J. Math. Soc. Japan
Vol. 15, No. 3, 1963

Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations

par Takako KŌMURA et Yukio KOMURA

(Reçu le 22 mars, 1963)

Introduction

L'objet de ce travail est le traitement de l'espace de suites, comme modèle de la théorie des espaces vectoriels topologiques.

Dans tout ce qui suit, nous considérerons un espace de suites $\mathfrak{x}=(x_i)$ de nombres réels en abrégé. Nous désignerons par ω l'espace de toutes les suites et par φ l'espace des suites telles que les coordonnées soient nulles sauf un nombre fini d'entre elles.

Dans § 1, nous étudions la structure des espaces parfaits, c'est-à-dire, "vollkommene Räume" de Köthe, en particulier les espaces parfaits tonnelés ou bornologiques. Pour tout espace de suites λ, le dual λ^* au sens de Köthe est défini comme l'ensemble des suites $\mathfrak{x}=(x_i)$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| < \infty \qquad \text{pour tout } \mathfrak{y}=(y_i)\in\lambda .$$

Nous considérons deux autres duals λ' et $\lambda^\#$ de l'espace λ. Pour chercher les conditions pour être tonnelé ou bornologique, nous définissons deux sous-espaces λ_r et λ_0 de l'espace parfait λ, tel que

$$(\lambda_r)' = (\lambda_r)^* = (\lambda_0)^\# = (\lambda_0)' = (\lambda_0)^* = \lambda^* .$$

(Les définitions 1.1 et 1.2.) L'espace λ_r (resp. λ_0) est le maximum des sous-espaces μ de λ tels qu'ils contiennent φ et soient tonnelés (resp. bornologiques) pour la topologie de Mackey $\tau(\mu, \lambda^*)$ (le théorème 1.2 et le corollaire 2 du théorème 1.3).

Dans § 2, comme application de notre théorie, nous donnons un exemple des espaces parfaits qui sont tonnelés (plus précisément, les complétés des sous-espaces bornologiques) et non-bornologiques, utilisant l'Hypothèse de Continuum. C'est une réponse (presque négative) à un problème de Köthe [**6**, p. 422] qui demande si l'espace parfait tonnelé est nécessairement bornologique ou non, et en même temps c'est une réponse (presque négative) à un problème de Dieudonné [**2**, p. 504] qui demande si le complété de l'espace bornologique est nécessairement bornologique ou non.

Dans § 3, nous étudions la dualité entre un espace de suites λ et son

β-dual λ^β, qui est défini comme l'ensemble des suites $\mathfrak{x}=(x_i)$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \qquad \text{convergent} \qquad \text{pour tout } \mathfrak{y}=(y_i)\in\lambda .$$

Dans notre théorie, la propriété la plus fondamentale est que tout espace parfait λ est le dual topologique d'un sous-espace de λ^* pour la topologie forte. Malheureusement cela n'est pas vrai pour l'espace λ tel que $\lambda=\lambda^{\beta\beta}$. (Ce n'est pas vrai non plus pour l'espace parfait de fonctions en général.) Par suite, nous définissons une catégorie d'espaces de suites avec cette propriété, qui s'appellent "espaces semi-parfaits".

Antérieurement, un des auteurs a publié un travail sur les espaces de fonctions [4], dans lequel les espaces de fonctions (généralisées) semi-parfaits ont été définis. Ils correspondent à nos espaces de suites semi-parfaits.

Nous utiliserons les notations suivantes. Soit E, F deux espaces vectoriels en dualité. Nous désignerons par $\sigma(E,F)$ la topologie faible sur E, par $\tau(E,F)$ la topologie de Mackey sur E et par $\beta(E,F)$ la topologie forte sur E (c'est-à-dire, la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de F pour la topologie $\sigma(F,E)$). Quand E est muni d'une topologie, E' désigne le dual topologique de E et $E^\#$ l'espace des formes linéaires bornées sur E pour la topologie envisagée. Par suite, on a $E'=E^\#$ si E est bornologique.

§ 1. Espaces parfaits

Nous commencerons par expliquer des propriétés bien connues sur les espaces parfaits. Pour tout espace de suites λ, on dénote

$$\lambda^*=\{\mathfrak{x}=(x_i)\,;\ \sum_{i=1}^{\infty}|x_i y_i|<\infty \qquad \text{pour tout } \mathfrak{y}=(y_i)\in\lambda\}.$$

Alors λ et λ^* sont en dualité pour la forme bilinéaire canonique

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i .$$

Pour tout espace de suites λ, il est clair que $\lambda\subset\lambda^{**}$. Un espace de suites λ s'appelle un *espace de Köthe* ou un *espace parfait* lorsque $\lambda=\lambda^{**}$.

On dit qu'une partie $A\subset\omega$ est *normale* si les relations $\mathfrak{x}=(x_i)\in A$, $\mathfrak{y}=(y_i)\in\omega$ et $|y_i|\leqq|x_i|$ pour tout i entraînent $\mathfrak{y}=(y_i)\in A$. Par exemple, φ, ω et tout espace parfait sont normaux. Pour une partie quelconque $A\subset\omega$, l'*enveloppe normale* de A est l'ensemble des suites $\mathfrak{y}=(y_i)$ telles que $|y_i|\leqq|x_i|$ (pour tout i) pour une suite $\mathfrak{x}=(x_i)$ de A au moins.

Un espace normal μ sera toujours, sauf mention expresse du contraire, considéré comme espace muni de la topologie $\beta(\mu,\mu^*)$. Par suite, μ' (resp. $\mu^\#$) signifie le dual topologique de μ (resp. l'espace des formes linéaires bornées sur μ) pour la topologie $\beta(\mu, \mu^*)$.

Les deux théorèmes fondamentaux sont dûs à Köthe [**5**].

THÉORÈME A. *Tout espace parfait λ est séquentiellement complet pour la topologie $\sigma(\lambda, \lambda^*)$.*

THÉORÈME B. *Tout espace parfait λ est complet pour la topologie $\tau(\lambda, \lambda^*)$ et pour la topologie $\beta(\lambda, \lambda^*)$.*

Nous définissons maintenant les deux sortes de sous-espaces des espaces parfaits qui jouent un rôle essentiel dans cette étude.

DÉFINITION 1.1. Soit λ un espace parfait. Nous désignerons par λ_r l'adhérence de φ dans λ pour la topologie $\beta(\lambda, \lambda^*)$. λ_r s'appelle le *sous-espace régulier* de λ. Nous dirons qu'un espace de suites μ est *régulier* si $\mu = \lambda_r$ pour un espace parfait λ convenable.

DÉFINITION 1.2. Soit λ un espace parfait. Nous désignerons par λ_0 l'adhérence de φ dans λ pour la topologie bornologique associée à la topologie $\beta(\lambda, \lambda^*)$, c'est-à-dire, la plus fine parmi les topologies localement convexes sur λ pour lesquelles les parties bornées de E sont les mêmes que pour la topologie $\beta(\lambda, \lambda^*)$.

On voit aisément que λ_r et λ_0 sont normaux, et on a $\varphi \subset \lambda_0 \subset \lambda_r \subset \lambda$.

Nous commencerons par prouver quelques lemmes.

LEMME 1.1. *Soit λ un espace parfait. Toute partie B de λ convexe, cerclée et compacte pour la topologie $\sigma(\lambda, \varphi)$ est bornée pour la topologie $\beta(\lambda, \lambda^*)$.*

DÉMONSTRATION. Un espace λ_B engendré par B est un espace de Banach muni de la boule unité B. Donc, B est absorbée par tout tonneau par rapport à $\sigma(\lambda, \varphi)$ (tonneau signifie un ensemble convexe, cerclé, absorbant et fermé), c'est-à-dire,

$$\sup_{\mathfrak{x} \in B, \mathfrak{y} \in A} |\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle| < \infty$$

pour toute partie A de φ bornée pour $\sigma(\varphi, \lambda)$. Soit C une partie bornée de λ^* pour $\sigma(\lambda^*, \lambda)$. Comme λ est normal, l'enveloppe normale N_C de C est bornée pour $\sigma(\lambda^*, \lambda)$, donc $\varphi \cap N_C$ est bornée pour $\sigma(\varphi, \lambda)$. Par conséquent, on a

$$\sup_{\mathfrak{x} \in B, \mathfrak{y} \in C} |\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle| \leqq \sup_{\mathfrak{x} \in B, \mathfrak{z} \in \varphi \cap N_C} |\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle| < \infty ,$$

ce qui signifie que B est bornée pour $\beta(\lambda, \lambda^*)$.

LEMME 1.2. *Soit λ un espace parfait. On désigne par φ_τ l'espace φ muni de la topologie induite par la topologie $\beta(\lambda, \lambda^*)$. Alors on a*

$$\lambda^* = (\varphi_\tau)' = (\varphi_\tau)^\# .$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que

$$(\varphi_\tau)' \subset (\varphi_\tau)^\# \subset \omega .$$

Comme φ est total sur λ^*, on a $\lambda^* \cap \varphi^\perp = \{\mathbf{0}\}$, où $\varphi^\perp = \{\mathfrak{y} \in \lambda' ; \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = 0$ pour tout $\mathfrak{x} \in \varphi\}$. Par suite,

$$\varphi'_\tau = \lambda'/\varphi^\perp \supset \lambda^*/(\lambda^* \cap \varphi^\perp) = \lambda^* .$$

Donc, il suffit de démontrer que $(\varphi_\tau)^\# \subset \lambda^*$. Soit $\mathfrak{y} = (y_i)$ un élément de $(\varphi_\tau)^\#$. Pour tout élément $\mathfrak{x} = (x_i)$ de λ, l'ensemble $\{(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \cdots, \varepsilon_n x_n, 0, 0, \cdots)\,;\ \varepsilon_i = 1$ ou $-1, n \geqq 1\}$ est borné dans φ_τ. On a donc

$$\sup_{n \geqq 1} \sum_{i=1}^n | x_i y_i | < \infty ,$$

comme $\mathfrak{y}$ est une forme linéaire bornée sur φ_τ. Cela entraîne que $\mathfrak{y} = (y_i) \in \lambda^*$.

COROLLAIRE. *Soit λ un espace parfait. Alors, pour tout espace μ tel que $\varphi \subset \mu \subset \lambda_r$, la topologie τ sur μ induite par la topologie $\beta(\lambda, \lambda^*)$ est égale à la topologie $\tau(\mu, \lambda^*)$.*

En effet, il résulte du lemme précédant et de la définition de λ_r que τ est moins fine que $\tau(\mu, \lambda^*)$. Par suite, il suffit de vérifier que toute partie convexe, cerclée et équicontinue pour $\tau(\mu, \lambda^*)$, c'est-à-dire, convexe, cerclée et compacte pour $\sigma(\lambda^*, \mu)$ est bornée pour $\sigma(\lambda^*, \lambda)$. Mais cela est évident en vertu du lemme 1.1.

LEMME 1.3. *Soit λ un espace parfait. Alors on a $(\lambda_0)^* = \lambda^*$, et plus précisément les parties bornées de $(\lambda_0)^* = \lambda^*$ sont les mêmes pour la topologie $\sigma((\lambda_0)^*, \lambda_0)$ et pour la topologie $\sigma(\lambda^*, \lambda)$. Par suite, on a $\beta(\lambda_0, (\lambda_0)^*) = \beta(\lambda, \lambda^*)$ sur λ_0.*

DÉMONSTRATION. Pour tout élément $\mathfrak{x} = (x_i)$ de λ, la partie $B = \{\mathfrak{y} = (y_i)\,;\ \lim_{i \to \infty} y_i/x_i = 0, |y_i| \leqq |x_i|\}$ est contenue dans λ_0 et bornée pour $\sigma(\lambda_0, \varphi)$. Alors, comme λ_B, l'espace engendré par B muni de la boule unité B, est un espace de Banach, B est absorbée par tout tonneau par rapport à $\sigma(\lambda_0, \varphi)$, autrement dit, B est bornée pour $\beta(\lambda_0, \varphi)$. Soit A une partie de $(\lambda_0)^*$ normale et bornée pour $\sigma((\lambda_0)^*, \lambda_0)$. Comme $A \cap \varphi$ est bornée pour $\sigma(\varphi, \lambda_0)$, on a

$$\sup_{\mathfrak{y} \in B, \mathfrak{z} \in A \cap \varphi} | \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \rangle | < \infty ,$$

d'où

$$\sup_{n \geqq 1, (z_i) \in A} \sum_{i=1}^n | x_i z_i | < \infty ,$$

puisque l'ensemble $\{(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \cdots, \varepsilon_n x_n, 0, 0, \cdots)\,;\ \varepsilon_i = 1$ ou $-1, n \geqq 1\}$ est contenu dans B. Cela signifie que A est contenue dans λ^* et bornée pour $\sigma(\lambda^*, \lambda)$.

COROLLAIRE. *Soit λ un espace parfait. Alors on a $(\lambda_r)^* = \lambda^*$, et $\beta(\lambda_r, (\lambda_r)^*) = \beta(\lambda, \lambda^*)$ sur λ_r.*

En effet, comme $\lambda_0 \subset \lambda_r \subset \lambda$, on a $(\lambda_0)^* \supset (\lambda_r)^* \supset \lambda^*$. Donc, en vertu du lemme 1.3, on obtient aussitôt ce corollaire.

THÉORÈME 1.1. *Soit λ un espace parfait. Alors on a*

$$(\lambda_r)' = (\lambda_r)^* = \lambda^* .$$

Par suite, le sous-espace régulier λ_r de λ est tonnelé pour la topologie $\beta(\lambda_r, (\lambda_r)^*)$.

En effet, en vertu de la définition de λ_r, du lemme 1.2 et du corollaire du lemme 1.3, ce théorème est directement établi. c. q. f. d.

Pour les espaces vectoriels topologiques abstraits, expliquons la *convergence au sens de Mackey*, notion importante pour rechercher les espaces bornologiques ([7], [3]). Soit E un espace localement convexe. On dit qu'une suite $\{\mathfrak{x}_n\}$ dans E *converge vers* $\mathfrak{x}_\infty \in E$ *au sens de Mackey*, s'il existe une suite $\{\varepsilon_n\}$ convergente vers 0 et une partie B de E bornée telles que

$$(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}_\infty)/\varepsilon_n \in B \qquad \text{pour tout } n.$$

Soit E_0 un sous-espace dense dans E, qui est bornologique pour la topologie induite par celle de E. Nous désignerons par $\tilde{E}_0$ l'enveloppe fermée de E_0 dans E pour la convergence au sens de Mackey. Autrement dit, soit Ω le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_1$. Nous posons $E_0^{(0)} = E_0$. Pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$, s'il existe $\alpha - 1$, nous posons

$$E_0^{(\alpha)} = \{\mathfrak{x} \in E;\ \mathfrak{x} \text{ est la limite d'une suite } \{\mathfrak{x}_n\} \subset E_0^{(\alpha-1)} \\ \text{pour la convergence au sens de Mackey}\}$$

et si α est un nombre ordinal limite,

$$E_0^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} E_0^{(\beta)}.$$

Alors, $\tilde{E}_0$ se dénote par $\bigcup_{\alpha<\Omega} E_0^{(\alpha)}$. Comme E_0 est bornologique, dans cette construction, toute forme linéaire bornée sur E_0 se prolonge uniquement en une forme linéaire bornée sur $E_0^{(\alpha)}$ pour chaque $\alpha < \Omega$, par induction transfinie. Donc, tout sous-espace F de E tel que $\tilde{E}_0 \supset F \supset E_0$, est aussi bornologique. Un résultat intéressant de Mackey dit que si un sous-espace H de E est tel que l'on ait $H \supset \tilde{E}_0$, et $H/\tilde{E}_0$ soit 1-dimensional, il est nécessairement non-bornologique.

On voit aisément que tout espace parfait λ est complet pour la convergence au sens de Mackey, donc λ_r et λ_0 sont aussi complet pour la même convergence.

LEMME 1.4. *Soit μ un espace normal, contenant φ et complet pour la convergence au sens de Mackey. Alors, toute forme linéaire l sur μ qui est bornée sur l'enveloppe normale $N_\mathfrak{x}$ de chaque élément $\mathfrak{x} = (x_i)$ de μ, est bornée pour la topologie $\beta(\mu, \mu^*)$.*

DÉMONSTRATION. Soit l une forme linéaire ci-dessus mentionnée. Si l n'était pas bornée pour $\beta(\mu, \mu^*)$, il existerait une partie B de μ normale et bornée pour $\beta(\mu, \mu^*)$ telle que

$$\sup_{\mathfrak{x}\in B} |\langle \mathfrak{x}, l\rangle| = \infty$$

et par suite, il existerait une suite $\{\mathfrak{x}_n = (x_i^{(n)})\}$ des éléments de B telle que

$$(*) \qquad |\langle \mathfrak{x}_n, l\rangle| > 2^{3n} \qquad \text{pour tout } n.$$

On pose $|\mathfrak{x}_n| = (|x_i^{(n)}|)$ pour tout n. Comme μ est complet pour la convergence au sens de Mackey, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|\mathfrak{x}_n|$ converge dans μ. Soit $\mathfrak{x} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|\mathfrak{x}_n|$, $N_{\mathfrak{x}}$ = l'enveloppe normale de $\mathfrak{x}$, et $\mu_{N_{\mathfrak{x}}}$ = l'espace de Banach engendré par $N_{\mathfrak{x}}$ muni de la boule unité $N_{\mathfrak{x}}$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n}\mathfrak{x}_n$ converge dans $\mu_{N_{\mathfrak{x}}}$. Comme l est continue sur $\mu_{N_{\mathfrak{x}}}$, $\langle \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n}\mathfrak{x}_n, l\rangle$ converge. D'autre part, par $(*)$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n}\langle \mathfrak{x}_n, l\rangle$ diverge; nous obtenons donc une contradiction.

LEMME 1.5. *Soit λ un espace parfait et soit μ un espace normal tel que $\varphi \subset \mu \subset \lambda$. Alors, toute forme linéaire l sur μ, qui est bornée sur $N_{\mathfrak{x}} \cap \mu$ pour chaque élément $\mathfrak{x} = (x_i)$ de λ, où $N_{\mathfrak{x}}$ est l'enveloppe normale de $\mathfrak{x} = (x_i)$, se prolonge en une forme linéaire bornée $\tilde{l}$ sur λ.*

DÉMONSTRATION. Comme l est bornée sur $N_{\mathfrak{x}}$ de chaque $\mathfrak{x} = (x_i)$ de μ, l se représente comme différence de deux formes linéaires positives sur μ. Donc, sans perdre la généralité, nous supposons que $l \geqq \mathbf{0}$. Nous définissons la fonction finie $\tilde{l}$ sur l'ensemble des éléments $\mathfrak{x} = (x_i) \geqq \mathbf{0}$ de λ par la relation

$$\langle \mathfrak{x}, \tilde{l}\rangle = \sup_{\mathfrak{y}\in\mu,\, \mathbf{0}\leqq\mathfrak{y}\leqq\mathfrak{x}} \langle \mathfrak{y}, l\rangle .$$

Comme μ est normal, $\tilde{l}$ se prolonge en une forme linéaire positive sur λ (qu'on notera encore $\tilde{l}$). Alors, $\tilde{l}$ est bornée sur $N_{\mathfrak{x}}$ de tout $\mathfrak{x} = (x_i)$ de λ, et d'après le lemme 1.4, $\tilde{l}$ est bornée pour $\beta(\lambda, \lambda^*)$.

THÉORÈME 1.2. *Soit λ un espace parfait et soit μ un espace tel que $\varphi \subset \mu \subset \lambda$. Dans ces conditions, si $\mu \subset \lambda_0$ et μ est normal, μ est bornologique pour la topologie $\tau(\mu, \lambda^*)$. Inversement, si μ est bornologique pour la topologie $\tau(\mu, \lambda^*)$, on a $\mu \subset \lambda_0$.*

DÉMONSTRATION. D'abord, nous supposons que $\mu \subset \lambda_0$ et μ est normal. Tout revient à prouver que l'espace des formes linéaires bornées sur μ pour $\tau(\mu, \lambda^*)$ coïncide avec λ^*. Soit l une forme linéaire bornée sur μ pour $\tau(\mu, \lambda^*)$. Alors, l est bornée pour $\sigma(\mu, \lambda^*)$, et pour tout $\mathfrak{x} = (x_i)$ de λ, $N_{\mathfrak{x}} \cap \mu$ est bornée pour $\sigma(\mu, \lambda^*)$. Donc, en vertu du lemme 1.5, l se prolonge en une forme linéaire bornée $\tilde{l}$ sur λ, et en vertu du lemme 1.2, la restriction $\tilde{l}|\varphi$ de $\tilde{l}$ sur φ appartient à $(\varphi_\tau)' = \lambda^*$. Comme $\tilde{l}$ est continue pour la topologie bornologique associée à $\beta(\lambda, \lambda^*)$, pour laquelle φ est dense dans λ_0, l s'identifie avec $\tilde{l}|\varphi$.

Ensuite, nous supposons que μ contient un élément $\mathfrak{x} = (x_i) \notin \lambda_0$. Alors, par la définition de λ_0, il existe un élément l de $\lambda^\#$ orthogonal à φ tel que $\langle \mathfrak{x}, l\rangle \neq 0$. Comme les éléments de λ^* orthogonaux à φ se réduisent à un seul élément $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots)$, l n'est égal à aucun élément de λ^*, sur μ. D'autre part, en vertu du théorème B, les parties bornées de λ sont les mêmes pour $\beta(\lambda, \lambda^*)$

et pour $\sigma(\lambda, \lambda^*)$, et les parties bornées de μ sont les mêmes pour $\tau(\mu, \lambda^*)$ et pour $\sigma(\mu, \lambda^*)$, donc, les parties bornées de μ pour $\tau(\mu, \lambda^*)$ sont les intersections avec μ des parties bornées de λ pour $\beta(\lambda, \lambda^*)$. Cela signifie que μ n'est pas bornologique pour $\tau(\mu, \lambda^*)$. c. q. f. d.

Pour un espace parfait λ, φ est bornologique pour la topologie τ sur φ induite par la topologie $\beta(\lambda, \lambda^*)$ en vertu du lemme 1.2 et du son corollaire. Si l'enveloppe fermée $\tilde{\varphi}$ de φ dans λ pour la convergence au sens de Mackey ne coïncide pas avec λ_0, le sous-espace vectoriel μ engendré par $\tilde{\varphi}$ et $\mathfrak{x} = (x_i) \in \lambda_0, \notin \tilde{\varphi}$, n'est pas bornologique pour la topologie $\tau(\mu, \lambda^*)$. Pourtant, les auteurs ne savent pas s'il existe un tel espace λ. (Dans le cas de coordonnées non-dénombrables, l'espace ω a une telle propriété.) Si tel espace n'existe pas, la condition telle que μ soit normal, dans le théorème ci-dessus, n'est pas nécessaire, car tout espace μ tel que $\tilde{\varphi} \supset \mu \supset \varphi$ est bornologique. Notons que l'espace $\{(\varepsilon_i x_i); (x_i) \in \lambda, \varepsilon_i \to 0\}$ est égal à $\varphi^{(1)} = \{\mathfrak{x} \in \lambda; \mathfrak{x}$ est la limite d'une suite $\{\mathfrak{x}_n\} \subset \varphi$ pour la convergence au sens de Mackey$\}$, et que l'on a $\tilde{\varphi} \neq \varphi^{(1)}$ en général.

COROLLAIRE. *Soit λ un espace parfait. Alors, l'espace λ_0 est bornologique pour la topologie $\beta(\lambda_0, (\lambda_0)^*) = \tau(\lambda_0, (\lambda_0)^*)$, et par suite, on a $(\lambda_0)^\# = (\lambda_0)' = (\lambda_0)^*$. Le sous-espace régulier λ_r est le complété d'un espace bornologique pour la topologie $\beta(\lambda, \lambda^*)$.*

En effet, comme λ est complet pour $\beta(\lambda, \lambda^*)$ en vertu du théorème B, λ_r est complet pour $\beta(\lambda, \lambda^*)$, donc, λ_r est le complété de l'espace bornologique λ_0.

THÉORÈME 1.3. *Soit λ un espace parfait, et soit μ un espace normal et complet tel que l'on ait $\mu \supset \varphi$ et $\mu' = \lambda^*$. Alors, on a $\mu = \lambda_r$.*

DÉMONSTRATION. D'abord $\mu^* \subset \mu' = \lambda^*$. Soit $\mathfrak{y} = (y_i)$ un élément de $\mu' = \lambda^*$. Pour un élément quelconque $\mathfrak{x} = (x_i)$ de μ, $\mathfrak{y} = (y_i)$ est borné sur l'enveloppe normale $N_\mathfrak{x}$, et par suite

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| < \infty,$$

c'est-à-dire, $\mathfrak{y} = (y_i) \in \mu^*$. Donc, $\mu^* = \lambda^*$ et $\mu \subset \mu^{**} = \lambda^{**} = \lambda$. Sur μ, on a $\beta(\mu, \mu^*) = \beta(\lambda, \lambda^*)$. En effet, il est évident que $\beta(\mu, \mu^*)$ est plus fine que $\beta(\lambda, \lambda^*)$. Soit B une partie de $\mu^* = \lambda^*$ convexe, cerclée, fermée et bornée pour $\sigma(\mu^*, \mu)$. Alors, comme on a $\mu' = \mu^*$, B est compact pour $\sigma(\mu^*, \mu)$, a fortiori, pour $\sigma(\mu^*, \varphi) = \sigma(\lambda^*, \varphi)$, et en vertu du lemme 1.1, B est bornée pour $\beta(\lambda^*, \lambda)$, a fortiori, pour $\sigma(\lambda^*, \lambda)$. Par suite, $\beta(\lambda, \lambda^*)$ est plus fine que $\beta(\mu, \mu^*)$. Ensuite, si nous prouvons que φ est dense dans μ pour $\beta(\mu, \mu^*)$, on obtient que $\mu = \lambda_r$. Si φ n'était pas dense dans μ pour $\beta(\mu, \mu^*)$, il existerait un élément $\mathfrak{y} \neq \mathbf{0}$ de μ' tel que $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = 0$ pour tout $\mathfrak{x} \in \varphi$. D'autre part, un élément de λ^* orthogonal à φ est nécessairement $\mathbf{0}$, on obtient donc une contradiction.

COROLLAIRE 1. *Soit λ un espace parfait et soit μ un espace normal tel que*

$\lambda_r \subset \mu \subset \lambda$. *Dans ces conditions, pour que l'on ait* $\lambda_r = \mu$, *il faut et il suffit que l'on ait* $\lambda^* = \mu'$.

En effet, en vertu du théorème 1.1, la relation $\lambda_r \subset \mu \subset \lambda$ entraîne que $\lambda^* = \mu^* \subset \mu'$. Si $\lambda^* = \mu'$, on a $\mu = \lambda_r$ d'après le théorème 1.3, et réciproquement, d'après le théorème 1.1. c. q. f. d.

Il résulte du théorème 1.3 que pour un espace parfait λ, le sous-espace régulier λ_r est le maximum des sous-espaces normals, contenant φ tels que les duals topologiques coïncident avec λ^*. Par suite, on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. *Pour un espace parfait* λ, *le sous-espace régulier* λ_r *est le maximum des sous-espaces* μ *normals, contenant* φ *et tonnelés pour la topologie de Mackey* $\tau(\mu, \lambda^*)$.

En effet, soit μ un sous-espace de λ, normal, contenant φ et tonnelé pour $\tau(\mu, \lambda^*)$. Alors, on a $\mu^* = \lambda^*$. Car, s'il existait un élément $\mathfrak{x} = (x_i) \in \mu^*, \notin \lambda^*$, $N_{\mathfrak{x}} \cap \lambda^*$ serait convexe, fermée et bornée pour $\sigma(\lambda^*, \mu)$ et ne serait pas compacte pour $\sigma(\lambda^*, \mu)$, ce qui est absurde, puisque μ est tonnelé pour $\tau(\mu, \lambda^*)$. Comme μ est tonnelé pour $\tau(\mu, \lambda^*)$, on a $\tau(\mu, \lambda^*) = \beta(\mu, \mu^*)$ et donc $\mu' = \lambda^*$. Ensuite nous appliquons le théorème 1.3. c. q. f. d.

Le théorème suivant est essentiellement dû à Köthe [**5**].

THÉORÈME 1.4. *Soit* λ *un espace parfait. Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

1) λ *est séparable pour la topologie* $\beta(\lambda, \lambda^*)$.

2) $\lambda' = \lambda^*$.

3) $\lambda = \lambda_r$.

DÉMONSTRATION. 1)$\Rightarrow$2). Pour un élément quelconque l de λ', il existe un voisinage V de $\mathbf{0}$ dans λ pour $\beta(\lambda, \lambda^*)$ tel que l'on ait $l \in V^0$ où V^0 désigne l'ensemble polaire de V dans λ', c'est-à-dire, $V^0 = \{\mathfrak{y} \in \lambda'; |\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle| \leqq 1$ pour tout $\mathfrak{x} \in V\}$. De la définition de $\beta(\lambda, \lambda^*)$, il existe une partie B de λ^* convexe, cerclée et bornée pour $\sigma(\lambda^*, \lambda)$ telle que l'on ait $B^0 \subset V$, et par suite, $l \in V^0 \subset B^{00}$. Comme B^{00} est équicontinu pour $\beta(\lambda, \lambda^*)$ et fermé pour $\sigma(\lambda', \lambda)$, il est compact pour $\sigma(\lambda', \lambda)$, et si λ est séparable pour $\beta(\lambda, \lambda^*)$, B^{00} est métrisable pour $\sigma(\lambda', \lambda)$. Comme B^{00} est l'adhérence de B pour $\sigma(\lambda', \lambda)$, il est identique au complété séquentiel de B pour $\sigma(\lambda', \lambda)$. En vertu du théorème A, λ^* est séquentiellement complet pour $\sigma(\lambda^*, \lambda)$, on a donc $l \in B^{00} \subset \lambda^*$, par suite $\lambda' \subset \lambda^*$. D'autre part $\lambda' \supset \lambda^*$.

2)$\Rightarrow$3). Soit $\mathfrak{x} = (x_i)$ un élément quelconque de λ. Alors la suite $\{\mathfrak{x}_n\}$, où $\mathfrak{x}_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots) \in \varphi$, converge vers $\mathfrak{x} = (x_i)$ pour $\sigma(\lambda, \lambda^*)$. Donc, φ est dense dans λ pour $\sigma(\lambda, \lambda^*)$ et aussi pour $\sigma(\lambda, \lambda')$ par l'assomption. Comme φ est dense pour toute topologie arbitraire pour laquelle le dual topologique de λ coïncide avec λ', φ est dense pour $\beta(\lambda, \lambda^*)$.

3)$\Rightarrow$1) C'est évident.

§ 2. Contre exemple aux problèmes de Köthe et de Dieudonné

Nous commençons par donner une condition suffisante pour être régulier.

Soit $\{N_n\}$ une suite de parties finies (non vides) d'entiers $\geqq 1$ telle que N_n et N_m soient disjoints si $n \neq m$. Soit μ un espace normal.

CONDITION (A). *Pour toute suite $\{N_n\}$ ci-dessus mentionnée et tout élément $\mathfrak{x}=(x_i)$ de μ, il existe une suite $\{N_{n_k}\}$ extraite de la suite $\{N_n\}$ et un élément $\mathfrak{y}=(y_i)$ de μ tels que*

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{i\in N_{n_k}} \left| \frac{y_i}{x_i} \right| = \infty .$$

PROPOSITION 2.1. *La condition (A) entraîne que l'espace φ est dense dans l'espace normal μ pour la topologie $\beta(\mu, \mu^*)$.*

DÉMONSTRATION. Montrons que pour un élément quelconque $\mathfrak{x}=(x_i)\neq \mathbf{0}$ de μ, la suite $\{\mathfrak{x}_n\}$ des éléments de φ, où $\mathfrak{x}_n=(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)$, converge vers $\mathfrak{x}$ pour $\beta(\mu, \mu^*)$. Ici, on peut supposer $x_i \geqq 0$ pour tout i, μ étant normal. Si cette assertion n'était pas satisfaite, il existerait un nombre $\varepsilon > 0$ et une partie B de μ^* normale et bornée pour $\sigma(\mu^*, \mu)$ tels que

$$\sup_{\mathfrak{y}\in B} | \langle \mathfrak{x}-\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y} \rangle | \geqq \varepsilon \qquad \text{pour tout } n,$$

et donc, il existerait une suite $\{\mathfrak{y}_n\}=\{(y_i^{(n)})\}$ des éléments de B, où $y_i^{(n)} \geqq 0$ pour tout n et i, et une suite $\{N_n\}$ de parties finies d'entiers $\geqq 1$ disjoints deux à deux telles que

$$\sum_{i\in N_n} x_i y_i^{(n)} \geqq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pour tout } n.$$

D'autre part, de la condition (A), il existe une suite $\{N_{n_k}\}$ extraite de la suite $\{N_n\}$ et un élément $\mathfrak{z}=(z_i)$ de μ, où $z_i \geqq 0$ pour tout i, tels que

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{i\in N_{n_k}} \frac{z_i}{x_i} = \infty .$$

Par suite, on a

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i\in N_{n_k}} z_i y_i^{(n_k)} = \infty ,$$

ce qui s'oppose au fait que B est bornée pour $\sigma(\mu^*, \mu)$. c. q. f. d.

En vertu de la proposition 2.1, un espace parfait satisfaisant à la condition (A) est régulier. Les auteurs ne connaissent pas si la réciproque est vraie ou non.

Ensuite, nous considérons une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que μ soit bornologique pour la topologie $\tau(\mu, \mu^*)$. Ce critère est presque évident si l'on considère "la compacité de Čech" de l'ensemble des entiers $\geqq 1$.

PROPOSITION 2.2. *Soit μ un espace normal, contenant φ et complet pour la convergence au sens de Mackey. Alors μ n'est pas bornologique pour la topologie $\tau(\mu, \mu^*)$, si μ satisfait à la condition suivante:*

CONDITION (B). *Il existe un ultra-filtre $\mathfrak{F}$ sur l'ensemble des entiers $\geqq 1$, ne contenant pas d'éléments de parties finies, et un élément $\mathfrak{a}=(a_i)$ de μ tels que l'on ait*

$$\left|\lim_{\mathfrak{F}} \frac{x_i}{a_i}\right| < \infty \qquad \textit{pour tout } \mathfrak{x}=(x_i) \textit{ fixé de } \mu.$$

DÉMONSTRATION. Si μ satisfait à la condition (B), on peut définir la forme linéaire l sur μ, par la relation

$$\langle \mathfrak{x}, l \rangle = \lim_{\mathfrak{F}} \frac{x_i}{a_i} \qquad \text{pour tout } \mathfrak{x}=(x_i) \text{ de } \mu.$$

Alors, comme l est bornée sur l'enveloppe normale de tout $\mathfrak{x}=(x_i)$ de μ, l est la forme linéaire bornée sur μ pour $\beta(\mu, \mu^*)$, en vertu du lemme 1.4. Nous prouvons que les parties bornées de μ sont les mêmes pour $\beta(\mu, \mu^*)$ et pour $\tau(\mu, \mu^*)$, d'où l est aussi bornée sur μ pour $\tau(\mu, \mu^*)$. Soit B une partie de μ convexe, cerclée, bornée et fermée pour $\tau(\mu, \mu^*)$. Comme μ est complet pour la convergence au sens de Mackey, l'espace μ_B engendré par B muni de la boule unité B est un espace de Banach. Donc, B est absorbée par tout tonneau, autrement dit, B est bornée pour $\beta(\mu, \mu^*)$. D'autre part, pour tout $\mathfrak{x}=(x_i)$ dans φ, on a $\langle \mathfrak{x}, l\rangle=0$, mais on a $l \neq \mathbf{0}$ puisque $\langle \mathfrak{a}, l\rangle=1$, cela étant, l n'appartient pas à μ^* (= le dual topologique de μ pour $\tau(\mu, \mu^*)$). Donc μ n'est pas bornologique pour $\tau(\mu, \mu^*)$. c. q. f. d.

Nous supposons maintenant l'Hypothèse de Continuum. Soit Ω le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Nous désignons par $\{A^\alpha = (a_i^\alpha);\ \alpha < \Omega\}$ l'ensemble bien ordonné de toutes les suites partielles infinies d'entiers $\geqq 1$.

Par induction transfinie, nous définissons un système $\{B^\alpha = (b_i^\alpha);\ \alpha < \Omega\}$ de suites partielles infinies d'entiers $\geqq 1$.

Nous posons d'abord $B^1 = A^1$. Quand nous avons défini B^β pour tout $\beta < \alpha$, nous définissons B^α satisfaisant les trois conditions suivantes: (Les expressions de suite d'entiers $\geqq 1$, $B^\alpha, (b_i^\alpha)$ et $(b_1^\alpha, b_2^\alpha, \cdots)$ désignent à la fois son ensemble.)

(1) Pour tout $\beta < \alpha$, il existe un entier n dépendant de β tel que l'ensemble $(b_n^\alpha, b_{n+1}^\alpha, \cdots)$ est contenu dans l'ensemble $(b_1^\beta, b_2^\beta, \cdots)$.

(2) Si $A^\alpha \cap B^\beta$ est l'ensemble infini pour tout $\beta < \alpha$, B^α est contenu dans A^α, et si $A^\alpha \cap B^\beta$ est l'ensemble fini pour un $\beta < \alpha$ au moins, B^α et A^α sont disjoints.

(3) Pour tout i, on a $b_i^\alpha > a_i^\alpha$.

Pour montrer la possibilité de cette construction, il suffit de construire

B^α satisfaisant les conditions (1) et (2). Comme l'ensemble $\{\beta;\beta<\alpha\}$ est dénombrable pour tout $\alpha<\Omega$, on peut construire une telle B^α en vertu du lemme suivant, où on applique A^α ou $A^{\alpha c}$ (= le complément de A^α) à C^1 et $\{\beta^\beta;\beta<\alpha\}$ à $\{C^n;n\geqq 2\}$.

LEMME 2.1. *Soit $\{C^1, C^2, \cdots, C^n, \cdots\}$ un ensemble dénombrable de suites partielles infinies d'entiers $\geqq 1$. Nous supposons que $\bigcap_{k=1}^{n} C^k$ est l'ensemble infini pour tout n. Alors, il existe une suite partielle infinie $C^\infty=(c_1^\infty, c_2^\infty, \cdots, c_n^\infty, \cdots)$ d'entiers $\geqq 1$ telle que $(c_n^\infty, c_{n+1}^\infty, \cdots)\subset C^n$ pour tout n.*

DÉMONSTRATION. Si on pose $\bigcap_{k=1}^{n} C^k = D^n = (d_1^n, d_2^n, \cdots)$ pour tout n, on a $D^1\supset D^2\supset\cdots\supset D^n\supset\cdots$. Appliquant le procédé diagonal à $\{D^n;n\geqq 1\}$, on pose $c_n^\infty = d_n^n$ pour tout n. Alors, $C^\infty=(c_1^\infty, c_2^\infty, \cdots)$ est la suite ci-dessus demandée. c. q. f. d.

Nous allons prouver que $\{B_n^\alpha;n\geqq 1, \alpha<\Omega\}$, où $B_n^\alpha=(b_n^\alpha, b_{n+1}^\alpha, \cdots)$, engendre un ultra-filtre $\mathfrak{F}$ sur l'ensemble des entiers $\geqq 1$.

En effet, il est évident que $\{B_n^\alpha;n\geqq 1, \alpha<\Omega\}$ engendre un filtre. Nous supposons que, ajoutant un ensemble $\{A^\alpha;\alpha\in\Gamma\}$, où $\Gamma\subset\{\alpha<\Omega\}$, l'ensemble $\{B_n^\alpha;n\geqq 1, \alpha<\Omega\}\cup\{A^\alpha;\alpha\in\Gamma\}$ engendre un filtre. Alors pour un $\alpha_0\in\Gamma$ quelconque, on a $A^{\alpha_0}\cap B_n^\alpha\neq\phi$ pour tout $n\geqq 1$ et tout $\alpha<\Omega$. Par suite, comme $A^{\alpha_0}\cap B^\alpha$ est l'ensemble infini pour tout $\alpha<\alpha_0$, on a $B^{\alpha_0}\subset A^{\alpha_0}$ de la définition de $\{B^\alpha;\alpha<\Omega\}$. Donc, il n'existe aucun filtre strictement plus fin que le filtre engendré par $\{B_n^\alpha;n\geqq 1, \alpha<\Omega\}$, c'est-à-dire, $\{B_n^\alpha;n\geqq 1, \alpha<\Omega\}$ engendre un ultra-filtre $\mathfrak{F}$.

Maintenant, nous construisons un exemple de l'espace parfait, tonnelé et non-bornologique.

Pour tout $\alpha, 1\leqq\alpha<\Omega$, nous définissons une application τ_α de l'espace des suites à décroissance rapide (s) dans ω par la relation suivante:

$$\tau_\alpha(\mathfrak{x})=\mathfrak{y} \qquad \text{pour tout } \mathfrak{x}=(x_i)\in(s),$$

$$\text{où } \mathfrak{y}=(y_i),\ y_{b_n^\alpha}=x_n \text{ et } y_i=0 \text{ pour } i\neq b_n^\alpha.$$

Nous désignons par $\tau_\alpha(s)$ l'image par τ_α de (s), et posons

$$\lambda_\alpha=(\tau_\alpha(s))^* \quad \text{et} \quad \lambda=\bigcap_{\alpha<\Omega}\lambda_\alpha.$$

Comme λ_α est parfait pour tout $\alpha<\Omega$, λ est aussi parfait.

LEMME 2.2. *L'espace λ ci-dessus défini coïncide avec son sous-espace régulier λ_r. Par suite, λ est tonnelé pour la topologie $\beta(\lambda,\lambda^*)$ (théorème 1.1).*

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 2.1, tout revient à prouver que λ satisfait à la condition (A). Soit $\{N_n\}$ une suite quelconque de parties finies d'entiers $\geqq 1$ telle que $N_n\cap N_m=\phi$ pour $n\neq m$. Alors, il existe un $\alpha_0<\Omega$ et une suite partielle $\{N_{n_k}\}$ de $\{N_n\}$ tels que pour tout $\alpha\geqq\alpha_0$

fixé, on a $B^\alpha \cap N_{n_k} = \phi$ si k est suffisamment grand. En effet, par exemple, nous divisons $\{N_n\}$ en deux $\{N_{2n}\}$ et $\{N_{2n+1}\}$. Si $B^{\alpha_0} \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} N_{2n})$ est l'ensemble fini pour un α_0 convenable, α_0 et $\{N_{2n}\}$ satisfont la condition ci-dessus demandée. Si $B^\alpha \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} N_{2n})$ est l'ensemble infini pour tout $\alpha < \Omega$, de la définition de $\{B^\alpha ; \alpha < \Omega\}$, il existe un α_0 tel que $B^{\alpha_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{2n}$, on a donc $B^{\alpha_0} \cap (\bigcup_{n=0}^{\infty} N_{2n+1}) = \phi$, par suite, on adopte ce α_0 et $\{N_{2n+1}\}$.

Soit $\mathfrak{x} = (x_i)$ un élément quelconque de λ, c'est-à-dire, $\mathfrak{x} = (x_i) \in \lambda_\alpha$ pour tout $\alpha < \Omega$. On pose

$$y_i = \begin{cases} n x_i & \text{si } i \in \bigcup_{k=1}^{\infty} N_{n_k} \text{ et } b_{n-1}^{\alpha_0} < i \leqq b_n^{\alpha_0}, \\ 0 & \text{si } i \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} N_n . \end{cases}$$

Alors, il est évident que $\mathfrak{y} = (y_i) \in \lambda_\alpha$ pour tout $\alpha \leqq \alpha_0$, et de la propriété de $\{N_{n_k}\}$, il résulte que $\mathfrak{y} = (y_i) \in \lambda_\alpha$ pour tout $\alpha > \alpha_0$, on a donc $\mathfrak{y} = (y_i) \in \lambda$. En outre, il est clair que

$$\lim_{k \to \infty} \inf_{i \in N_{n_k}} \left| \frac{y_i}{x_i} \right| = \infty .$$

LEMME 2.3. *L'espace λ n'est pas bornologique pour la topologie $\tau(\lambda, \lambda^*)$. Par suite, λ ne coïncide pas avec son sous-espace λ_0 (théorème 1.2).*

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer la condition (B) pour l'ultra-filtre $\mathfrak{F}$ engendré par $\{B_n^\alpha ; n \geqq 1, \alpha < \Omega\}$ et pour $\mathbf{1} = (1, 1, \cdots) \in \lambda$, en d'autres termes,

$$|\lim_{\mathfrak{F}} x_i| < \infty \qquad \text{pour tout } \mathfrak{x} = (x_i) \text{ fixé de } \lambda .$$

S'il existait un $\mathfrak{x} = (x_i) \in \lambda$ tel que $\lim_{\mathfrak{F}} x_i = \infty$, il existerait une suite $\{B_{N_n}^{\alpha_n}\}$ des éléments de $\mathfrak{F}$, où $B_{N_n}^{\alpha_n} = (b_{N_n}^{\alpha_n}, b_{N_n+1}^{\alpha_n}, \cdots)$, tels que

$$B_{N_1}^{\alpha_1} \supset B_{N_2}^{\alpha_2} \supset \cdots \supset B_{N_n}^{\alpha_n} \supset \cdots$$

et

$$\inf_{i \in B_{N_n}^{\alpha_n}} x_i \geqq 2^n \qquad \text{pour tout } n \geqq 1 .$$

On pose $\alpha = \sup_{n \geqq 1} \alpha_n$. Par la définition de $\{B^\alpha ; \alpha < \Omega\}$, il existe une suite (k_n) croissante telle que $B_{k_n}^\alpha \subset B_{N_n}^{\alpha_n}$ pour tout n, d'où

$$\inf_{i \in B^\alpha, i \geqq b_{k_n}^\alpha} x_i \geqq 2^n \qquad \text{pour tout } n \geqq 1 .$$

Comme la suite $(b_{k_1}^\alpha, b_{k_2}^\alpha, \cdots, b_{k_i}^\alpha, \cdots)$ est identique à une certaine A^β, $B^\beta = (b_i^\beta)$ est telle que $b_i^\beta > b_{k_i}^\alpha$ pour tout i. Posons $\gamma = \sup(\alpha, \beta)$. Alors, comme il existe un l tel que $B_l^\gamma \subset B^\alpha \cap B^\beta$, on a $b_l^\gamma = b_m^\beta$ pour un m, et pour tout $n \geqq l$,

$b_n^\gamma \geqq b_{n+m-l}^\beta > b_{k_{n+m-l}}^\alpha$, par conséquent $x_{b_n^\gamma} \geqq 2^{n+m-l}$, on a donc $\mathfrak{x}=(x_i) \notin \lambda_\gamma$; nous obtenons une contradiction. c. q. f. d.

En vertu des lemmes 2.2 et 2.3, notre espace parfait λ est tonnelé et non-bornologique pour la topologie $\tau(\lambda, \lambda^*)=\beta(\lambda, \lambda^*)$. De plus, il est le complété du sous-espace bornologique λ_0.

§ 3. Espaces semi-parfaits

Dans ce paragraphe, nous considérons le β-dual, plus précisément, la théorie correspondant à celle de § 1, en remplaçant la convergence absolue par la convergence (pas nécessairement absolue).

DÉFINITION 3.1. Pour tout espace de suites λ, on dénote

$$\lambda^\beta = \{ \mathfrak{y}=(y_i);\ \sum_{i=1}^\infty x_i y_i \text{ converge pour tout } \mathfrak{x}=(x_i) \in \lambda \}.$$

λ et λ^β sont en dualité pour la forme bilinéaire canonique

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i .$$

Un espace de suites λ sera toujours, sauf mention expresse du contraire, considéré comme espace muni de la topologie $\beta(\lambda, \lambda^\beta)$. Pour tout espace de suites λ, on a $\lambda \subset \lambda^{\beta\beta}$ et $\lambda^\beta = \lambda^{\beta\beta\beta}$. En particulier, soit λ un espace de suites tel que $\lambda = \lambda^{\beta\beta}$. Alors, pour que λ soit parfait, il faut et il suffit qu'il soit normal. Par suite, un espace tel que $\lambda = \lambda^{\beta\beta}$, n'est pas nécessairement normal. Définissons une notion qui joue un rôle correspondant à normalité.

DÉFINITION 3.2. Nous dirons qu'une partie $A \subset \omega$ est *semi-normale*, si la relation $\mathfrak{x}=(x_i) \in A$ entraîne $(\varepsilon_i x_i) \in A$ pour toute suite (ε_i) telle que $0 \leqq \varepsilon_i \leqq 1$ et $\varepsilon_i \downarrow 0$. (Notation $\varepsilon_i \downarrow 0$ signifie que la suite (ε_i) est non-croissante et convergente vers 0.)

Pour une partie $A \subset \omega$, l'*enveloppe semi-normale* de A est définie par l'ensemble $\{(\varepsilon_i x_i);\ 0 \leqq \varepsilon_i \leqq 1, \varepsilon_i \downarrow 0, \mathfrak{x}=(x_i) \in A\} \cup A$.

On déduit immédiatement du lemme suivant, que tout espace λ tel que $\lambda = \lambda^{\beta\beta}$ est semi-normal, car dans ce cas, on a $\lambda = \bigcup_{\mathfrak{x} \in \lambda} \{\mathfrak{x}\}^{\beta\beta}$.

LEMME 3.1. *$\{\mathbf{1}=(1, 1, \cdots)\}^{\beta\beta}$ est l'espace vectoriel engendré par l'enveloppe semi-normale de $\mathbf{1}$. Par suite, $\{\mathfrak{x}=(x_i)\}^{\beta\beta}$ est la réunion de l'espace engendré par l'enveloppe semi-normale de $\mathfrak{x}$ et φ.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $\mathfrak{x}=(x_i)$ de ω, on peut représenter $(x_i)=(x_i')-(x_i'')$, où $x_i' \leqq x_{i+1}'$ et $x_i''=x_{i+1}''$, ou $x_i'=x_{i+1}'$ et $x_i'' \leqq x_{i+1}''$ au moins, pour tout i.

On voit aisément le fait suivant: Pour qu'une suite $\mathfrak{x}=(x_i)$ appartienne à l'espace vectoriel engendré par l'enveloppe semi-normale de $\mathbf{1}$, il faut et il suffit que les deux suites (x_i') et (x_i'') soient bornées.

Nous supposons que $x_i' \to \infty$. Alors il existe une suite (x_{i_k}') extraite de la suite (x_i') et une suite (a_k) telles que

$$a_k \downarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_{i2k}' - x_{i2k-1}') = \infty \quad \text{et} \quad x_{i2k}'' = x_{i2k-1}''.$$

Si on pose

$$y_{i_{2k}} = a_k, \ y_{i2k-1} = -a_k \quad \text{et} \quad y_i = 0 \ \text{pour} \ i \neq i_k,$$

on a $\mathfrak{y} = (y_i) \in \{\mathbf{1}\}^{\beta}$. De plus,

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x_{i2k}' - x_{i\,2k-1}') = \infty,$$

d'où $\mathfrak{x} = (x_i) \notin \{\mathbf{1}\}^{\beta\beta}$.

Réciproquement, soit (ε_i) une suite telle que $\varepsilon_i \downarrow 0$. Pour tout élément $\mathfrak{y} = (y_i) \in \{\mathbf{1}\}^{\beta}$, si nous désignons par S_n la n-somme partielle $\sum_{i=1}^{n} y_i \ (n \geqq 1)$ et nous posons $S_0 = 0$, on a $|S_n| < M \ (n \geqq 0)$ pour une constante $M > 0$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=n}^{m} \varepsilon_i y_i &= \varepsilon_n(S_n - S_{n-1}) + \varepsilon_{n+1}(S_{n+1} - S_n) + \cdots + \varepsilon_m(S_m - S_{m-1}) \\ &= -S_{n-1}\varepsilon_n + S_n(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}) + \cdots + S_{m-1}(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + S_m\varepsilon_m,\end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=n}^{m} \varepsilon_i y_i\Big| &\leqq M\varepsilon_n + M(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}) + \cdots + M(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + M\varepsilon_m \\ &= 2M\varepsilon_n \to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

d'où il résulte que $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i y_i$ converge, autrement dit, $(\varepsilon_i) \in \{\mathbf{1}\}^{\beta\beta}$. c. q. f. d.

Notons que $\{\mathbf{1}\}^{\beta\beta}$ est un espace de Banach muni de la boule unité B, où B est l'enveloppe semi-normale convexe cerclée de $\mathbf{1}$, c'est-à-dire, le plus petit ensemble semi-normal, convexe, cerclé et contenant $\mathbf{1}$.

LEMME 3.2. *Soit λ un espace semi-normal. Alors, pour la topologie $\beta(\lambda, \lambda^{\beta})$, l'enveloppe semi-normale de toute partie bornée de λ est aussi bornée.*

DÉMONSTRATION. Soit B une partie de λ^{β} bornée pour $\sigma(\lambda^{\beta}, \lambda)$. Puisque l'enveloppe semi-normale convexe cerclée d'un élément $\mathfrak{x} = (x_i) \in \lambda$ est bornée pour $\sigma(\lambda, \lambda^{\beta})$ et isomorphe à la boule unité d'un espace de Banach, elle est absorbée par tout tonneau. On a donc

$$\sup\{|\langle(\varepsilon_i x_i), (y_i)\rangle|\,;\,(y_i) \in B, \ \text{et} \ 0 \leqq \varepsilon_i \leqq 1, \ \varepsilon_i \downarrow 0 \ \text{ou} \ \varepsilon_i = 1\} < \infty.$$

Comme on a

$$\langle(\varepsilon_i x_i), (y_i)\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i y_i = \langle(x_i), (\varepsilon_i y_i)\rangle,$$

il en résulte que l'enveloppe semi-normale de B est bornée pour $\sigma(\lambda^{\beta}, \lambda)$. Soit A une partie de λ bornée pour $\beta(\lambda, \lambda^{\beta})$. Alors on a

$$\sup\{|\langle(x_i), (\varepsilon_i y_i)\rangle|\,;(x_i)\in A, (y_i)\in B, \text{ et } 0\leqq\varepsilon_i\leqq 1, \varepsilon_i\downarrow 0 \text{ ou } \varepsilon_i=1\}<\infty\,.$$

Donc,

$$\sup\{|\langle(\varepsilon_i x_i), (y_i)\rangle|\,;(x_i)\in A, (y_i)\in B, \text{ et } 0\leqq\varepsilon_i\leqq 1, \varepsilon_i\downarrow 0 \text{ ou } \varepsilon_i=1\}<\infty\,,$$

ce qui signifie que l'enveloppe semi-normale de A est bornée pour $\beta(\lambda, \lambda^{\beta})$.

COROLLAIRE. *Soit λ un espace semi-normal contenant φ. Alors, pour tout élément $\mathfrak{x}=(x_i)$ de λ et pour toute suite (ε_i), $\varepsilon\downarrow 0$, l'élément $(\varepsilon_i\mathfrak{x}_i)$ est contenu dans l'adhérence de φ pour la topologie $\beta(\lambda, \lambda^{\beta})$.*

En effet, l'enveloppe semi-normale convexe cerclée B de $\mathfrak{x}$ est bornée pour $\beta(\lambda, \lambda^{\beta})$ en vertu du lemme 3.2. Comme B est semi-normale, on a $\mathfrak{x}_n=(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)\in B$ pour tout n. Comme B est convexe et cerclée, on a $(0, 0, \cdots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)=\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_n\in 2B$. Par suite,

$$(\varepsilon_i x_i)-(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \cdots, \varepsilon_n x_n, 0, 0, \cdots)=(0, 0, \cdots, 0, \varepsilon_{n+1}x_{n+1}, \varepsilon_{n+2}x_{n+2}, \cdots)\in 2\varepsilon_{n+1}B\,,$$

c'est-à-dire, la suite $\{(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \cdots, \varepsilon_n x_n, 0, 0, \cdots)\}$ converge vers $(\varepsilon_i x_i)$ dans λ_B ($=$ l'espace engendré par B muni de la boule unité B), a fortiori, converge vers $(\varepsilon_i x_i)$ pour $\beta(\lambda, \lambda^{\beta})$. c. q. f. d.

On voit aisément que l'enveloppe semi-normale convexe cerclée d'un élément $\mathfrak{x}=(x_i)$ est compacte pour la topologie $\sigma(\omega, \varphi)$. Comme $\lambda^{\beta}=\bigcap_{\mathfrak{x}\in\lambda}\{\mathfrak{x}\}^{\beta}$, et que $\{\mathbf{1}\}^{\beta}$ est un espace de Banach, on énonce le théorème suivant de la même manière que dans le cas des espaces parfaits.

THÉORÈME 3.1. *Soit λ un espace tel que $\lambda=\lambda^{\beta\beta}$. Alors λ est complet pour la topologie $\tau(\lambda, \lambda^{\beta})$ et pour la topologie $\beta(\lambda, \lambda^{\beta})$.*

COROLLAIRE. *Soit λ un espace tel que $\lambda=\lambda^{\beta\beta}$. Alors les parties bornées de λ sont les mêmes pour la topologie $\sigma(\lambda, \lambda^{\beta})$ et pour la topologie $\beta(\lambda, \lambda^{\beta})$.*

DÉFINITION 3.3. Soit λ un espace tel que $\lambda=\lambda^{\beta\beta}$. λ s'appelle un *espace semi-parfait* lorsque la relation $\{(\varepsilon_i x_i)\,; 0\leqq\varepsilon_i\leqq 1, \varepsilon_i\downarrow 0\}\subset\lambda$ entraîne $\mathfrak{x}=(x_i)\in\lambda$.

Ensuite, nous définissons les espaces réguliers de la même façon que dans le cas des espaces parfaits.

DÉFINITION 3.4. Pour tout espace λ tel que $\lambda=\lambda^{\beta\beta}$,

$$\lambda_r=\text{l'adhérence de } \varphi \text{ dans } \lambda \text{ pour la topologie } \beta(\lambda, \lambda^{\beta})$$

s'appelle le *sous-espace régulier* de λ. Nous dirons qu'un espace μ est *régulier* si μ est le sous-espace régulier d'un espace λ convenable tel que $\lambda=\lambda^{\beta\beta}$.

Nous caractérisons les espaces semi-parfaits comme suit:

THÉORÈME 3.2. *Pour qu'un espace λ soit semi-parfait, il faut et il suffit qu'il existe un espace semi-normal μ contenant φ tel que $\mu'=\lambda$ pour la topologie $\beta(\mu, \mu^{\beta})$. Plus précisément, on a $\lambda=((\lambda^{\beta})_r)'$ pour tout espace semi-parfait λ.*

Pour la démonstration, nous avons besoin des deux lemmes suivants.

LEMME 3.3. *Soit λ un espace semi-normal contenant φ. Soit $\mathfrak{x}=(x_i)$ un élément de l'adhérence de φ dans λ pour la topologie $\beta(\lambda, \lambda^{\beta})$. Alors, la suite*

$\{\mathfrak{x}_n=(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)\}$ *des éléments de* φ *converge vers* $\mathfrak{x}$ *pour la topologie* $\beta(\lambda, \lambda^\beta)$.

DÉMONSTRATION. Supposons que la suite $\{\mathfrak{x}_n\}$ ne converge pas vers $\mathfrak{x}$ pour $\beta(\lambda, \lambda^\beta)$. Autrement dit, il existe une partie B de λ^β convexe, cerclée, semi-normale et bornée pour $\sigma(\lambda^\beta, \lambda)$ et un nombre $\varepsilon>0$ tels que

$$\sup_{\mathfrak{y}\in B} |\langle \mathfrak{x}-\mathfrak{x}_{n_i}, \mathfrak{y}\rangle| \geqq \varepsilon \qquad \text{pour une suite partielle } \{\mathfrak{x}_{n_i}\} \text{ de } \{\mathfrak{x}_n\}.$$

Maintenant nous fixons un n_i arbitraire. Comme B est semi-normale, on a $\mathfrak{y}_{n_i}=(y_1, y_2, \cdots, y_{n_i}, 0, 0, \cdots)\in B$ pour tout $\mathfrak{y}=(y_i)\in B$. Comme B est convexe et cerclée, on a

$$\frac{1}{2}(0, 0, \cdots, y_{n_i+1}, y_{n_i+2}, \cdots)=\frac{1}{2}\mathfrak{y}-\frac{1}{2}\mathfrak{y}_{n_i}\in B.$$

Par conséquent, pour tout $\mathfrak{z}=(z_1, z_2, \cdots, z_{n_i}, 0, 0, \cdots)\in\varphi$, on a

$$\sup_{\mathfrak{y}\in B}|\langle \mathfrak{x}-\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\rangle| \geqq \sup_{\mathfrak{y}\in B}|\langle \mathfrak{x}-\mathfrak{z}, \frac{1}{2}(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_{n_i})\rangle| = \sup_{\mathfrak{y}\in B}|\langle \mathfrak{x}-\mathfrak{x}_{n_i}, \frac{1}{2}\mathfrak{y}\rangle| \geqq \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui est absurde, car $\mathfrak{x}$ est dans l'adhérence de φ pour $\beta(\lambda, \lambda^\beta)$.

LEMME 3.4. *Soit* λ *un espace semi-normal contenant* φ *et soit* $\mathfrak{x}=(x_i)$ *un élément de* ω. *Si la partie* $B=\{(\varepsilon_i x_i); 0\leqq\varepsilon_i\leqq 1, \varepsilon_i\downarrow 0\}$ *est contenue dans* λ, *alors* B *est bornée pour* $\beta(\lambda, \lambda^\beta)$.

DÉMONSTRATION. Comme B est bornée pour $\sigma(\lambda, \varphi)$ et que l'enveloppe convexe cerclée B_1 de B s'identifie avec la boule unité d'un espace de Banach, B_1 est bornée pour $\beta(\lambda, \varphi)$. Pour tout $\mathfrak{y}=(y_i)\in\lambda^\beta$, l'adhérence de la partie $\{\mathfrak{y}_n=(y_1, y_2, \cdots, y_n, 0, 0, \cdots)\}$, qui est bornée pour $\sigma(\varphi, \lambda)$, dans λ^β pour $\sigma(\lambda^\beta, \lambda)$ contient $\mathfrak{y}=(y_i)$. Donc, $\beta(\lambda, \varphi)$ est plus fine que $\sigma(\lambda, \lambda^\beta)$. Par suite, B_1 est bornée pour $\sigma(\lambda, \lambda^\beta)$, et pour $\beta(\lambda, \lambda^\beta)$ comme B_1 est absorbée par tout toneau par rapport à $\sigma(\lambda, \lambda^\beta)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2. Nous supposons que $\mu'=\lambda$ pour un espace semi-normal μ contenant φ. Comme $\mu'\subset\omega$, φ est dense dans μ. Donc, en vertu du lemme 3.3, pour tout $\mathfrak{x}=(x_i)\in\mu$, la suite $\{\mathfrak{x}_n=(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)\}$ converge vers $\mathfrak{x}$ pour $\beta(\mu, \mu^\beta)$, a fortiori, pour $\sigma(\mu, \lambda)$, c'est-à-dire, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ converge pour tout $\mathfrak{y}=(y_i)\in\lambda$, ce qui signifie que $\lambda\subset\mu^\beta$. D'autre part, on a $\mu^\beta\subset\mu'$, donc on obtient $\lambda=\mu^\beta$. Par suite, toute partie de λ convexe, cerclée bornée et fermée pour $\sigma(\lambda, \mu)$ est compacte pour $\sigma(\lambda, \mu)$, a fortiori pour $\sigma(\lambda, \varphi)$. En d'autres termes, pour toute partie de λ convexe, cerclée et bornée pour $\sigma(\lambda, \mu)$, ses adhérences dans λ pour $\sigma(\lambda, \mu)$ et dans ω pour $\sigma(\omega, \varphi)$ sont les mêmes. Soit $\mathfrak{x}=(x_i)$ un élément de ω. Supposons que la partie $B=\{(\varepsilon_i x_i); 0\leqq\varepsilon_i\leqq 1, \varepsilon_i\downarrow 0\}$ est contenue dans λ. Alors, en vertu du lemme 3.4, B est bornée pour $\sigma(\lambda, \mu)$, puisque $\mu\subset\lambda^\beta$. Il est clair que l'adhérence de B dans ω pour $\sigma(\omega, \varphi)$ contient $\mathfrak{x}=(x_i)$. On a donc $\mathfrak{x}=(x_i)\in\lambda$, ce qui signifie que λ est semi-parfait.

Réciproquement, nous montrons que tout espace semi-parfait λ est égal au dual topologique de $(\lambda^\beta)_r$. On voit aisément que $(\lambda^\beta)_r$ est semi-normal. Comme φ est dense dans $(\lambda^\beta)_r$ pour $\beta((\lambda^\beta)_r, ((\lambda^\beta)_r)^\beta)$ en vertu du lemme 3.5 suivant, on a $((\lambda^\beta)_r)^\beta \subset ((\lambda^\beta)_r)' \subset \omega$. Soit $\mathfrak{y} = (y_i)$ un élément de $((\lambda^\beta)_r)'$. Pour tout élément $\mathfrak{x} = (x_i)$ de λ^β et pour toute suite $(\varepsilon_i), \varepsilon_i \downarrow 0$, l'élément $(\varepsilon_i x_i)$ appartient à $(\lambda^\beta)_r$, d'après le corollaire du lemme 3.2. Par suite, $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i y_i$ converge pour toute suite $(\varepsilon_i), \varepsilon_i \downarrow 0$, en vertu du lemme 3.3 et 3.5. Cela entraîne que $(\varepsilon_i y_i) \in \lambda$ pour toute suite $(\varepsilon_i), \varepsilon_i \downarrow 0$. Comme λ est semi-parfait, on a $\mathfrak{y} = (y_i) \in \lambda$, ce qui signifie que $\lambda \supset ((\lambda^\beta)_r)'$. D'autre part, la relation $\lambda^\beta \supset (\lambda^\beta)_r$ entraîne $\lambda = \lambda^{\beta\beta} \subset ((\lambda^\beta)_r)^\beta \subset ((\lambda^\beta)_r)'$, donc on a $\lambda = ((\lambda^\beta)_r)'$. c. q. f. d.

Pour tout espace λ tel que $\lambda = \lambda^{\beta\beta}$, nous désignons par $\bar{\lambda}$ l'ensemble des éléments $\mathfrak{x} = (x_i)$ tels que $(\varepsilon_i x_i) \in \lambda$ pour toute suite $(\varepsilon_i), \varepsilon_i \downarrow 0$. Il n'est pas difficile de vérifier que $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^{\beta\beta}$ et en outre $\bar{\lambda}$ est le minimum des espaces semi-parfaits contenant λ. Par suite, $\bar{\lambda}$ s'appelle l'*enveloppe semi-parfaite* de λ.

Nous donnons les deux lemmes suivants.

LEMME 3.5. *Soit λ un espace tel que $\lambda = \lambda^{\beta\beta}$. Alors on a*

$$\beta(\lambda_r, (\lambda_r)^\beta) = \beta(\lambda, \lambda^\beta) = \beta(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^\beta) \qquad \textit{sur } \lambda_r.$$

DÉMONSTRATION. Soit B une partie de $(\lambda_r)^\beta$ bornée pour $\sigma((\lambda_r)^\beta, \lambda_r)$ et soit $\mathfrak{x} = (x_i)$ un élément de $\bar{\lambda}$. Pour toute (ε_i), $\varepsilon_i \downarrow 0$, on a $(\sqrt{\varepsilon_i}\, x_i) \in \lambda$, par suite $(\varepsilon_i x_i) = (\sqrt{\varepsilon_i} \sqrt{\varepsilon_i}\, x_i) \in \lambda_r$ en vertu du corollaire du lemme 3.2. D'après le lemme 3.4, la partie $A = \{(\varepsilon_i x_i)\,; 0 \leqq \varepsilon_i \leqq 1, \varepsilon_i \downarrow 0\}$ est bornée pour $\beta(\lambda_r, (\lambda_r)^\beta)$, c'est-à-dire,

$$\sup\{\,|\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i y_i\,|\,; (y_i) \in B \text{ et } 0 \leqq \varepsilon_i \leqq 1, \varepsilon_i \downarrow 0\} < \infty\,,$$

ce qui signifie que la partie $B_1 = \{(\varepsilon_i y_i)\,; (y_i) \in B$ et $0 \leqq \varepsilon_i \leqq 1, \varepsilon_i \downarrow 0\}$ est bornée pour $\sigma(\bar{\lambda}^\beta, \bar{\lambda})$. Comme l'adhérence de B_1 dans $(\lambda_r)^\beta$ pour $\sigma((\lambda_r)^\beta, \lambda_r)$ contient B, on a $\beta(\lambda_r, (\lambda_r)^\beta) = \beta(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^\beta)$ sur λ_r.

LEMME 3.6. *Soit λ un espace tel que $\lambda = \lambda^{\beta\beta}$. Alors on a*

$$(\bar{\lambda})_r = \lambda_r \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}^\beta \supset (\lambda^\beta)_r\,.$$

DÉMONSTRATION. Comme $\bar{\lambda} \supset \lambda$, on a $(\bar{\lambda})_r \supset \lambda_r$. D'autre part, en vertu du théorème 3.1 et du lemme 3.5, λ_r est complet pour la topologie induite par $\beta(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^\beta)$, ce qui entraîne que $(\bar{\lambda})_r$, c'est-à-dire, l'adhérence de φ dans $\bar{\lambda}$ pour $\beta(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^\beta)$, est contenue dans λ_r. Ensuite, prouvons la deuxième partie de notre lemme. Pour tout $\mathfrak{x} = (x_i) \in \bar{\lambda}$, la partie $\{\mathfrak{x}_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)\,; n \geqq 1\}$ est bornée dans λ_r pour $\beta(\lambda_r, (\lambda_r)^\beta) = \beta(\lambda, \lambda^\beta)$ en vertu du lemme 3.2 et du lemme 3.5, a fortiori, bornée dans λ pour $\sigma(\lambda, \lambda^\beta)$. En vertu du lemme 3.3, pour tout

$\mathfrak{y}=(y_i)\in(\lambda^\beta)_r$, la suite $\{\mathfrak{y}_n=(y_1, y_2, \cdots, y_n, 0, 0, \cdots)\}$ converge vers $\mathfrak{y}=(y_i)$ uniformément sur $\{\mathfrak{x}_n\,;\, n\geqq 1\}$, donc $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ converge pour tout $\mathfrak{x}=(x_i)\in\bar{\lambda}$ et pour tout $\mathfrak{y}=(y_i)\in(\lambda^\beta)_r$. Par suite, on a $\overline{\lambda}^\beta\supset(\lambda^\beta)_r$.

THÉORÈME 3.3. *Soit λ un espace tel que $\lambda=\lambda^{\beta\beta}$. Alors on a*

$$\overline{\lambda^\beta}=(\lambda_r)^\beta=(\lambda_r)'\,.$$

DÉMONSTRATION. D'abord, on a $(\lambda_r)^\beta\subset(\lambda_r)'$. Il résulte du lemme 3.6 que $(\overline{\lambda^\beta})^\beta\supset\lambda_r$, donc $\overline{\lambda^\beta}=(\overline{\lambda^\beta})^{\beta\beta}\subset(\lambda_r)^\beta$. Il suffit de vérifier que $(\lambda_r)'\subset\overline{\lambda^\beta}$. D'après le théorème 3.2, on a $\overline{\lambda^\beta}=\mu'$ pour $\mu=((\overline{\lambda^\beta})^\beta)_r$, car l'espace $\overline{\lambda^\beta}$ est semi-parfait. La relation $\overline{\lambda^\beta}\supset\lambda^\beta$ entraîne $(\overline{\lambda^\beta})^\beta\subset\lambda$, donc on a $\mu\subset\lambda_r$. Par suite $\beta(\mu,\mu^\beta)$ est plus forte que $\beta(\lambda_r,(\lambda_r)^\beta)$. De plus, comme φ est dense dans tout espace régulier et que $\beta(\lambda_r,(\lambda_r)^\beta)=\beta(\lambda,\lambda^\beta)$ sur λ_r en vertu du lemme 3.5, on obtient $(\lambda_r)'\subset\mu'$, c'est-à-dire, $(\lambda_r)'\subset\overline{\lambda^\beta}$.

REMARQUE. Nous notons que la proposition correspondant au théorème 1.4, de § 1, n'est pas vraie. Plus précisément, dans les trois conditions suivantes pour tout espace λ tel que $\lambda=\lambda^{\beta\beta}$;

1) λ est séparable pour la topologie $\beta(\lambda,\lambda^\beta)$,
2) $\lambda'=\lambda^\beta$,
3) $\lambda=\lambda_r$,

les conditions 2) et 3) sont équivalentes (en effet, 2) entraîne 3) de la même manière que pour la démonstration du théorème 1.4, et 3) entraîne 2) en vertu du théorème 3.3), et la condition 2) ou 3) entraîne la condition 1), mais l'inverse n'est pas vrai en général.

En effet, comme un espace λ tel que $\lambda=\lambda^{\beta\beta}$ n'est pas nécessairement séquentiellement complet pour la topologie $\sigma(\lambda,\lambda^\beta)$, on ne peut pas appliquer la même technique que pour la démonstration du théorème 1.4.

Par exemple, on voit aisément que

$$(\{\mathbf{1}=(1,1,\cdots)\}^{\beta\beta})_r=\text{l'espace vectoriel engendré par }\{\mathfrak{x}=(x_i)\,;\,x_i\downarrow 0\}\,,$$

et

$$\{\mathbf{1}=(1,1,\cdots)\}^{\beta\beta}=\text{l'espace vectoriel engendré par }\mathbf{1}\text{ et }(\{\mathbf{1}\}^{\beta\beta})_r\,,$$

par suite, l'espace $\{\mathbf{1}\}^{\beta\beta}$ est séparable pour la topologie $\beta(\{\mathbf{1}\}^{\beta\beta}, \{\mathbf{1}\}^\beta)$ et on a $\{\mathbf{1}\}^{\beta\beta}\neq(\{\mathbf{1}\}^{\beta\beta})_r$.

Appendice

Nous expliquons notre théorie des espaces de suites semi-parfaits par analogie avec [**4**].

Pour tout espace de suites λ, nous définissons

$$\lambda^s = \{ \mathfrak{y} = (y_i) \in \omega \,;\ \sup_{n \geqq 1} | \sum_{i=1}^{n} x_i y_i | < \infty \qquad \text{pour tout } \mathfrak{x} = (x_i) \in \lambda \} .$$

Soit l^∞ l'ensemble des suites bornées et soit δ un élément de $(l^\infty)'$ tel que $\langle \mathbf{1}, \delta \rangle = 1$ et $\langle \mathfrak{x}, \delta \rangle = 0$ pour tout $\mathfrak{x} = (x_i) \in \varphi$. Nous considérons les produits scalaires entre λ et λ^s par rapport à δ comme suit:

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle_\delta = \langle (\sum_{k=1}^{i} x_k y_k), \delta \rangle \qquad \text{pour tout } \mathfrak{x} = (x_i) \in \lambda \text{ et tout } \mathfrak{y} = (y_i) \in \lambda^s .$$

Comme $(\sum_{k=1}^{i} x_k y_k)$ est un élément de l^∞, $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle_\delta$ est défini pour tout $\mathfrak{x} = (x_i) \in \lambda$ et tout $\mathfrak{y} = (y_i) \in \lambda^s$. Il est évident que

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle_\delta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \text{pour tout } \mathfrak{x} = (x_i) \in \lambda \text{ et tout } \mathfrak{y} = (y_i) \in \lambda^\beta .$$

On note que pour tout espace λ tel que $\lambda = \lambda^{ss}$ (ou plus généralement, λ est semi-normal), la topologie forte $\beta(\lambda, \lambda^s)$ sur λ est indépendante du choix de δ. Par conséquent, nous ne considérons que la topologie forte $\beta(\lambda, \lambda^s)$ sur λ.

On obtient facilement les théorèmes suivants:

I. *Pour qu'un espace λ soit semi-parfait, il faut et il suffit que l'on ait $\lambda = \lambda^{ss}$.*

II. *Pour qu'un espace λ soit régulier, il faut et il suffit qu'il existe un espace semi-parfait μ tel que λ coïncide avec l'adhérence de φ dans μ pour la topologie $\beta(\mu, \mu^s)$.*

III. *Pour tout espace semi-parfait λ, les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

1) $\lambda' = \lambda^s$,

2) $\lambda = \lambda_r$.

IV. *Pour tout espace semi-parfait λ, on a*

$$\lambda^s = (\lambda_r)' .$$

En général, pour tout espace de suites λ, on a

$$\lambda^* \subset \lambda^\beta \subset \lambda^s .$$

Si λ est normal, on a $\lambda^* = \lambda^\beta = \lambda^s$. (On n'a pas cette propriété dans le cas des espaces de fonctions, car un espace parfait de fonctions λ n'est pas nécessairement le dual topologique d'un sous-espace de λ^*.)

Il semble que le dual d'un espace E d'opérateurs du type fonctionnel ([4]), correspondant à β-dual, soit de la forme suivante:

$$E^\beta = \{ T \in \mathfrak{F} \,;\ T * S \in (C) \quad \text{pour tout } S \in E \} .$$

Université libre de Tokyo Joshi Daigaku
Université Waseda

Note ajoutée

Récemment, le Prof. G. Köthe a eu la bonté de nous communiquer le travail de A. Pietsch [8] dont le chapitre I a beaucoup de relations à ce que nous avons étudié dans notre § 1.

Bibliographie

[1] J. Dieudonné, Sur les espaces de Köthe, J. Analyse Math., **1** (1951), 81-115.
[2] J. Dieudonné, Recent developments in the theory of locally convex vector spaces, Bull. Amer. Math. Soc., **59** (1953), 495-512.
[3] Y. Kōmura, On linear topological spaces, Kumamoto J. Sci., Ser. A, **5** (1962), 148-157.
[4] Y. Kōmura, On linear spaces of functions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1, **9** (1962), 203-248.
[5] G. Köthe, Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume, Math. Nachr., **4** (1951), 70-80.
[6] G. Köthe, Topologische lineare Räume I, Springer, 1960.
[7] G. Mackey, On infinite-dimensional linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **57** (1945), 155-207.
[8] A. Pietsch, Verallgemeinerte vollkommene Folgenräume, Akademie-Verlag, 1962.