u_{n+1}}{u_1}.$$

Soit $\tilde{L}_1$ l'ensemble des points de D situés sur L_1, et soit D_1 l'ensemble des points de D n'appartenant pas à $\tilde{L}_1$. Désignons l'image de D_1 sur X_1 par la correspondance (P_1) par le même signe D_1. D_1 est alors un domaine pseudoconvexe sur X_1 ayant au moins un point frontière fini. Soit P un point quelconque de D_1, et désignons par $d_1(P)$ la distance frontière euclidienne de P par rapport à D. Grâce à Oka, on sait que $-\log d_1(P)$ est une fonction pseudoconvexe continue dans D_1 qui ne se réduit pas à une constante.[9]

9) Voir Oka [1], Chap. II, No. 14.

Posons

$$\delta_1(P)=\frac{1}{d_1(P)}\,.$$

Il est évident que $\delta_1(P)$ est une fonction pseudoconvexe continue dans D jouissant des propriétés suivantes:

1°. Elle est positive et non nulle dans D_1.

2°. Elle tend vers $+\infty$, lorsque P tend vers un point frontière fini de D_1.

La fonction $\delta_1(P)$ est définie dans D excepté sur $\tilde{L}_1$.

Dans ce qui suit, *nous allons étudier que si $\tilde{L}_1$ existe effectivement, lorsque P tend vers un point quelconque de $\tilde{L}_1$, $\delta_1(P)$ tend vers zero.*

Supposons $\tilde{L}_1$ existe effectivement, et soit P_0 un point quelconque de $\tilde{L}_1$ ayant les coordonnées homogènes $(u_1^0, u_2^0, \cdots, u_{n+1}^0)$. Comme P_0 appartient à $\tilde{L}_1$, on a $u_1^0=0$, et il y a un nombre positif parmi $u_j^0 (j=2, 3, \cdots, n+1)$. Pour fixer les idées, supposons $u_2^0\neq 0$; ceci ne restreint pas la généralité. Considérons une correspondance (P_2) entre des points de P^n et de l'espace de n variables complexes $X_2(x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n})$, de la forme

$$(P_2) \qquad x_{21}=\frac{u_3}{u_2},\, x_{22}=\frac{u_4}{u_2},\, \cdots,\, x_{2n}=\frac{u_1}{u_2}\,.$$

Soit D_2 l'ensemble des points de D qui ne sont pas sur le plan analytique $u_2=0$ dans P^n. Nous allons désigner par les mêmes signes les images d'ensembles dans D par la correspondance (P_2) ou (P_1). D_2 est alors évidemment un domaine sur X_2 et P_0 est un point fini de D_2. Traçons dans D_2 sur l'espace X_2, un voisinage polycylindrique C de centre P_0 et de rayon quelconque. Soit ρ le rayon de C; traçons encore, dans D_2 sur l'espace X_2, un voisinage polycylindrique γ de centre P_0 et de rayon r plus petit que $\rho (r<\rho)$. Soient C^*, γ^* les ensembles des points de C et γ n'appartenant pas à $\tilde{L}_1$, respectivement. On a évidemment $\gamma^*\subset C^*$.

Dans cette configuration géométrique, étant donné un nombre positif ε, proposons-nous de choisir le rayon r de γ de façon que

$$\delta_1(P)<\varepsilon, \qquad \text{pour } P\in\gamma^*.$$

Comme les ensembles C, γ, C^*, γ^* sont des domaines partiels univalents de D, nous les considérons comme des domaines dans P^n. D'aprés les correspondances (P_1), (P_2), on a une correspondance entre des points de X_1 et de X_2 de la forme

$$x_{21}=\frac{x_{12}}{x_{11}},\, x_{22}=\frac{x_{13}}{x_{11}},\, \cdots,\, x_{2\,n-1}=\frac{x_{1n}}{x_{11}},\, x_{2n}=\frac{1}{x_{11}}\,.$$

Par suite, dans l'espace X_1, C^*, γ^* s'expriment de la manière suivante:

$$C^* \qquad |x_{11}|>\frac{1}{\rho}, \quad |x_{1i}-x_{2\,i-1}^0 x_{11}|<\rho|x_{11}|, \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$\gamma^* \qquad |x_{11}| > \frac{1}{r}, \quad |x_{1i} - x_{2i-1}^0 x_{11}| < r|x_{11}|, \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

où $(x_{21}^0, x_{22}^0, \cdots, x_{2n}^0)$ sont les coordonnées de P_0 dans X_2.

Pour que $\delta_1(P) < \varepsilon$, dans γ^*, il suffit que dans l'espace X_1, pour tout point P' de γ^*, on puisse tracer un voisinage polycylindrique de centre P' et de rayon R contenu dans C^*, où R est un nombre positif tel que

$$R > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Nous allons trouver le rayon r satisfaisant à cette condition.

Soit $P'(x_{11}', x_{12}', \cdots, x_{1n}')$ un point quelconque de γ^*. Considérons d'abord la composante de γ^* dans le plan de la variable x_{11}. Pour que le polycylindre de centre P' et de rayon R dans X_1 soit contenu dans C^*, il faut que l'on ait

$$r < \frac{1}{R\rho + 1}. \tag{a}$$

Supposons que r satisfasse à cette condition.

Ensuite, considérons la section de γ^* par $x_{11} = x_{11}'$. Soit δ' la réunion de tous polycylindres décrits dans X_1 de centre un point quelconque de la section de γ^* par $x_{11} = x_{11}'$, et de rayon R. δ' est de la forme

$$|x_{11} - x_{11}'| < R$$

$$|x_{1i} - x_{11}' x_{2i-1}^0| < r|x_{11}'| + R \qquad (i=1, 2, \cdots, n).$$

D'autre part, soit δ_1 le cercle décrit dans le plan de la variable x_{11} de centre x_{11}' et de rayon R, et soit x_{11}'' un point quelconque de δ_1; comme la borne inférieure de $|x_{11}|$ pour $x_{11} \in \delta_1$ est $|x_{11}'| - R$, la section de C_1^* par $x_{11} = x_{11}''$ contient au moins un ensemble

$$x_{11} = x_{11}'',$$

$$|x_{1i} - x_{11}'' x_{2i-1}^0| < \rho(|x_{11}'| - R), \qquad (i=2, 3, \cdots, n).$$

Par suite, C^* contient un polycylindre δ'' de la forme

$$|x_{11} - x_{11}'| < R,$$

$$|x_{1i} - x_{11}' x_{2i-1}^0| < \rho(|x_{11}'| - R) - |x_{2i-1}^0| R \qquad (i=2, 3, \cdots, n).$$

Pourvu que $|x_{11}'|$ soit assez grand, il existe effectivement le polycylindre δ'', et pour que

$$\delta' \subset \delta''$$

il suffit que

$$\rho(|x_{11}'| - R) - |x_{2k}^0| R > r|x_{11}'| + R, \qquad (k=1, 2, \cdots, n-1).$$

Comme $|x_{11}'| > 1/r$, d'après les inégarités ci-dessus, nous avons l'inégarité

$$r < \frac{\rho}{R(1 + \rho + |x_2^0|) + 1}, \tag{b}$$

où $|x_2^0|$ est la borne supérieure de $|x_{2k}^0|$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$.

Si r satisfait à l'inégarité (b), il satisfait nécessairement à l'inégarité (a), et tout polycylindre dans l'espace X_1 centré en un point de γ^* avec le rayon R est évidemment contenu dans C^*.

Nous pouvons ainsi trouver γ^* tel que

$$\delta_1(P) < \varepsilon, \qquad \text{pour } P \in \gamma^*.$$

Nous avons donc le résultat suivant: Soit P_0 un point quelconque de $\tilde{L}_1$; étant donné un nombre positif ε, on peut trouver un voisinage V de P_0 tel que pour un point quelconque de V qui n'appartient pas à $\tilde{L}_1$, $\delta_1(P) < \varepsilon$.

Comme $\delta_1(P)$ est une fonction pseudoconvexe continue positive et non nulle dans D excepté sur $\tilde{L}_1$, d'après le résultat ci-dessus, il est évident que en faisant correspondre à tout point de $\tilde{L}_1$ un nombre zero comme la valeur de $\delta_1(P)$, on a une fonction pseudoconvexe continue $\delta_1(P)$ dans D.

En résumé, nous venons de voir que:

Soit D un domaine pseudoconvexe sur l'espace projectif complexe P^n à n dimensions possédant au moins un point frontière M, soit L_j un plan analytique dans P^n ne passant pas par le base-point $\underline{M}$ de M mais d'ailleurs quelconque, soit $\tilde{L}_j$ l'ensemble de points de D situés sur L_j, et soit D_j le domaine qui est l'ensemble de points de D n'appartenant pas à $\tilde{L}_j$; en regardant D_j comme un domaine sur l'espace de n variables complexes, pernons la distance frontière euclidienne $d_j(P)$ par rapport à D_j, et posons

$$\delta_j(P) = \frac{1}{d_j(P)}, \qquad \textit{pour } P \in D_j,$$

$$\delta_j(P) = 0, \qquad \textit{pour } P \in \tilde{L}_j,$$

$\delta_j(P)$ est alors une fonction pseudoconvexe continue dans D jouissant des propriétés suivantes:

1°. *Elle est positive dans D excepté pour $\tilde{L}_j$.*

2°. *Lorsque P tend vers un point frontière de D qui ne se trouve pas sur L_j, elle tend vers $+\infty$.*

D'où, il s'ensuit immédiatement que: *Étant donné le même domaine D sur P^n, choisissons $m\ (m \geqq n+1)$ plans analytiques $L_j\ (j=1, 2, \cdots, m)$ dans P^n, ne passant pas par $\underline{M}$ de façon que $n+1$ quelconques parmi eux ne se rencontrent jamais en même temps, et construisons les fonctions $\delta_j(P)\ (j=1, 2, \cdots, m)$ dans D par rapport aux plans analytiques $L_j\ (j=1, 2, \cdots . m)$ respectivement, de la manière précédente, et soit $\delta(P)$ la borne supérieure de ces m fonctions dans D; $\delta(P)$ est alors une fonction pseudoconvexe continue dans D jouissant des propriétés suivantes:*

1°. *Elle est positive et non nulle dans D.*

2°. *Lorsque P tend vers un point frontière quelconque de D, elle tend vers* $+\infty$.

3. Propriété principale.

1°. *Condition différentielle.* Considérons à nouveau un domaine D dans l'espace de n variables complexes (x). Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle et continue dans D telle que, si u_j, v_j désignent la partie réelle et la partie imaginaire de x_j $(j=1, 2, \cdots, n)$, et si $\varphi(x)=\varphi(u, v)$, $\varphi(u, v)$ admette les dérivées partielles continues jousqu'au deuxième ordre. Grâce à Oka,[10] on sait que, *pour que* $\varphi(x)$ *soit pseudoconvexe dans* D, *il faut et il suffit que l'on ait pour tout point* (x) *de* D *et pour tout système de valeurs réelles* (α, β),

$$\sum_j \sum_k \Big[\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j \partial u_k}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v_j \partial v_k}\Big)(\alpha_j\alpha_k+\beta_j\beta_k)+\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j \partial v_k}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_k \partial v_j}\Big)(\alpha_j\beta_k-\alpha_k\beta_j)\Big] \geqq 0\,,$$
$$(j, k=1, 2, \cdots, n).$$

Nous désignerons avec Oka le premier membre de cette inégalité par $W(\varphi\,; \alpha, \beta)$.

2°. *Propriété principale.* Soit $\varphi(x_1, x_2, \cdots x_n, y)$ une fonction pseudoconvexe continue au voisinage d'un point (x^0, y^0) de l'espace de $n+1$ variables complexes (x, y).

Partageons x_j, y $(j=1, 2, \cdots, n)$ en parties réelles et parties imaginaires, posons

$$x_j=u_j+iv_j\,, \qquad y=y_1+iy_2\,,$$

et

$$\varphi(x, y)=\varphi(u, v, y_1, y_2)\,.$$

Supposons que $\varphi(u, v, y_1, y_2)$ admette les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre, et que $W(\varphi\,; \alpha, \beta)$ soit positive au voisinage de (x^0, y^0) pour tout système de valeurs réelles (α, β) excepté $(0, 0)$, que nous dénoterons dans la suite simplement en écrivant $W(\varphi\,; \alpha, \beta)>0$ au voisinage de (x^0, y^0).

Supposons encore,

$$\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\Big)^2>0 \quad \text{en} \quad (x^0, y^0)\,.$$

Dans cette circonstance, grâce à Oka, on peut tracer une surface caractéristique σ passant par (x^0, y^0) de façon qu'elle ne passe que la portion de l'espace donnée par $\varphi(x, y)>\varphi(x^0, y^0)$, au voisinage de (x^0, y^0) sauf en ce point lui-même.[11]

Dans la même circonstance, on peut trouver un voisinage V de (x^0, y^0) et

10) Oka [1], Chap. II, No. 15.
11) Voir Oka [1], Chap. II, No. 16.

une famille de surfaces caractéristiques $\{\sigma_t\}$ dans V, définie par l'équation $F[(x, y), t]=0$, $(x, y)\in V$, $0\leqq t\leqq 1$, où $F[(x, y), t]$ est analytique par rapport à (x, y) et continue par rapport à (x, y) et t, telle que:

1. σ_0 passe par (x^0, y^0) et ne passe que la portion de V donnée par $\varphi(x, y)>\varphi(x^0, y^0)$ sauf au point (x^0, y^0).

2. Toute $\sigma_t\,(t\neq 0)$ ne passe que la portion de V donnée par $\varphi(x, y)>\varphi(x^0, y^0)$.[12)]

En effet, pour simplifier l'écriture, supposons que (x^0, y^0) soit l'origine et que $\varphi(x^0, y^0)$ soit nulle.

Considérons une surface caractéristique σ de la forme

$$y=f(x)=\sum_j a_j x_j+\sum_j\sum_k b_{jk}x_j x_k\,,\qquad \text{avec}\quad b_{jk}=b_{kj}\,,\qquad (j, k=1, 2, \cdots, n)\,.$$

Partageons a_j, b_{jk} et $f(x)$ en parties réelles et imaginaires, posons

$$a_j=\alpha_j+i\beta_j\,,\qquad b_{jk}=\gamma_{jk}+i\delta_{jk}\,,\qquad f(x)=P(u, v)+iQ(u, v)\,.$$

En substituant $y_1=P(u, v)$, $y_2=Q(u, v)$ dans $\varphi(x, y)=\varphi(u, v, y_1, y_2)$, posons

$$\Phi(x)=\Phi(u, v)=\varphi[u, v, P(u, v), Q(u, v)]\,.$$

Dans cette circonstance, grâce à Oka, on sait qu'il existe un seul système $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ satisfaisant aux conditions

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}=\frac{\partial\Phi}{\partial v_j}=0\,,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial u_k}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_j\partial v_k}\,,\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_j\partial v_k}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_k\partial v_j}\,,\qquad (j, k=1, 2, \cdots, n)$$

où les dérivées partielles signifient des valeurs à l'origine, et l'on sait encore que la surface caractéristique σ qui satisfait à ces conditions reste dans la portion donnée par $\varphi(x, y)>0$ au voisinage de l'origine sauf en origine elle-même.

Prenons comme σ_0 la surface caractéristique σ qui satisfait à ces conditions, et considérons comme $\{\sigma_t\}$ une famille de surfaces caractéristiques obtenue en faisant à σ_0 la transformation parallèle à la direction normale de la surface $\varphi(x, y)=0$ en origine. $\{\sigma_t\}$ est alors exprimé sous la forme $F(x, y, t)=0$ où F est un polynôme en $x_j, y, t\ (j=1, 2, \cdots, n)$. En outre, $\{\sigma_t\}$ est évidemment exprimé sous la forme

$$y_1=P_1(u, v, t)\,,\qquad y_2=Q_1(u, v, t)\,,$$

où P_1, Q_1 sont des polynômes de $u_j, v_j, t\ (j=1, 2, \cdots, n)$.

En substituant $y_1=P_1(u, v, t)$, $y_2=Q_1(u, v, t)$ dans $\varphi(u, v, y_1, y_2)$, posons

$$\Psi(u, v, t)=\varphi[u, v, P_1(u, v, t), Q_1(u, v, t)]\,.$$

---

12) Oka a indiqué que l'on peut trouver cette famille de surfaces caractéristiques $\{\sigma_t\}$, sans démonstration, dans [1], Chap. III, No. 30.

Comme la fonction $\Psi(u, v, t)$ admet les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport à t au voisinage de l'origine, on peut la développer en origine comme ce qui suit:

$$\Psi(u, v, t)=\Psi(u, v, 0)+\frac{\partial\Psi}{\partial t}(u, v, 0)t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}(u, v, \theta t)t^2, \qquad 0<\theta<1.$$

Dans le développement ci-dessus, comme la fonction $\Psi(u, v, 0)$ est la trace de la fonction $\varphi(x, y)$ sur σ_0, si l'on choisit un voisinage U_0 suffisamment petit de l'origine dans l'espace (x), on a d'abord

$$\begin{aligned}&\Psi(u, v, 0)>0, \qquad \text{pour } (x)\in U_0, \qquad \text{sauf en origine,}\\ &\Psi(u, v, 0)=0, \qquad \text{en origine.}\end{aligned}$$

Ensuite, comme le système $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ par rapport à σ_0 satisfait aux conditions

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_j}=\frac{\partial\Phi}{\partial v_j}=0, \qquad (j=1, 2, \cdots, n), \qquad \text{en origine,}$$

d'après un calcul simple, on a pour $x_j=0$, $t=0$, $(j=1, 2, \cdots, n)$,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\sum_j\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v_j}\Big)^2\Big]+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\Big)^2.$$

Nous avons donc

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}>0, \qquad \text{en origine.}$$

D'où, comme les fonctions

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}(u, v, t), \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}(u, v, t)$$

sont des fonctions continues au voisinage de l'origine, nous pouvons choisir un voisinage U_1 de l'origine de l'espace (x) contenu dans U_0, et un nombre positif suffisamment petit t_1 de façon que

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}(u, v, 0)t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}(u, v, \theta t)t^2>0,$$

pour tout système $[(x), t, \theta]$ satisfaisant aux conditions

$$(x)\in U_1, \qquad 0<t\leqq t_1, \qquad 0<\theta<1.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}&\Psi(0, 0, 0)=0,\\ &\Psi(u, v, 0)>0, \quad \text{pour} \quad (x)\in U_1, \qquad \text{sauf en origine,}\\ &\Psi(u, v, t)>0, \quad \text{pour} \quad (x)\in U_1, \qquad 0<t\leqq t_1.\end{aligned}$$

En choisissant la variable t convenablement, nous avons une famille de surfaces caractéristiques voulue.

Nous avons ainsi le résultat suivant:

Soit $\varphi(x)$ *une fonction pseudoconvexe continue au voisinage d'un point* (x^0) *de l'espace de* n *variables complexes* (x) *telle que, si* u_j, v_j *sont la partie réelle et la partie imaginaire de* x_j $(j=1, 2, \cdots, n)$, *et* $\varphi(x)=\varphi(u, v)$, $\varphi(u, v)$ *admette les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre, et que* $W(\varphi\,;\alpha, \beta)$ *soit positive pour tout système de valeurs réelles* (α, β) *excepté pour* $(0, 0)$, *et encore que l'une au moins des dérivées* $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_j}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial v_j}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ *ne soit pas nulle à* (x^0); *on peut trouver une famille de surfaces caractéristiques* $\{\sigma_t\}$ *dans un voisinage* V *de* (x^0) *définie par l'équation* $f[(x), t]=0$, $(x)\in V$, $0\leqq t\leqq 1$, *où* $f[(x), t]$ *est analytique par rapport à* (x) *et continue par rapport à* (x) *et* t, *telle que:*

1. σ_0 *passe par* (x^0) *et reste dans la portion de* V *donnée par* $\varphi(x)>\varphi(x^0)$, *sauf en* (x^0) *lui-même.*

2. *Toute* σ_t $(t\neq 0)$ *reste dans la portion de* V *donnée par* $\varphi(x)>\varphi(x^0)$.

Soit $\varphi(x)$ à nouveau une fonction pseudoconvexe dans un domaine D de l'espace (x). Nous dirons avec Oka, que $\varphi(x)$ jouit de la propriété principale dans D, si à tout point de D, il existe la famille de surfaces caractéristiques $\{\sigma_t\}$ de cette sorte.

3°. *Propriété* (P_0) *et propriété* (P_1). Comme la condition suffisante pour qu'une fonction pseudoconvexe jouisse de la propriété principale, considérons la propriété (P_0) et la propriété (P_1), selon Oka.

Soit D un domaine dans l'espace de n variables complexes (x). Partageons x_j en partie réelle et imaginaire:

$$x_j=u_j+iv_j, \qquad (j=1, 2, \cdots, n).$$

Soit $\varphi(x)$ une fonction pseudoconvexe dans D. On dit que $\varphi(x)$ jouit de *la propriété* (P_0) pour D, si elle est continue et admet les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport à (u, v) dans D, et encore si elle satisfait dans D aux conditions

$$W(\varphi\,;\alpha, \beta)>0, \qquad \sum_j\Big[\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial v_j}\Big)^2\Big]>0.$$

On dit que $\varphi(x)$ jouit de *la propriété* (P_1) pour D, si à tout point (x^0) de D, correspond un voisinage γ de (x^0) tel que $\varphi(x)$ soit donnée dans γ par la borne supérieure d'un nombre fini de fonctions pseudoconvexes ayant la propriété (P_0).

Toute fonction pseudoconvexe $\varphi(P)$ *ayant la propriété* (P_1) *pour* D, *évidemment jouit de la propriété principale pour* D.

D'après le calcul fait pour introduire la condition différentielle,[13] on voit facilement que *la propriété* (P_0) *et la propriété* (P_1) *admettent toute transforma-*

13) Voir Oka [1], Chap. II, No. 15.

tion pseudoconforme biunivoque.

Soit D à nouveau un domaine sur l'espace projectif complexe P^n à n dimensions et soit $\varphi(P)$ une fonction pseudoconvexe dans D. Nous dirons que $\varphi(P)$ jouit de *la propriété* (P_0) ou bien de *la propriété* (P_1) respectivement, si $\varphi(P)$ satisfait à la condition suivante: Soit P un point quelconque de D, et soit V un voisinage du point P dans D que l'on peut regarder comme un domaine univalent dans l'espace de n variables complexes (x) de la manière habituelle, alors $\varphi(P)$ jouit de la propriété (P_0) ou de la propriété (P_1) par rapport à (x) dans V.

Considérons un domaine D sur P^n et une fonction $\varphi(P)$ réelle semi-continue supérieurement qui peut prendre la valeur $-\infty$, dans D.

On dit que $\varphi(P)$ est *une fonction de Levi strictement positive dans* D,[14] si elle satisfait à la condition suivante: Pour tout point P_0 de D, il y a un voisinage V et une famille de surfaces caractéristiques $\{\sigma_t\}$ dans V définie par l'équation $f(P, t)=0$, $P\in V$, $0\leqq t\leqq 1$, où $f(P, t)$ est analytique par rapport à P et continue par rapport à P et t, telle que:

1. σ_0 passe par P_0 et reste dans la portion de V donnée par $\varphi(P)>\varphi(P_0)$ excepté au point P_0.
2. Toute σ_t $(t\neq 0)$ reste dans la portion de V donnée par $\varphi(P)>\varphi(P_0)$.

D'après la définition même, *une fonction pseudoconvexe jouissant de la propriété* (P_1) *pour* D *est évidemment une fonction de Levi strictement positive dans* D.

4. Modification des fonctions pseudoconvexes. Soit D un domaine sur l'espace de n variables complexes (x), et soit $\varphi(P)$ une fonction pseudoconvexe continue dans D.

Étant donnés un domaine partiel D_0 de D tel que $D_0\Subset D$ et un nombre positif ε, on peut trouver une fonction pseudoconvexe $\Phi(P)$ dans D_0 ayant la propriété (P_1), de façon que

$$|\varphi(P)-\Phi(P)|<\varepsilon, \qquad \text{dans} \quad D_0.$$

De ce théorème qui est dû à Oka [**1**], il s'ensuit le résultat suivant:

Soit D un domaine pseudoconvexe sur l'espace projectif complexe P^n à n dimensions ayant au moins un point frontière, et soit $\varphi(P)$ une fonction pseudoconvexe continue dans D. Étant donnés un domaine partiel D_0 de D tel que $D_0\Subset D$ et un nombre positif ε, on peut trouver une fonction pseudoconvexe $\Phi(P)$ dans D_0 ayant la propriété (P_1), *de façon que*

$$|\varphi(P)-\Phi(P)|<\varepsilon, \qquad \textit{dans} \quad D_0.$$

En effet, soit M_0 un point frontière quelconque de D, choisissons $n+1$

14) Nishino [**2**].

plans analytiques

$$L_j \qquad a_{1j}u_1+a_{2j}u_2+\cdots+a_{n+1j}u_{n+1}=0\,, \qquad (j=1,2,\cdots,n+1)\,,$$

dans P^n, de façon qu'ils ne passent pas par le base-point $\underline{M}_0$ de M_0 et qu'ils ne se rencontrent jamais en même temps. Soit $\tilde{L}_j$ l'ensemble des points de D situés sur L_j, et soit D_j l'ensemble des points de D n'appartenant pas à $\tilde{L}_j$, $(j=1,2,\cdots,n+1)$. D_j est évidemment un domaine partiel de D. Par rapport à chaque plan analytique L_j $(j=1,2,\cdots,n+1)$, construisons la fonction $\delta_j(P)$,[15] et désignons par $\delta(P)$ la borne supérieure des fonctions $\delta_j(P)$ $(j=1,2,\cdots,n+1)$ dans D. $\delta_j(P)$ et $\delta(P)$ sont des fonctions pseudoconvexes continues dans D. En particulier, la fonction $\delta(P)$ est positive et non nulle dans D. Soit δ_0 la borne inférieure des valeurs $\delta(P)$ dans D_0; δ_0 est évidemment un nombre positif.

Considérons sur D_0 des ensembles

$$D_j^0 \qquad \delta_j(P)>\frac{\delta_0}{4}\,, \qquad P\in D_0\,, \qquad (j=1,2,\cdots,n+1)\,.$$

Par définition même de $\delta_j(P)$, il est évident que chaque D_j^0 est un ensemble ouvert dans D tel que

$$D_j^0 \Subset D_j\,,$$

et il est évident que

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} D_j^0 = D^0\,.$$

Soit M la borne supérieure des valeurs de $\delta(P)$ dans D_0. Choisissons un nombre positif c de façon que

$$0<c\cdot M<\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

et construisons $n+1$ fonctions

$$\varphi_j(P)=\varphi(P)+c\cdot\delta_j(P)\,, \qquad (j=1,2,\cdots,n)\,,$$

dans D. Les fonctions $\varphi_j(P)$ sont des fonctions pseudoconvexes continues dans D.

D'après le théorème ci-dessus d'Oka [**1**], pour chaque fonction $\varphi_j(P)$, on peut trouver une fonction $\Phi_j(P)$ dans un voisinage de D_j^0 ayant la propriété (P_1) de façon que

$$|\varphi_j(P)-\Phi_j(P)|<c\cdot\frac{\delta_0}{4}\,,$$

au voisinage de D_j^0.

Considérons les fonctions $\Phi_j(P)$ $(j=1,2,\cdots,n+1)$ ainsi acquises comme les fonctions définies dans D_j^0 respectivement, pour définir une fonction $\Phi(P)$.

15) Voir No. 2.

Posons

$$\Phi(P)=\max\,[\Phi_1(P),\,\Phi_2(P),\,\cdots,\,\Phi_{n+1}(P)]\ ;$$

de façon plus précise, pour un point quelconque P de D_0, soit $\Phi(P)$ la borne supérieure des valeurs en P des seules fonctions qui sont définies au point P, parmi $\Phi_j(P)\,(j=1,2,\cdots,n+1)$.

Soit P_0 un point quelconque de D_0. Le point P_0 n'appartient pas nécessairement à tous les ensembles $D_j^0\,(j=1,2,\cdots,n+1)$, mais il appartient à l'un au moins de D_j^0. Par suite, $\Phi(P)$ est une fonction définie dans D_0. Soit encore P_0 un point quelconque de D_0, si P_0 n'appartient à la frontière d'aucun D_j^0, il est évident qu'au voisinage de P_0, $\Phi(P)$ est continue et jouit de la propriété (P_1).

Maintenant, supposons que P_0 soit un point frontière de D_1^0. La fonction $\Phi_1(P)$ est, en fait, définie au voisinage de P_0, et d'après la définition même,

$$\Phi_1(P_0)<\varphi(P_0)+c\cdot\frac{\delta_0}{2}\,.$$

En outre, comme $\delta(P_0)\geqq\delta_0$, il existe au moins une fonction $\delta_k(P)$ telle que $\delta_k(P_0)\geqq\delta_0$, parmi $\delta_j(P)$ $(j=1,2,\cdots,n+1)$. P_0 est donc un point appartenant à D_k^0. La fonction $\Phi_k(P)$ est alors précisément définie au voisinage de P_0, et

$$\Phi_k(P_0)>\varphi(P_0)+c\cdot\frac{3}{4}\delta_0\,.$$

Nous avons alors

$$\Phi_1(P_0)<\Phi_k(P_0)\,.$$

Comme $\Phi_1(P)$, $\Phi_k(P)$ sont des fonctions continues au voisinage de P_0, nous avons

$$\Phi_1(P)<\Phi_k(P)\,,$$

au voisinage de P_0.

Il s'ensuit immédiatement de là que la fonction $\Phi(P)$ est continue et jouit de la propriété (P_1) dans D_0.

Soit encore P_0 un point quelconque de D_0, il existe alors au moins une fonction $\Phi_k(P)$ parmi $\Phi_j(P)\,(j=1,2,\cdots,n+1)$, telle que $\Phi_k(P_0)=\Phi(P_0)$.

Par rapport à cette fonction $\Phi_k(P)$, nous avons

$$|\Phi(P_0)-\varphi(P_0)|\leqq|\Phi_k(P_0)-\varphi_k(P_0)|+|\varphi_k(P_0)-\varphi(P_0)|$$
$$<c\cdot\frac{\delta}{4}+c\cdot M<\varepsilon\,.$$

Nous avons donc

$$|\Phi(P)-\varphi(P)|<\varepsilon\,,\qquad \text{pour}\ \ D_0\,.$$

Nous avons ainsi la fonction $\Phi(P)$ voulue dans D_0.

II. Problème frontière.

5. Problème frontière. Le but du présent Mémoire est de résoudre le problème que nous appellerons le problème frontière avec Oka.

Problème frontière—*Étant donné un domaine pseudoconvexe D ayant au moins un point frontière*[16] *sur l'espace projectif complexe P^n à n dimensions, trouver une fonction pseudoconvexe $\varphi(P)$ dans D jouissant des propriétés suivantes:*

1°. *$\varphi(P)$ possède la propriété* (P_1).[17]

2°. *Pour tout nombre réel α, l'ensemble D_α des points de D tels que $\varphi(P) < \alpha$ remplie la condition $D_\alpha \Subset D$.*

Lorsqu'une fonction jouit de la propriété 2° ci-dessus, nous dirons qu'elle jouit de *la propriété* (α).

Une solution $\varphi(P)$ du problème frontière est évidemment une fonction de Levi strictement positive jouissant de la propriété (α) dans D, qui est appelée *une fonction de Levi strictement positive et complète dans D*, d'après Nishino.

Pour résoudre le problème frontière, nous allons raisonner suivant l'idée d'Oka [**1**].

Soit D un domaine pseudoconvexe sur l'espace projectif complexe P^n à n dimensions ayant un point frontière M_0.

Choisissons dans l'espace P^n, $2n+2$ plans analytiques

$$L_i \qquad U_i \equiv a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{i\, n+1}u_{n+1} = 0\,, \quad (i = 1, 2, \cdots, 2n+2)\,,$$

de façon qu'ils ne passent pas par le base-point $\underline{M}_0$ de M_0, et que $n+1$ quelconques d'eux ne se rencontrent jamais en même temps. Par rapport à chaque plan L_i, considérons une correspondance (P_i) entre des points de l'espace projectif P^n et des points de l'espace de n variables complexe $X_i(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})$ ayant L_i comme le plan infini, de la forme

$$(P_i) \qquad x_{i1} = \frac{U_{i+1}}{U_i},\ x_{i2} = \frac{U_{i+2}}{U_i},\ \cdots,\ x_{in} = \frac{U_{i-1}}{U_i}\,,$$
$$n+2 = 1\,, \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n+1\,,$$
$$2n+3 = n+2\,, \qquad \text{pour} \quad n+2 \leqq i \leqq 2n+2\,.$$

Soit $\tilde{L}_i$ l'ensemble des points de D situés sur $\tilde{L}_i$, et soit D_i l'ensemble des points de D n'appartenant pas à $\tilde{L}_i$. Chaque D_i est un domaine pseudoconvexe sur P^n que l'on peut regarder comme un domaine pseudoconvexe sur l'espace X_i par la correspondance (P_i).

Construisons les fonctions $\delta_i(P)\,(i = 1, 2, \cdots, 2n+2)$ et $\delta(P)$ dans D. De

16) Cette condition est nécessaire. Si le domaine D n'a aucun point frontière, toute fonction pseudoconvexe continue dans D se réduit à une constante.

17) Voir No. 3.

façon plus précise, d'abord posons

$$\delta_i(P)=\frac{1}{d_i(P)}, \qquad \text{pour} \qquad P\in D_i,$$

$$\delta_i(P)=0, \qquad\qquad \text{pour} \qquad P\in \tilde{L}_i,$$

où $d_i(P)$ est la distance frontière euclidienne par rapport à D_i sur l'espace X_i. Comme le domaine D_i possède un point frontière fini sur l'espace X_i, $\delta_i(P)$ est une fonction pseudoconvexe continue qui ne se réduit pas à une constante dans D. Posons ensuite

$$\delta(P)=\max\,[\delta_1(P), \delta_2(P), \cdots, \delta_{2n+2}(P)],$$

$\delta(P)$ est une fonction pseudoconvexe continue positive et non nulle dans D, et elle tend vers $+\infty$, lorsque P tend vers un point frontière quelconque de D.

Pour un nombre positif quelconque ρ, considérons l'ensemble des points de D donné par

$$\delta(P)<\frac{1}{\rho}, \qquad P\in D$$

et notons cet ensemble D^ρ. Considérons D^ρ géométriquement; désignons par D_i^ρ l'ensemble des points de D_i tel que la distance frontière euclidienne $d_i(P)$ par rapport à D_i sur l'espace X_i soit plus grande que ρ. Posons

$$D_i^{\rho *}=D_i^\rho\cup \tilde{L}_i,$$

D^ρ est alors l'intersection de tous les ensembles $D_i^{\rho *}(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$.

Dans la configuration ci-dessus, pour résoudre le problème frontière, nous traiterons le problème suivant:

Problème auxiliaire.—*Soit ρ un nombre positif tel que $P_0\in D^\rho$, P_0 étant un point de D donné à l'avance, soit D_0 la composante connexe de D^ρ contenant P_0; trouver une fonction pseudoconvexe continue $\lambda_0(P)$ dans D_0 telle que, pour tout nombre réel α, l'ensemble Δ_α des points de D_0 donné par $\lambda_0(P)<\alpha$ satisfasse à la condition $\Delta_\alpha\Subset D$.*

Pour résoudre ce problème, nous allons faire préliminairement quelques préparatifs *dans la configuration où le problème auxiliaire est donné.*

6. Sur la fonction $\delta(P)$. Soit δ_0 la borne inférieure des valeurs de la fonction $\delta(P)$ dans le domaine D. Comme $\delta(P)$ est continue positive et non nulle dans D, on a $\delta_0\geqq 0$. Mais, en fait, *on a* $\delta_0>0$.

Raisonnons par absurde et supposons que $\delta_0=0$. Nous pourrions alors choisir une suite

$$(S) \qquad P_1, P_2, \cdots, P_m, \cdots,$$

des points de D, de façon que

$$\lim_{m\to\infty}\delta(P_m)=0.$$

Soit $(\underline{S})$ la suite des bases-points $\underline{P}_m$ des P_m dans l'espace P^n. $(\underline{S})$ aurait au moins un point d'accumulation $\underline{Q}$ dans P^n. Comme il existerait au moins un plan analytique qui ne passe pas par $\underline{Q}$, parmi les plans analytiques L_i $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$, supposons que L_1 ne passe pas par $\underline{Q}$; ceci ne restreint pas la généralité. De la suite (S) extrayons une suite partielle

$$(S') \qquad P'_1, P'_2, \cdots, P'_m, \cdots,$$

de façon que les bases-points $\underline{P}'_m$ des P'_m n'appartiennent pas à L_1 et que la suite

$$(\underline{S}') \qquad \underline{P}'_1, \underline{P}'_2, \cdots, \underline{P}'_m, \cdots$$

converge vers $\underline{Q}$. Soit P'_m un point quelconque de (S'). Comme P'_m appartient à D_1, on pourrait tracer un voisinage hypersphérique de centre P'_m et de rayon $d_1(P'_m)$ dans D_1 sur l'espace X_1. Dans la frontière de ce voisinage, il existerait au moins un point frontière M'_m qui appartient à la frontière de D_1. En faisant correspondre à chaque P'_m de la suite (S') un point frontière M'_m de cette sorte de D_1, nous aurions une suite

$$(T') \qquad M'_1, M'_2, \cdots, M'_m, \cdots,$$

et une suite des bases-points des M_m dans P^n

$$(\underline{T}') \qquad \underline{M}'_1, \underline{M}'_2, \cdots, \underline{M}'_m, \cdots;$$

la suite $(\underline{T}')$ admettrait encore au moins un point d'accumulation $\underline{R}$ dans P^n. Il existerait au moins un plan analytique parmi L_i $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$ que ne passe pas par deux points $\underline{Q}$, $\underline{R}$. Nous pourrions supposer que L_2 soit un tel plan, sans restreindre la généralité. De la suite (S) extrayons encore une suite partielle

$$(S'') \qquad P''_1, P''_2, \cdots, P''_m, \cdots$$

de façon que, si

$$(T'') \qquad M''_1, M''_2, \cdots, M''_m, \cdots$$

est une suite partielle de (T') correspondant à (S''), la suite

$$(\underline{T}'') \qquad \underline{M}''_1, \underline{M}''_2, \cdots, \underline{M}''_m, \cdots$$

des bases-points $\underline{M}''_m$ des M_m converge vers le point $\underline{R}$. Soit $(\underline{S}'')$ la suite des bases-points $\underline{P}''_m$ des P''_m. $(\underline{S}'')$ convergerait vers le point $\underline{Q}$ et l'on aurait

$$\lim_{m\to\infty} \delta(P''_m) = 0 .$$

Considérons les points $\underline{Q}$, $\underline{R}$ et les suites $(\underline{S}'')$, $(\underline{T}'')$, dans l'espace X_2 par la correspondance (P_2). Traçons dans X_2, deux hypersphères $S(\underline{Q})$, $S(\underline{R})$ de rayon r et de centre $\underline{Q}$, $\underline{R}$ respectivement, où r est un nombre positif quelconque. Soit d_0 la distance euclidienne entre $\underline{Q}$ et $\underline{R}$ dans X_2. Nous pourrions alors choisir un nombre entier m_0 de façon que pour tout nombre $m \geqq m_0$,

$$P''_m \in S(\underline{Q}), \qquad M''_m \in S(\underline{R}).$$

Nous aurions donc

$$\mathrm{dis}_2(\underline{P}''_m, \underline{M}''_m) \leqq d_0 + 2r, \qquad \text{pour} \quad m \geqq m_0,$$

où $\mathrm{dis}_2(\underline{P}''_m, \underline{M}''_m)$ exprime la distance euclidienne entre $\underline{P}''_m$ et $\underline{M}''_m$ dans l'espace X_2. Soit P''_m un point quelconque de (S'') tel que $m \geqq m_0$, et soit $S_1(P''_m)$ le voisinage hypersphérique de centre P''_m et de rayon $d_1(P''_m)$ dans D_1 sur l'espace X_1. Soit $S_2(P''_m)$ l'ensemble des points de $S_1(P''_m)$ n'appartenant pas à $\tilde{L}_2$, et considérons $S_2(P''_m)$ sur l'espace X_2. $S_2(P''_m)$ serait alors un domaine partiel univalent de D_2 et M''_m serait évidemment un point frontière fini de $S_2(P''_m)$ et de D_2. Nous aurions donc

$$0 < d_2(P''_m) \leqq \mathrm{dis}_2(\underline{P}''_m, \underline{M}''_m) \leqq d_0 + 2r.$$

D'où, nous aurions

$$\delta_2(P''_m) \geqq \frac{1}{d_0+2r}, \qquad \text{pour} \quad m \geqq m_0.$$

D'après la définition de $\delta(P)$, nous aurions

$$\delta(P''_m) \geqq \frac{1}{d_0+2r}, \qquad \text{pour} \quad m \geqq m_0;$$

ce qui contredit que

$$\lim_{m\to\infty} \delta(P''_m) = 0.$$

Nous avons donc $\delta_0 > 0$.

7. Sur les fonctions $\delta_i(P)$ $(i = 1, 2, \cdots, 2n+2)$. Dans la configuration où le problème auxiliaire est donné, étudions la valeur de chaque fonction $\delta_i(P)$ au voisinage de $\tilde{L}_i$.

Considérons les espaces de n variables complexes $X_j(x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jn})$ $(j = 1, 2, \cdots, n+1)$. Dans chaque espace X_j, considérons un ensemble C_j de la forme

$$|x_{jk}| \leqq 1, \qquad (k = 1, 2, \cdots, n, \; k \neq n-j+2),$$
$$|x_{j\,n-j+2}| = 0,$$

et désignons par le même signe C_j l'image de C_j dans l'espace projectif P^n par la correspondance (P_j); on voit alors facilement que le plan analytique L_1 s'exprime sous forme

$$L_1 = \bigcup_{j=2}^{n+1} C_j.$$

Pour un nombre positif r, considérons dans l'espace X_j un ensemble V_j de la forme

$$|x_{jk}|<1+r, \qquad (k=1, 2, \cdots, n, \ k\neq n-j+2)$$
$$|x_{j\, n-j+2}|<r.$$

Désignons encore par le même signe V_j l'image de V_j dans P^n, et posons

$$V_r(L_1)=\bigcup_{j=2}^{n+1} V_j.$$

$V_r(L_1)$ est évidemment un voisinage de L_1 dans P^n, et il est défini uniquement par r.

Dans cette configuration géométrique, étant donné un nombre positif ε, choisissons r satisfaisant au condition

$$r<\frac{\varepsilon\cdot\rho}{2n^{1/2}(4+\varepsilon)+2\rho}$$

et considérons $V_r(L_1)$. Désignons par $\tilde{V}_r(L_1)$ l'ensemble des points de D^ρ situés sur $V_r(L_1)$, alors il se peut que $\tilde{V}_r(L_1)$ n'existe pas, mais si $\tilde{V}_r(L_1)$ existe effectivement, pour tout point P de $\tilde{V}_r(L_1)$, on a $\delta_1(P)<\varepsilon$.

En effet, supposons que $\tilde{V}_r(L_1)$ existe effectivement. Soit P' un point quelconque de $\tilde{V}_r(L_1)$. Le base-point $\underline{P}'$ de P' étant un point de $V_r(L_1)$, il appartient à l'un au moins des $V_j\,(j=2, 3, \cdots, n+1)$. Supposons que P' appartient à V_2; ceci ne restreint pas la généralité. P' est évidemment un point de D_2 et il appartient à D^ρ. Nous pouvons donc tracer un voisinage polycylindrique de centre P' et de rayon $\rho n^{-1/2}$ dans D_2 sur l'espace X_2. Comme

$$r<\frac{\rho}{2n^{1/2}},$$

nous pouvons encore tracer un voisinage polycylindrique γ de centre P' et de rayon r dans D_2 sur l'espace X_2. Puisque $\underline{P}'$ appartient à V_2, il existe dans γ au moins un point P_0 appartenant à $\tilde{L}_1$. Comme nous pouvons évidemment tracer un voisinage polycylindrique de centre P_0 et de rayon $\rho/2n^{1/2}$ dans D_2 sur X_2, d'après ce que nous avons étudié dans No. 2, soit γ_0 un voisinage polycylindrique de centre P_0 et de rayon r dans D_2 sur X_2, nous avons

$$\delta_1(P)<\varepsilon, \qquad \text{pour} \quad P\in\gamma_0.$$

Comme P' est évidemment un point de γ_0, nous avons

$$\delta_1(P')<\varepsilon.$$

D'après ce que nous venons de voir, nous avons le résultat suivant : Étant donné un nombre positif ε, on peut tracer un voisinage $V(L_1)$ de L_1 dans P^n de façon que, si l'ensemble $\tilde{V}(L_1)$ des points de D^ρ situés sur $V(L_1)$ existe effectivement, on ait

$$\delta_1(P)<\varepsilon, \qquad \text{pour} \quad P\in\tilde{V}(L_1).$$

Par des raisonnants analogues par rapport à $L_i\,(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$, nous avons facilement le résultat suivant: *Étant donné un nombre positif ε, on peut tracer un voisinage $V(L_i)$ de L_i dans l'espace projectif P^n de façon que, si l'ensemble $\tilde{V}(L_i)$ des points de D^ρ situés sur $V(L_i)$ existe effectivement, on ait*

$$\delta_i(P) < \varepsilon\,, \quad \textit{pour} \quad P \in \tilde{V}(L_i)\,, \qquad (i=1, 2, \cdots, 2n+2)\,.$$

8. Une métrique de l'espace projectif complexe P^n. Pour résoudre le problème auxiliaire, définissons en particulier une métrique de l'espace projectif complexe P^n à n dimensions.

Rappelons la circonstance envisagée au début du présent Chapitre. Dans l'espace projectif P^n, il y a les plans analytiques

$$L_i \quad U_i \equiv a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{i\,n+1}u_{n+1}\,, \qquad (i=1, 2, \cdots, 2n+2)\,,$$

choisis de façon que $n+1$ quelconques d'entre eux ne se rencontrent jamais en même temps. La correspondance (P_i) entre l'espace projectif P^n et l'espace de n variables complexes $X_i(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})$ est définie par

$$x_{i1} = \frac{U_{i+1}}{U_i}, \; x_{i2} = \frac{U_{i+2}}{U_i}, \; \cdots, \; x_{in} = \frac{U_{i+n}}{U_i}\,,$$

$$n+2 = 1\,, \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n+1\,,$$

$$2n+3 = n+2\,, \quad \text{pour} \quad n+2 \leqq i \leqq 2n+2\,.$$

L'espace X_i a L_i comme le plan infini.

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nons désignerons un ensemble dans P^n et son image dans l'espace X_i par la correspondance (P_i) par le même signe, s'il n'y aura pas de confusion.

Segments linéaires. Soit P_1 un point quelconque de P^n. P_1 n'appartient pas à l'un au moins des plans analytiques $L_i\,(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$. Supposons maintenant que P_1 n'appartient pas à L_1. Soit en outre P_2 un point quelconque de P^n n'appartenant pas à L_1. Considérons les deux points P_1, P_2, dans l'espace X_1, par la correspondance (P_1). Comme P_1, P_2 sont des points finis dans l'espace X_1, nous pouvons tracer un segment de droite dont les extrémités sont P_1 et P_2, dans l'espace X_1. Désignons par l l'image de ce segment dans P^n. L'image de l dans l'espace X_k $(2 \leqq k \leqq 2n+2)$ n'est pas en général un segment de droite. Nous appellerons *un segment linéaire* dans l'espace projectif P^n un ensemble tel qu'il existe au moins un segment de droite parmi ses images dans les espaces $X_i\,(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$ par les correspondances (P_i).

Longueur d'un segment linéaire. Soit l un segment linéaire dans P^n. Soit $s_i\,(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$ la longueur de l par la métrique euclidienne dans l'espace X_i. s_i ne peut être infini. Soit s la borne inférieure des valeurs $s_i\,(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$. Nous appellerons *$s$ la longueur de segment linéaire l* dans P^n. Comme il y a au moins un segment de droite parmi les images de l dans $X_i\,(i=1, 2, \cdots,$

$2n+2)$, s est une valeur positive définie.

Distance entre deux points dans P^n. Nous appellerons *ligne brisée* une courbe dans P^n qui se compose d'un nombre fini de segments linéaires dans P^n. Deux lignes brisées seront considérées distinctes, si elles se composent de différents systèmes de segments linéaires, mêmes si elles sont identiques comme ensembles. Soient P_1, P_2 deux points quelconques dans P^n. Nous appellerons *la distance entre P_1 et P_2* la borne inférieure des longueurs des lignes brisées reliant P_1 et P_2, et désignons cette distance entre P_1 et P_2 par $\mathrm{dis}(P_1, P_2)$. Nous allons montrer que la distance ainsi définie satisfait aux conditions:

1°. Pour deux points quelconques P_1, P_2 de P^n,
$\mathrm{dis}(P_1, P_2)=0$, si $P_1=P_2$.
$\mathrm{dis}(P_1, P_2)>0$, si $P_1\neq P_2$.

2°. Pour deux points quelconques P_1, P_2 de P^n,
$\mathrm{dis}(P_1, P_2)=\mathrm{dis}(P_2, P_1)$.

3°. Pour trois points quelconques P_1, P_2, P_3 de P^n,
$\mathrm{dis}(P_1, P_2)+\mathrm{dis}(P_2, P_3)\geqq \mathrm{dis}(P_1, P_3)$.

Il est évident que la distance dans P^n satisfait à la première condition de 1° et aux conditions 2°, 3°. Par suite, nous allons étudier la deuxième condition de 1°.

Soient P', P'' deux points quelconques dans P^n. Désignons par $d_i(P', P'')$ la distance euclidienne entre P' et P'' dans l'espace X_i. Lorsque l'un au moins de P' et P'' est un point infini de l'espace X_i, nous avons $d_i(P', P'')=+\infty$. Désignons par $d_0(P', P'')$ la borne inférieure des $d_i(P', P'')$ $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$.

Soit C un polycylindre de centre l'origine et de rayon R dans l'espace X_1; nous allons d'abord trouver une constante K telle que pour tout couple de points P', P'' de C

$$d_i(P', P'')\leqq Kd_0(P', P'').$$

Soient P', P'' deux points quelconques de C. Supposons que dans l'espace X_l $(2\leqq l\leqq 2n+2)$, P', P'' soient finis. Soient $(x'_{l1}, x'_{l2}, \cdots, x'_{ln})$, $(x''_{l1}, x''_{l2}, \cdots, x''_{ln})$ les coordonnées de P', P'' dans l'espace X_l, respectivement. D'après les correspondances (P_1), (P_2), il y a une correspondance entre l'espace X_1 et l'espace X_l de la forme

$$x_{1j}=\frac{b_{j1}x_{l1}+\cdots+b_{jn}x_{ln}+b_{j0}}{b_{01}x_{l1}+\cdots+b_{0n}x_{ln}+b_{00}}, \qquad (j=1, 2, \cdots, n),$$

$$|b_{jk}|\neq 0, \qquad \begin{pmatrix} j=0, 1, \cdots, n \\ k=0, 1, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

Posons

$$B'_j=b_{j1}x'_{l1}+b_{j2}x'_{l2}+\cdots+b_{jn}x'_{ln}+b_{j0},$$

$$B''_j = b_{j1}x''_{l1} + b_{j2}x''_{l2} + \cdots + b_{jn}x''_{ln} + b_{j0},$$
$$(j=0, 1, \cdots, n).$$

Nous avons par un calcul simple

$$d_1^2(P', P'') = \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{B''_j}{B''_0} - \frac{B'_j}{B'_0} \right|^2 \leqq \frac{2}{|B''_0|^2 |B'_0|^2} \cdot \sum_{j=0}^{n} |B'_j|^2 \cdot \sum_{j=0}^{n} |B''_j - B'_j|^2.$$

D'après les inégalités

$$|x'_{lj}| < R, \qquad |x''_{lj}| < R, \qquad (j=1, 2, \cdots, n),$$

nous avons

$$|B'_j| < R|B'_0|, \qquad |B''_j| < R|B''_0|, \qquad (j=1, 2, \cdots, n).$$

Comme C est un ensemble borné dans l'espace X_1, nous pouvons trouver une constante positive M telle que, pour tout couple de points P', P'' de C, on ait

$$\frac{1}{|B'_0|} < M, \qquad \frac{1}{|B''_0|} < M.$$

Nous avons alors

$$d_1^2(P', P'') \leqq 2M^2(1+nR^2) \cdot \sum_{j=0}^{n} |B''_j - B'_j|^2.$$

Dans l'inégalité ci-dessus, $B''_j - B'_j$ $(j=0, 1, \cdots, n)$ sont des polynômes linéaires homogènes de $x'_{l1} - x''_{l1}$, $x'_{l2} - x''_{l2}$, $\cdots$, $x'_{ln} - x''_{ln}$. D'où, par un calcul simple, nous avons

$$d_1^2(P', P'') \leqq 2M^2(1+nR^2) \cdot B \cdot \sum_{j=1}^{n} |x'_{lj} - x''_{lj}|^2,$$

B étant une constante positive qui s'exprime par un polynôme des valeurs absolues des b_{jk}.

Posons

$$2M^2(1+nR^2) \cdot B = K_l^2.$$

Nous avons alors

$$d_1(P', P'') \leqq K_l d_l(P', P'').$$

Nous avons supposé que P', P'' soient des points finis dans l'espace X_l, mais si l'un au moins de P', P'' est un point infini de l'espace X_l, nous avons $d_l(P', P'') = +\infty$. Nous avons alors pour tout couple de points P', P'' de C,

$$d_1(P', P'') \leqq K_l d_l(P', P'').$$

En raisonnant tout pareillement, nous pouvons trouver les constances K_i $(i=2, 3, \cdots, 2n+2)$ tels que pour tout couple de points P', P'' de C,

$$d_1(P', P'') \leqq K_i d_i(P', P'').$$

Posons

$$K = \max[1, K_2, K_3, \cdots, K_{2n+2}].$$

Nous avons ainsi

$$d_1(P', P'') \leqq K d_0(P', P''),$$

pour tout couple de points P', P'' de C.

Soit l un segment linéaire dans P^n tel qu'il appartienne à C, mais d'ailleurs quelconque. Soit s la longueur du segment linéaire l dans P^n et soit s_i la longueur de l par la métrique euclidienne dans l'espace X_i. D'après la définition même, l'un au moins des s_i $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$ est justement égal à s. Supposons maintenant $s_k = s$ $(1 \leqq k \leqq 2n+2)$. Nous allons comparer les deux longueurs s_1, s_k de l.

En général, dans un espace de n variables complexes, on peut considérer une courbe comme limite des lignes polygonales inscrites à cette courbe.

Nous avons alors

$$s_1 = K s_k = K s .$$

Il s'ensuit immédiatement de là que, si l est une ligne brisée appartenant à C dans P^n, et si s est sa longueur dans P^n, et s_1 sa longueur par rapport à la métrique euclidienne dans l'espace X_1, on a

$$s_1 \leqq K s .$$

Pour fixer les idées, nous avons supposé que C soit un polycylindre dans l'espace X_1. Mais, par des raisonnements analogues nous pouvons trouver facilement qu'*étant donné un polycylindre C dans l'espace X_i, il existe une constante K jouissant de la propriété telle que pour tout couple de points P', P'' de C,*

$$d_i(P', P'') \leqq K d_0(P', P'')$$

où $d_i(P', P'')$ est la distance euclidienne dans l'espace X_i entre P' et P'', et $d_0(P', P'')$ est la borne inférieure des $d_i(P', P'')$ $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$.

Soient P_1, P_2 deux points quelconques dans P^n tels que $P_1 \neq P_2$. Pour fixer les idées, supposons que P_1 n'appartienne pas à L_1. Dans l'espace X_1, traçons une hypersphère S de centre P_1 de façon que P_2 n'appartienne pas à S. Soit l une ligne brisée reliant P_1 et P_2 qui se compose du système précis des segments linéaires. Soit l' la composante connexe de l'ensemble $l \frown S$ contenant P_1. l' est évidemment une ligne brisée ayant la décomposition en segments linéaires engendrée par celle de l. Soient s, s' les longueurs des lignes brisées l, l' respectivement. On a évidemment $s' \leqq s$. Dans l'espace X_1, traçons un polycylindre C de centre l'origine de façon que $S \Subset C$, et trouvons la constante K jouissant de la propriété ci-dessus par rapport à ce polycylindre C. Soit s_1' la longueur de l' par la métrique euclidienne dans l'espace X_1. Nous avons alors

$$r \leqq s_1' \leqq K s' ,$$

r étant le rayon de S.

Nous avons donc

$$s \geqq \frac{r}{K}.$$

Comme la longueur s de toute ligne brisée l reliant P_1 et P_2 satisfait à la condition ci-dessus, nous avons

$$\operatorname{dis}(P_1, P_2) > 0.$$

Nous avons ainsi pour deux points quelconques P_1, P_2 de P^n,

$$\operatorname{dis}(P_1, P_2) > 0, \quad \text{si} \quad P_1 \neq P_2.$$

9. Une metrique d'un domaine sur l'espace projectif complexe à *n* dimensions. Soit D_0 un domaine sur l'espace projectif complexe P^n à n dimensions. Soient P_1, P_2 deux points quelconques de D_0; nous pouvons tracer une courbe l sur D_0 reliant P_1 et P_2 de façon que le base-ensemble $\underline{l}$[18] de l dans P^n soit une ligne brisée dans P^n. Nous appellerons une telle courbe une ligne brisée sur D_0. Définissons la longueur de la ligne brisée l sur D_0 par la longueur de la ligne brisée $\underline{l}$ dans P^n. Nous appellerons la distance entre P_1 et P_2 sur D_0 la borne inférieure des longueurs des lignes brisées sur D_0 reliant P_1 et P_2, et nous la désignerons par $\operatorname{dis}(P_1, P_2)$ sur D_0, ou $\operatorname{dis}(P_1, P_2)$ simplement, s'il n'y aura pas de confusion. À tout couple de points P_1, P_2 dans D_0, il correspond uniquement une valeur positive ou nulle comme la distance sur D_0.

La distance sur D_0 ainsi définie satisfait évidemment aux axiomes de la distance.

10. Résolution du problème auxiliaire. Dans la circonstance envisagée au début du présent Chapitre, nous allons résoudre le problème auxiliaire: ≪Soit ρ un nombre positif tel que $P_0 \in D^\rho$, P_0 étant un point de D donné à l'avance, et soit D_0 la composante connexe de D^ρ contenant P_0; trouver une fonction pseudoconvexe continue $\lambda_0(P)$ dans D_0 telle que, pour tout nombre réel α, l'ensemble Δ_α des points de D_0 donné par $\lambda_0(P) < \alpha$ satisfasse à la condition $\Delta_\alpha \Subset D$.≫

1°. Dans ce problème, négligeons pour le moment la condition demandée d'être pseudoconvexe. Nous pouvons alors trouver une fonction de la nature voulue. Comme D_0 est un domaine sur l'espace projectif P^n contenant le point P_0, à tout point P de D_0, faisons correspondre $\operatorname{dis}(P_0, P)$ sur D_0 définie dans le paragraphe précédant, et posons

$$\lambda(P) = \operatorname{dis}(P_0, P) \quad \text{sur} \quad D_0.$$

18) L'ensemble des bases-points des points appartenant à l.

$\lambda(P)$ est évidemment une fonction réelle continue dans D_0. Nous allons montrer que $\lambda(P)$ est une fonction de la nature voulue.

Dans chaque espace X_i $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$, traçons deux polycylindres C_i', C_i'':

$$C_i' \qquad |x_{ij}|<1+\rho \qquad (j=1, 2, \cdots, n),$$
$$C_i'' \qquad |x_{ij}|<1+3\rho \qquad (j=1, 2, \cdots, n).$$

Pour le polycylindre C_i'', on peut trouver une constante K_i jouissant de la propriété suivante:

Pour tout couple de points P_1, P_2 de C_i'',

$$d_i(P_1, P_2) \leqq K_i \cdot d_0(P_1, P_2),$$

où $d_i(P_1, P_2)$ est la distance euclidienne de P_1, P_2 dans l'espace X_i et $d_0(P_1, P_2)$ est la borne inférieure des $d_j(P_1, P_2)$ $(j=1, 2, \cdots, 2n+2)$.

Pour chaque C_i'', trouvons la constante K_i, et posons

$$K=\max[K_1, K_2, \cdots, K_{2n+2}].$$

Soit P' un point quelconque de D_0. Le base-point $\underline{P}'$ de P' dans P^n appartient à l'un au moins des polycylindres C_i' $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$. Supposons que $\underline{P}'$ appartienne à C_k' $(1 \leqq k \leqq 2n+2)$. Nous pouvons alors tracer un voisinage hypersphérique de centre P' et de rayon ρ dans D, sur l'espace X_k. Soit r un nombre positif tel que $r \leqq \rho$, mais d'ailleurs quelconque. Traçons un voisinage hypersphérique S de centre P' et de rayon r dans D, sur l'espace X_k. Considérons en outre un ensemble Γ dans D_0 donné par

$$\text{dis}(P, P') \text{ sur } D_0 < \frac{r}{K}.$$

En raisonnant comme au No. 8, nous avons facilement

$$\Gamma \subseteqq S.$$

Considérons maintenant, un ensemble V_1 sur D_0 donné par

$$\text{dis}(P_0, P) \text{ sur } D_0 < \frac{\rho}{2K} = \rho', \qquad P \in D_0.$$

Supposons que le base-point $\underline{P}_0$ de P_0 dans P^n appartient à C_k $(1 \leqq k \leqq 2n+2)$; ceci ne restreint pas la généralité. Nous pouvons alors tracer un voisinage hypersphérique S_0 de centre P_0 et de rayon $\rho/2$ dans D, sur l'espace X_k. D'après ce que nous venons de voir, il est clair que

$$V_1 \subseteqq S_0 \Subset D.$$

Pour un nombre positif α, notons Δ_α l'ensemble des points de D_0 donné par $\lambda(P) < \alpha$.

Nous avons alors

$$V_1 = \Delta_{\rho'}.$$

Soit ensuite B_1 l'ensemble des points frontières de V_1 appartenant à D_0. Soit V_1' l'ensemble des points de D_0 donné par

$$\mathrm{dis}(P, B_1) \text{ sur } D_0 < \rho',$$

où $\mathrm{dis}(P, B_1)$ sur D_0 est la borne inférieure des valeurs de $\mathrm{dis}(P, M)$ sur D_0, $M \in B_1$. D'après ce que nous venons de voir, nous avons facilement $V'_1 \Subset D$.

Posons

$$V_2 = V_1 \cup V_1',$$

nous avons alors

$$V_2 \Subset D, \qquad \text{et} \qquad V_2 = \Delta_{2\rho'}.$$

Et ainsi de suite, et nous avons une suite d'ensembles V_p ($p = 1, 2, \cdots$) telle que

$$V_p = \Delta_{p\cdot\rho'} \Subset D.$$

Étant donné un nombre positif α, choisissons un indice p de façon que $p \cdot \rho' \geqq \alpha$; nous avons alors

$$\Delta_\alpha \subseteqq \Delta_{p\cdot\rho'} \Subset D.$$

$\lambda(P)$ est ainsi une fonction de la nature voulue.

2°. En faisant des modifications à cette fonction $\lambda(P)$, nous allons trouver une fonction $\lambda_0(P)$ satisfaisant aux conditions demandées dans le problème auxiliaire.

Commençons d'abord par modifier les fonctions $\delta_i(P)$ $(i = 1, 2, \cdots, 2n+2)$.

Soit δ_0 la borne inférieure des valeurs de la fonction $\delta(P)$ dans D. On a $\delta_0 > 0$.[19]

D'après ce que nous avons vu dans No. 7, pour chaque plan analytique L_i $(i = 1, 2, \cdots, 2n+2)$ dans P^n, on peut choisir un voisinage V_i de L_i de façon que $\delta_i(P) < \delta_0/2$, pour $P \in \tilde{V}_i$, $\tilde{V}_i$ étant l'ensemble des points de D_0 situés sur V_i.

Pour fixer les idées, nous supposons que les ensembles $\tilde{V}_i$ existent effectivement. Ceci ne restreint pas la généralité, puisque, si l'on peut choisir au moins un ensemble V_j parmi V_i $(i = 1, 2, \cdots, 2n+2)$ tel que $\tilde{V}_j$ n'existe pas, il est évident que le problème auxiliaire est résoluble d'après le résultat d'Oka [**1**].

Posons

$$\Delta_i = D_0 - \tilde{V}_i, \qquad (i = 1, 2, \cdots, 2n+2).$$

Pour le moment, sur l'espace $X_j(x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jn})$ $(1 \leqq j \leqq 2n+2)$, considérons le domaine D_j. Soit r un nombre positif quelconque. Notons D_j^r l'ensemble des points de D_j donné par

$$d_j(P) > r$$

19) Voir No. 6.

où $d_j(P)$ est la distance frontière euclidienne par rapport à D_j. Pour le nombre positif ρ, considérons D_j^ρ. On a évidemment

$$\Delta_j \subset D_j^\rho .$$

En outre, pour un nombre ρ' suffisamment petit, considérons $D_j^{\rho'}$. Soient P', P'' deux points quelconques de $D_j^{\rho'}$, on a évidemment

$$|\delta_j(P')-\delta_j(P'')| < \frac{1}{\rho'^2} d_j(P', P'') \text{ sur } D_j ,$$

où $d_j(P', P'')$ sur D_j est la borne inférieure des longueurs des courbes continues sur D_j reliant P' et P'', par la métrique euclidienne de l'espace X_j.

Dans cette circonstance, en faisant *la modification d'élever de degré de continuité* à la fonction $\delta_j(P)$, on peut trouver une fonction pseudoconvexe continue $\delta_j'(P)$ dans un voisinage $V(\Delta_j)$ de Δ_j ayant les propriétés suivantes[20] :

1. Elle admet les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport aux parties réelles et imaginaires de x_{jk} $(k=1, 2, \cdots, n)$.

2. Pour tout point P de $V(\Delta_j)$, $|\delta_j(P)-\delta_j'(P)| < \delta_0/10$.

Soit $\underline{\Delta}_j$ le base-ensemble de Δ_j dans l'espace X_j. Traçons hypersphère S_j de centre l'origine dans X_j de façon que $\underline{\Delta}_j \Subset S_j$. Pour chaque Δ_i $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$, traçons une hypersphère S_i de cette sorte dans l'espace X_i respectivement. Soit R_i le rayon de chaque S_i. Posons

$$R = \max [R_1, R_2, \cdots, R_{2n+2}] .$$

En prenant un nombre positif c tel que

$$c \cdot R^2 < \frac{\delta_0}{10}$$

construisons une fonction

$$\varphi_j(P) = \delta_j'(P) + c \cdot \mu_j(x_j) ,$$

$$\mu_j(x_j) = \sum_{k=1}^{n} [u_{jk}^2 + v_{jk}^2] ,$$

dans $V(\Delta_j)$, où u_{jk}, v_{jk} sont la partie réelle et la partie imaginaire de x_{jk}.

La fonction $\varphi_j(P)$ est une fonction pseudoconvexe continue dans $V(\Delta_i)$ admettant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport aux u_{jk}, v_{jk} $(k=1, 2, \cdots, n)$.

Soit (α', β') un point quelconque sur la frotière de l'hypersphère de centre l'origine et de rayon 1 dans l'espace (α, β) de $2n$ variables réelles.

On a alors

$$W[\varphi_j(P) ; \alpha', \beta'] = W[\delta_j'(P) ; \alpha', \beta'] + W[c \cdot \mu_j(x_j) ; \alpha', \beta'] \geqq 4c ,$$
$$\text{pour } P \in V(\Delta_j) .$$

20) Voir Oka [1], Chap. II, No. 17.

Construisons de même, pour tout $\varDelta_i\,(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$, le voisinage $V(\varDelta_i)$ de $\varDelta_i$ et la fonction $\varphi_i(P)$ dans $V(\varDelta_i)$.

3°. Ensuite, nous considérons la modification de la fonction $\lambda(P)$ d'élever de degré de continuité. Comme la fonction $\lambda(P)$ n'est défine que dans D_0, la nouvelle fonction acquise par la modification d'élever de degré de continuité n'existe que dans un domaine plus petit que D_0. Donc, définissons à nouveau la fonction $\lambda(P)$ dans un domaine plus grand que D_0.

Dans chaque espace $X_i\,(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$, traçons une hypersphère S_i' de centre l'origine et de rayon $R+\rho$, où R est le nombre choisi dans 2°. D'après ce que nous avons vu au No. 8, on peut trouver à nouveau une constante K_i telle que pour deux points quelconques P_1, P_2 de S_i',

$$d_i(P_1, P_2) \leqq K_i d_0(P_1, P_2),$$

où $d_i(P_1, P_2)$ est la distance euclidienne entre P_1 et P_2 dans l'espace X_i et $d_0(P_1, P_2)$ étant la borne inférieure des $d_i(P_1, P_2)\,(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$. Posons

$$K=\max\left[K_1, K_2, \cdots, K_{2n+2}\right].$$

Considérons, sur l'espace $X_j\,(1\leqq j\leqq 2n+2)$, le domaine D_j et l'ensemble $\varDelta_j$. Traçons un voisinage hypersphérique de centre un point quelconque de $\varDelta_j$ et de rayon $\rho/2$. Soit $\varDelta_j'$ la réunion de tous les voisinages hypersphériques de cette sorte. En prenant

$$\rho'=\frac{\rho}{2K}$$

considérons l'ensemble $D^{\rho'}$ des points de D donné par

$$\delta(P)<\frac{1}{\rho'}, \qquad P\in D.$$

Comme pour tout point P de $\varDelta_j'$, on peut tracer un voisinage hypersphérique de centre P et de rayon $\rho/2$ dans D_j, d'après la propriété de la constante K, on voit facilement que

$$\varDelta_j'\subset D^{\rho'}.$$

Pour chaque $\varDelta_i\,(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$, considérons de même l'ensemble $\varDelta_i'$. On a encore

$$\varDelta_i'\subset D^{\rho'}.$$

Soit D_0' la composante connexe de l'ensemble $D^{\rho'}$ contenant le point P_0, nous avons évidemment

$$D_0\subset D_0', \quad \text{et} \quad \varDelta_i'\subset D_0', \qquad (i=1, 2, \cdots, 2n+2).$$

A tout point de D_0', faisons correspondre $\operatorname{dis}(P_0, P)$ sur D_0', et posons à nouveau

$$\lambda(P)=\operatorname{dis}(P_0, P)\ \text{sur}\ D_0'.$$

La nouvelle fonction $\lambda(P)$ est évidemment une fonction continue définie dans D_0'.

Étant donné un nombre positif α, les ensembles Δ_α', Δ_α dans D donnés par

$$\Delta_\alpha' \qquad \lambda(P) < \alpha\,, \qquad P \in D_0'\,,$$

$$\Delta_\alpha \qquad \lambda(P) < \alpha\,, \qquad P \in D_0\,,$$

sont évidemment contenus à l'intérieur complet de D.

La nouvelle fonction $\lambda(P)$ jouit de la propriété demandée.

Considérons la modification de la fonction $\lambda(P)$ dans chaque Δ_i' $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$.

Sur l'espace X_j $(1 \leqq j \leqq 2n+2)$, considérons l'ensemble Δ_j'. Soit P', P'' deux points quelconques de Δ_j'. On a évidemment

$$|\lambda(P') - \lambda(P'')| \leqq \text{dis}\,(P', P'') \text{ sur } D_0'\,.$$

Désignons par $d_j(P', P'')$ sur D_0' la borne inférieure des longueurs des courbes continues sur D_0 reliant P' et P'', par la métrique euclidienne dans l'espace X_j. On a évidemment

$$\text{dis}\,(P', P'') \text{ sur } D_0' \leqq d_j(P', P'') \text{ sur } D_0'\,.$$

On a alors

$$|\lambda(P') - \lambda(P'')| \leqq d_j(P', P'') \text{ sur } D_0'\,.$$

D'où, par *la modification d'élever de degré de continuité*,[21] on peut trouver une fonction continue $\lambda_i(P)$ dans un voisinage $V'(\Delta_j)$ de Δ_j ayant les propriété suivantes:

1. Elle admet les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre par rapport aux parties réelles et imaginaires de x_{jk} $(k=1, 2, \cdots, n)$.

2. Pour tout point P de $V'(\Delta_j)$,

$$|\lambda_j(P) - \lambda(P)| < \frac{\delta_0}{10}\,.$$

Pour chaque ensemble Δ_i $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$, nous pouvons trouver de même le voisinage $V'(\Delta_i)$ et la fonction $\lambda_i(P)$ dans $V'(\Delta_i)$.

4°. Nous allons ensuite trouver une fonction pseudoconvexe continue dans un voisinage de chaque Δ_i $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$.

Considérons, sur l'espace X_j $(1 \leqq j \leqq 2n+2)$, l'ensemble Δ_j'. Comme pour deux points quelconques P', P'' de Δ_j', on a

$$|\lambda(P') - \lambda(P'')| \leqq d_j(P', P'') \text{ sur } D_0'\ ;$$

grâce à Oka,[22] on a

$$W[\lambda_j(P)\,;\,\alpha', \beta'] > -N_j\,, \qquad \text{pour} \quad P \in V'(\Delta_j)\,,$$

21) Voir Oka [1], Chap. II, No. 17.
22) Voir Oka [1], Chap. II, No. 21.

où (α', β') est un point quelconque sur la frontière de l'hypersphère de centre l'origine et de rayon 1 dans l'espace (α, β) de $2n$ variables réelles, et N_j est une constante positive.

Pour chaque fonction $\lambda_i(P)$, cherchons la constante N_i de cette sorte, et posons

$$N = \max[N_1, N_2, \cdots, N_{2n+2}].$$

Nous avons alors

$$W[\lambda_i(P); \alpha' \beta'] > -N, \quad \text{pour} \quad P \in V'(\Delta_i), \qquad (i=1, 2, \cdots, 2n+2).$$

Considérons les fonctions $\varphi_i(P)$ $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$ définies dans $V(\Delta_i)$ respectivement que nous avons définie dans 1° du présent paragraphe. Comme on a

$$W[\varphi_i(P); \alpha', \beta'] \geqq 4c, \quad \text{pour} \quad P \in V(\Delta_i), \qquad (i=1, 2, \cdots, 2n+2),$$

en prenant une constante c' de façon que

$$4c \cdot c' > N, \qquad c' > 1,$$

posons

$$\lambda_i^0(P) = \lambda_i(P) + c'\varphi_i(P), \qquad (i=1, 2, \cdots, 2n+2);$$

les fonctions $\lambda_i^0(P)$ sont des fonctions pseudoconvexes continues définies dans un voisinage de Δ_i respectivement.

5°. De ces fonctions $\lambda_i^0(P)$ $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$, nous allons trouver une fonction pseudoconvexe continue $\lambda_0(P)$ dans le domaine D_0, satisfaisant à la condition demandée dans le problème auxiliaire.

D'après les définitions de D_0 et de Δ_i on a évidemment

$$D_0 = \bigcup_{i=1}^{2n+2} \Delta_i.$$

Pour définir la fonction $\lambda_0(P)$, considérons les fonctions $\lambda_i^0(P)$ $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$ comme les fonctions définies dans Δ_i respectivement.

Posons

$$\lambda_0(P) = \max[\lambda_1^0(P), \lambda_2^0(P), \cdots, \lambda_{2n+2}^0(P)];$$

de façon plus précise, pour un point quelconque P de D_0, prenons comme $\lambda_0(P)$ la borne supérieure des valeures à P des seules fonctions qui sont définies au point P, parmi $\lambda_i^0(P)$ $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$.

La fonction $\lambda_0(P)$ est une fonction définie dans D.

Soit P' un point quelconque de D_0. Si le point P' n'appartient à aucune des frontières des ensembles Δ_i $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$,[23] $\lambda_0(P)$ est évidemment pseudoconvexe continue au voisinage de P'.

Maintenant, supposons que le point P' est un point frontière de l'ensemble Δ_j $(1 \leqq j \leqq 2n+2)$. Comme la fonction $\lambda_j^0(P)$ existe dans le fait au voisinage de

23) Nous dirons qu'un point P est un point frontière de Δ_i, si P est un point d'accumulation d'une suite de points de Δ_i, et si P n'est pas un point intérieur de Δ_i.

Δ_j, $\lambda_j^0(P)$ est définie au voisinage de P'.

Comme

$$\delta_j(P') \leqq \frac{\delta_0}{2},$$

d'après la définition de $\lambda_j^0(P)$, nous avons facilement

$$\lambda_j^0(P') < \lambda(P') + c' \cdot \frac{8}{10} \delta_0 .$$

En outre, comme on a

$$\delta(P') \geqq \delta_0 ,$$

il existe au moins une fonction $\delta_k(P)$ parmi $\delta_i(P)$ $(i=1, 2, \cdots, 2n+2)$, telle que $\delta_k(P') \geqq \delta_0$.

Le point P' est alors un point intérieur de l'ensemble Δ_k. D'où, la fonction $\lambda_k^0(P)$ est précisément définie au voisinage de P'. D'après la définition de $\lambda_k^0(P)$, nous avons

$$\lambda_k^0(P') > \lambda(P') + c' \cdot \frac{8}{10} \delta_0 .$$

Nous avons donc

$$\lambda_k^0(P') > \lambda_j^0(P') .$$

Comme les fonctions $\lambda_k^0(P)$, $\lambda_j^0(P)$ sont continues au voisinage de P', nous avons

$$\lambda_k^0(P) > \lambda_j^0(P), \quad \text{au voisinage de} \quad P' .$$

La fonction $\lambda_k^0(P)$ joue le même role dans le cas où P' appartient à la frontière d'autre Δ_i.

D'où la fonction $\lambda_0(P)$ est évidemment pseudoconvexe continue au voisinage de P'.

La fonction $\lambda_k^0(P)$ est ainsi une fonction pseudoconvexe continue dans D_0.

D'après la définition même, on a

$$\lambda_0(P) > \lambda(P) - \frac{\delta_0}{10} .$$

D'où il est évident que, étant donné un nombre positif α, l'ensemble Δ_α donné par $\lambda_0(P) < \alpha$, $P \in D_0$ est contenu à l'intérieur complet de D.

Le problème auxiliaire est ainsi résolu.

11. Résolution du problème frontière. Nous allons résoudre le problème frontière: ≪Étant donné un domaine pseudoconvexe D ayant au moins un point frontière sur l'espace projectif complexe à n dimensions, trouver une fonction pseudoconvexe continue $\varphi(P)$ dans D jouissant de la propriété (P_1), et de la propriété (α) que, pour tout nombre réel α, l'ensemble D_α des points de D donné par $\varphi(P) < \alpha$ remplie la condition $D_\alpha \Subset D$.≫

Commençons par résoudre le problème suivant:

≪Étant donnée une fonction pseudoconvexe continue $\Phi(P)$ ayant la propriété (α), dans le domaine D, modifier la fonction $\Phi(P)$ de manière qu'elle jouit de la propriété (P_1), en conservant les propriétés pour D.≫

Comme D est un domaine pseudoconvexe ayant au moins un point frontière, d'après ce que nous avons vu dans No. 4, étant donnés un nombre positif ε et un domaine D_0 tel que $D_0 \Subset D$, on peut trouver une fonction pseudoconvexe continue $\varphi_0(P)$ ayant la propriété (P_1) telle que

$$|\varphi_0(P)-\Phi(P)|<\varepsilon,$$

dans D_0.

D'où, on peut trouver une fonction pseudoconvexe continue jouissant de la propriété (P_1) et de la propriété (α), par *la méthode d'Oka*[24] sans modification.

Le problème étant ainsi résolu, pour résoudre le problème frontière, il suffit de trouver une fonction pseudoconvexe continue ayant la propriété (α), dans D.

Comme le problème auxiliaire est résoluble dans D, d'après *l'idée d'Oka*,[25] on peut trouver une fonction pseudoconvexe continue ayant la propriété (α), dans D, sans difficulté.

Le problème frontière est ainsi résolu.

THÉORÈME. *Étant donné un domaine pseudoconvexe D sans point critique intérieur ayant au moins un point frontière, sur l'espace projectif complexe à n dimensions, on peut toujours trouver une fonction pseudoconvexe continue $\varphi(P)$ dans D jouissant des propriétés suivantes:* 1°. *$\varphi(P)$ possède la propriété* (P_1).[26] 2°. *Pour tout nombre réel α, l'ensemble des points de D donné par $\varphi(P)<\alpha$ reste à l'intérieur complet de D.*

D'après le théorème ci-dessus, il s'ensuit que:

Dans tout domaine de cette sorte, il existe une fonction de Levi strictement positive et complète.

Université féminine de Nara

Bibliographie

[1] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables IX-Domaines finis sans point critique intérieur, Japan J. Math., **23** (1953), 97-155.

[2] T. Nishino, Sur les espaces analytiques holomorphiquement complets, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962), 247-254.

[3] H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 1934.

---

24), 25) Voir Oka [1], Chap. II, No. 22.

26) Voir No. 5 ainsi que 3° de No. 3.