J. Math. Soc. Japan
Vol. 15, No. 3, 1963

Über die rationale Darstellbarkeit der Heckeschen Operatoren

von Mitsuya MORI

(Eingegangen am 27. Aug., 1962)
(Verbessert am 26. März, 1963)

§ 1. Es bezeichne Γ eine Fuchssche Gruppe, d. h. eine diskrete Untergruppe der speziellen linearen Gruppe $SL(2, \boldsymbol{R})$ 2. Grades im Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen, für die, angesehen als eine Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen einer oberen Halbebene $\mathfrak{H}$, der Quotientenraum $\mathfrak{H}/\Gamma$ ein endliches Maß hat. Die automorphen Funktionen zu Γ bilden einen Körper $\mathfrak{K}$ der algebraischen Funktionen einer Unbestimmten über dem Körper $\boldsymbol{C}$ der komplexen Zahlen, und die ganzen automorphen Formen fester Dimension zu Γ einen Vektorraum endlicher Dimension über $\boldsymbol{C}$, der sich als direkte Summe zweier Unterräumen, nämlich des Unterraums von den Spitzenformen und des von den Eisensteinschen Reihen schreiben läßt. Den Raum der Spitzenformen der Dimension -2κ zu Γ bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma)$. Die Heckeschen Operatoren für Γ bewirken auf $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma)$ als lineare Transformationen. In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß falls Γ eine Fuchssche Gruppe von dem sofort anzugebenden Typus ist, die oben genannten linearen Transformationen von $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma)$ alle rational darstellbar sind.

Nun erklären wir den Typus von Γ, der in Rede stehen soll.

Es sei Φ eine indefinite Quaternionenalgebra über dem Körper $\boldsymbol{Q}$ der rationalen Zahlen mit der kanonischen Involution $\alpha \rightarrow \alpha'$. $N(\alpha) = \alpha\alpha'$ ist die Norm von α. $\mathfrak{o}$ sei eine maximale Ordnung von Φ, und $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$. $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ bezeichne die Gruppe derjenigen Einheiten von $\mathfrak{o}$, deren Normen 1 sind, $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ die Gruppe derjenigen Elementen γ von $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ mit $\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$. Da Φ eine treue Darstellung durch reellen Matrizen 2. Grades hat, läßt sich $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ als eine Fuchssche Gruppe auffaßen. Wenn $\mathfrak{a}$ teilerfremd zur Diskriminante $d(\Phi)$ von Φ ist, so gilt $\mathfrak{a} = N\mathfrak{o}$ mit einem positiven ganzen N. Dann bezeichnen wir $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ mit $\Gamma_N(\mathfrak{o})$. Diese soll unsere Gruppe sein.

Wenn Φ Nullteiler enthält, ist Φ der volle Matrizenring $M_2(\boldsymbol{Q})$ 2. Grades über $\boldsymbol{Q}$. $\mathfrak{o}$ ist dann konjugiert zu der Ordnung $M_2(\boldsymbol{Z})$ aller Matrizen mit ganzen Koeffizienten, $\Gamma_N(\mathfrak{o})$ isomorph zur homogenen Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ der Stufe N. Man wird leicht einsehen, daß unsere späteren Untersuchungen durch Übergang zu den Konjugierten in keiner Weise beeinflußt werden. So bedeutet es keine wesentliche Einschränkung, daß wir im Falle

$\Phi = M_2(\boldsymbol{Q})$ nur die Gruppe $\Gamma_N(M_2(\boldsymbol{Z})) = \Gamma(N)$ betrachten.

Der Heckesche Operator ist zuerst von Hecke [1] im Falle $\Phi = M_2(\boldsymbol{Q})$ für $\Gamma(N)$ eingeführt und nachher von Eichler [2] auf den Fall einer indefiniten Quaternionenalgebra verallgemeinert worden. Der Heckesche Operator n. Stufe für $\Gamma_N(\mathfrak{o})$ wird für jedes zu $d(\Phi)N$ teilerfremden positiven ganzen n definiert. Wir bezeichnen ihn mit $T(n\,;N\mathfrak{o})$, speziell $T(n\,;NM_2(\boldsymbol{Z}))$ kurz mit T_n wie in [1].

Es bezeichne τ einen Punkt auf $\mathfrak{H}$ oder eine Spitze von Γ, die auf der reellen Achse liegt oder mit ∞ übereinstimmt. Jede automorphe Form gerader Dimension -2κ erhält man dadurch, daß man in einem Differential $f(\tau)(dg(\tau))^\kappa$ des Grades κ von $\mathfrak{K}$ das Differential $dg(\tau)$ durch $\dfrac{dg(\tau)}{d\tau}$ ersetzt. Insbesondere sind die Spitzenformen der Dimension -2 zu Γ identisch mit denjenigen Funktionen von τ, die aus den Differentialen 1. Gattung von $\mathfrak{K}$ durch die Ableitung nach τ entstehen. Dadurch werden die Heckeschen Operatoren für Γ mit algebraischen Korrespondenzen, sogenannten Modularkorrespondenzen, von $\mathfrak{K}$ verknüpft. Die Darstellung der Heckeschen Operatoren für Γ in $\mathfrak{S}_2(\Gamma)$ ist also nichts anderes als die der Modularkorrespondenzen von $\mathfrak{K}$ im Raum der Differentiale 1. Gattung. Entsprechendes gilt im Falle höherer Dimensionen. Zu $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma)$ gehört ein Divisor $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{K}$ der Art, daß die Differentiale des Grades κ dann und nur dann den Spitzenformen der Dimension -2κ zugeordnet sind, wenn sie Multipla von $\mathfrak{d}^{-1}$ sind. Die Darstellung der Heckeschen Operatoren in $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma)$ ist bis auf Konstanten identisch mit der von den Modularkorrespondenzen im Raum der den Spitzenformen zugeordneten Differentiale des Grades κ, also im Raum der Differentiale κ. Grades, die die Multipla von $\mathfrak{d}^{-1}$ sind.

In einer Arbeit [3] hat Eichler eine Theorie der Integrale zu den automorphen Formen einer Variablen entwickelt, und als Anwendung auf die Modularkorrespondenzen hat er die Spurformel angegeben. Aus der Spurformel geht hervor, daß die Spuren der Heckeschen Operatoren T_n bei Darstellung in $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma(N))$ rational sind. Da die Heckeschen Operatoren T_n bekanntlich eine kommutative halbeinfache Algebra über $\boldsymbol{Q}$ erzeugen [4], so ist die Darstellung von T_n mit einer rationalen äquivalent.

Es scheint mir aber schwer, die rationale Darstellbarkeit von $T(n\,;N\mathfrak{o})$ in dieser Weise zu beweisen, falls Φ eine Divisionsalgebra ist. Im folgenden soll ein Beweis in allgemeinem Falle beliebiger indefiniten Quaternionenalgebra angegeben werden. Der Plan unseres Beweises ist folgender.

Nach der Arbeit [5] gibt es für die Gruppe $\Gamma_N(\mathfrak{o})$ einen Teilkörper L von $\mathfrak{K}$, der ein Körper der algebraischen Funktionen einer Unbestimmten mit Konstantenkörper $\boldsymbol{Q}$ ist, für den $LC = \mathfrak{K}$ gilt. Der Teilkörper L kann sogar so bestimmt werden, daß die Modularkorrespondenzen algebraische Korrespondenzen in L liefern. Im Falle $\Phi = M_2(\boldsymbol{Q})$ treten bei $N \geqq 2$ im Divisor $\mathfrak{d}$ nur die zu den Spitzen von $\Gamma_N(\mathfrak{o})$ zugehörigen Primdivisoren und bei $N=1$ überdies noch die zu den elliptischen Fixpunkten von $\Gamma_N(\mathfrak{o})$ zugehörigen Primdivisoren auf. Im Falle $\Phi =$ Divisionsalgebra ist $\mathfrak{d}$ bei $N \geqq 2$ Einheitsdivisor. Dagegen bei $N=1$ besteht $\mathfrak{d}$ aus den zu elliptischen Fixpunkten zugehörigen Primdivisoren. Man kann leicht einsehen, daß $\mathfrak{d}$ außer im Falle $\Phi =$ Divisionsalgebra und $N=1$ ein Divisor von L ist. Nun ergibt sich die rationale Darstellbarkeit von $T(n; N\mathfrak{o})$ außer im Falle $\Phi =$ Divisionsalgebra und $N=1$ aus der folgenden Tatsache.

Es sei k ein Teilkörper von $\boldsymbol{C}$, K ein Körper der algebraischen Funktionen einer Unbestimmten mit Konstantenkörper k. $\boldsymbol{K}$ bedeute hier $K\boldsymbol{C}$. Für einen Divisor $\mathfrak{c}$ von $\boldsymbol{K}$ bezeichne $\mathfrak{S}_\kappa(\mathfrak{c})$ bzw. $S_\kappa(\mathfrak{c})$ die Gesamtheit der Differentiale des Grades κ von $\boldsymbol{K}$ bzw. K, welche die Multipla von $\mathfrak{c}^{-1}$ sind. Wenn algebraische Korrespondenz X die Schar $\mathfrak{S}_\kappa(\mathfrak{c})$ in sich abbildet, bekommt man eine Darstellung $\mathfrak{D}$ des von X erzeugten Ringes in $\mathfrak{S}_\kappa(\mathfrak{c})$. Sei $\mathfrak{c}$ speziell ein Divisor von K. Liefert X eine algebraische Korrespondenz in K, dann vermittelt $\mathfrak{D}$ eine Darstellung des von X erzeugten Ringes in $S_\kappa(\mathfrak{c})$. Die Koeffizientenbereich der vermittelten Darstellung wird dann in k sein.

Im Ausnahmefalle, wo $\Phi =$ eine Divisionsalgebra und $N=1$ ist, kann man aus Mangel an genaueren Kenntnisse über elliptische Fixpunkte nicht entscheiden, ob $\mathfrak{d}$ ein Divisor von L ist, so wird in diesem Falle unser Beweis etwas anders als in allen anderen Fällen geführt, mit Hilfe der elementaren Tatsachen der Theorie abelscher Mannigfaltigkeiten[1]. Bei dem Beweis wird jedoch die Voraussetzung, daß Φ eine Divisionsalgebra ist, nicht gebraucht. Nach der Arbeit [**6**] wird nämlich bei beliebiger indefiniten Quaternionenalgebra Φ der Raum $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_N(\mathfrak{o}))$ durch Klasseneinteilung nach einem gewißen Gitter als eine abelsche Mannigfaltigkeit A angesehen, und jeder Heckesche Operator $T(n; N\mathfrak{o})$ läßt sich als Endomorphismus von A auffaßen. Speziell ist $T(n; \mathfrak{o})$ zu sich konjugiert in bezug auf die Peterssonsche Metrik. Daher ist der von $T(n; \mathfrak{o})$ erzeugte Ring $\mathfrak{M}$ eine direkte Summe endlich vieler totalreellen algebraischen Zahlkörper F_i endlichen Grades: $\mathfrak{M} = F_1 e_1 \oplus F_2 e_2 \oplus \cdots \oplus F_g e_g$ mit den Einsen e_i von F_i, $1 \leqq i \leqq g$. Daraus ergibt sich, daß die Darstellung von jedem F_i in bezug auf das analytische Koordinatensystem von $e_i A$, daher auch die von $\mathfrak{M}$ in bezug auf eine Basis von $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_1(\mathfrak{o}))$ mit einer rationalen äquivalent ist.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. S. Iyanaga und Herrn Prof. G. Shimura meinen herzlichen Dank für ihre wertvollen Ratschläge aussprechen.

§ **2.** Dieser Paragraph ist von rein abstrakt algebraischer Natur. Er wird

---

1) Diesen Beweis verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Professor G. Shimura.

den Grund für unseren Beweis der rationalen Darstellbarkeit von $T(n; N\mathfrak{o})$ in $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_N(\mathfrak{o}))$, außer im Falle $\Phi=$ Divisionsalgebra und $N=1$, angeben.

Es sei K ein Körper der algebraischen Funktionen einer Unbestimmten über einem Teilkörper k von $\boldsymbol{C}$ als Konstantenkörper, für den $K\boldsymbol{C}$ ein Körper der algebraischen Funktionen einer Unbestimmten ist. $K\boldsymbol{C}$ bezeichnen wir mit $\boldsymbol{K}$. D_κ bezeichne die Gesamtheit der Differentiale des Grades κ von K, d. h. der $f\omega_0^\kappa$ mit f aus K und mit einem festen Differential ω_0 von K, $\mathfrak{D}_\kappa$ die Gesamtheit der Differentiale des Grades κ von $\boldsymbol{K}$, die sich also als $f\omega_0^\kappa$ mit f aus $\boldsymbol{K}$ schreiben laßen. Für einen Divisor $\mathfrak{c}$ von $\boldsymbol{K}$ bezeichne $\mathfrak{S}_\kappa(\mathfrak{c})$ bzw. $S_\kappa(\mathfrak{c})$ die Gesamtheit der Differentiale des Grades κ von $\boldsymbol{K}$ bzw. K, welche die Multipla von $\mathfrak{c}^{-1}$ sind. Es ist dann $\mathfrak{S}_\kappa(\mathfrak{c})\cap D_\kappa=S_\kappa(\mathfrak{c})$. Diese beiden sind von endlichen Dimensionen.

Ist $\mathfrak{c}$ speziell ein Divisor von K, dann ist jede Basis von $S_\kappa(\mathfrak{c})$ über k auch eine Basis von $\mathfrak{S}_\kappa(\mathfrak{c})$ über $\boldsymbol{C}$, weil die Dimensionen der Divisorenklassen von K/k bei jeder Konstantenerweiterung invariant sind.

Nun ziehen wir die algebraischen Korrespondenzen von $\boldsymbol{K}$ in Betracht. X sei eine prime nicht-konstante Korrespondenz von $\boldsymbol{K}$ in sich, die durch einen nicht-konstanten Primdivisor $\mathfrak{P}$ von $\boldsymbol{KK}'/\boldsymbol{K}$ definiert ist. Hier bedeutet $\boldsymbol{K}'$ einen zu $\boldsymbol{K}$ isomorphen Körper, der algebraisch unabhängig von $\boldsymbol{K}$ über $\boldsymbol{C}$ ist. X bildet $\mathfrak{D}_\kappa$ in sich ab durch

$$X(f\omega_0^\kappa)=S_{P_{\boldsymbol{KK}'^\pi/\boldsymbol{K}}}\Big(f^\varphi\Big(\frac{\omega_0^\varphi}{dx}\Big)^\kappa\Big)^\pi\cdot(dx)^\kappa. \tag{1}$$

Dabei ist dx ein fest gewähltes Differential von $\boldsymbol{K}$, $a\to a^\pi$ die Restklassenabbildung mod $\mathfrak{P}$ von $\boldsymbol{KK}'$ auf $\boldsymbol{KK}'^\pi$, $\alpha\to\alpha^\varphi$ ein fester Isomorphismus von $\boldsymbol{K}$ auf $\boldsymbol{K}'$. Aber $\mathfrak{S}_\kappa(\mathfrak{c})$ wird nicht immer durch X in sich abgebildet. Jedoch, wenn X die Schar $\mathfrak{S}_\kappa(\mathfrak{c})$ in sich abbildet, ist die Zuordnung $\psi: f\omega_0^\kappa\to X(f\omega_0^\kappa)$ eine Darstellung des von X erzeugten Ringes $\mathfrak{X}$ im Raum $\mathfrak{S}_\kappa(\mathfrak{c})$.

Auf die Korrespondenz X von $\boldsymbol{K}$, die bei K eine Korrespondenz liefert, wenden wir Bezeichnung X_K an. $\mathfrak{X}_K$ sei der von X_K erzeugte Ring. Ist $\mathfrak{a}$ ferner ein Divisor von K, dann liefert die Zuordnung ψ eine Darstellung von $\mathfrak{X}_K$ im Raum $S_\kappa(\mathfrak{c})$, deren Koeffizienten also in k sind. Um dies einzusehen, hat man nur zu berücksichtigen, daß π im Falle des Körpers KK' mit einem zu K isomorphen Teilkörper K' von $\boldsymbol{K}'$ den Homomorphismus von KK'/K auf eine endlich-algebraische Erweiterung KK'^π/K liefert, und es $S_{P_{KK'^\pi/K}}g^{\varphi\pi}=S_{P_{\boldsymbol{KK}'^\pi/\boldsymbol{K}}}g^{\varphi\pi}$ für g aus K gilt.

§ 3. In diesem Paragraphen stellen wir einige Tatsache über die indefinite Quaternionenalgebra über $\boldsymbol{Q}$ und aus der Theorie der automorphen Formen zu $\Gamma_N(\mathfrak{o})$ zusammen, die nachher gebraucht werden.

Es bezeichne Φ wie in § 1 eine indefinite Quaternionenalgebra über $\boldsymbol{Q}$, $\mathfrak{o}$ eine maximale Ordnung von Φ. Die Algebra $\Phi_{\boldsymbol{R}}=\Phi\otimes\boldsymbol{R}$ ist isomorph zum vollen Matrizenring $M_2(\boldsymbol{R})$ 2. Grades über $\boldsymbol{R}$. χ sei eine feste treue reelle Darstellung von Φ vom Grade 2.

Jedes Links- (Rechts-, bzw. zweiseitige) Ideal von $\mathfrak{o}$ ist ein Hauptideal. Die Gruppe derjenigen Einheiten von $\mathfrak{o}$, deren Normen 1 sind, bezeichnen wir wie in §1 mit $\Gamma_{\mathfrak{o}}$. Im Falle $\Phi=M_2(\boldsymbol{Q})$ ist $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ isomorph zu der homogenen Modulgruppe $\Gamma(1)$. Es sei $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$; $\mathfrak{a}=\alpha\mathfrak{o}$ mit α aus $\mathfrak{o}$. $\Gamma^*_{\mathfrak{a}}=\Gamma^*_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{o})$ bezeichne die Gruppe derjenigen Elementen β von $\Gamma_{\mathfrak{o}}$, für die $\beta\equiv\pm1 \pmod{\mathfrak{a}}$ ist, $\Gamma_{\mathfrak{a}}=\Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{o})$ wie in §1 die Gruppe derjenigen Elementen γ von $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ mit $\gamma\equiv1 \pmod{\mathfrak{a}}$ ist. Es ist dann $\Gamma_{\mathfrak{a}}\cong\Gamma^*_{\mathfrak{a}}/(\pm1)$ mit der Eins 1 in $\Gamma^*_{\mathfrak{a}}$. Für $\Phi=M_2(\boldsymbol{Q})$ ist $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ mit $\mathfrak{a}=N\mathfrak{o}$, $N>0$, isomorph zu der homogenen Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ der Stufe N. $G_{\mathfrak{a}}$ sei die Multiplikationsgruppe von $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$, $S_{\mathfrak{a}}$ die Gruppe der Restklassen der Elementen α aus $\mathfrak{o}$, für die $N(\alpha)\equiv1 \pmod{(\mathfrak{a}\cap\boldsymbol{Z})}$ ist. $S_{\mathfrak{a}}$ ist ein Normalteiler von $G_{\mathfrak{a}}$. Bei der Zuordnung $\beta\to N(\beta)$ wird die Faktorgruppe $G_{\mathfrak{a}}/S_{\mathfrak{a}}$ isomorph auf die Multiplikationsgruppe von $\boldsymbol{Z}/(\boldsymbol{Z}\cap\mathfrak{a})$ abgebildet. Jedes Element aus $S_{\mathfrak{a}}$ hat einen Repräsentant in $\Gamma_{\mathfrak{o}}$, also ist $\Gamma_{\mathfrak{o}}/\Gamma^*_{\mathfrak{a}}$ isomorph zu $S_{\mathfrak{a}}/\{\pm1\}$ mit der Eins 1 in $S_{\mathfrak{a}}$.

Wir gehen jetzt zur Zusammenstellung von Eigenschaften zu $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ bzw. $\Gamma^*_{\mathfrak{a}}$ gehöriger automorpher Formen und automorpher Funktionen über.

Im folgenden werde jedes Element ξ aus Φ mit der reellen Matrix $\chi(\xi)$ identifiziert. Ist $\xi=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, $N(\xi)=|\chi(\xi)|>0$, dann ist $\tau\to\xi\circ\tau=\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ eine umkehrbare eindeutige analytische Abbildung von der oberen Halbebene $\mathfrak{H}$ in sich. $\Gamma_{\mathfrak{o}}/\{\pm1\}$ bzw. $\Gamma^*_{\mathfrak{a}}/\{\pm1\}$ mit der Eins 1 in $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ wird also als eine Fuchssche Gruppe angesehen. Die Fixpunkte von $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ sind die von elliptischen Transformationen 2-ter oder 3-ter Ordnung, oder die von parabolischen Transformationen. Die letzteren kommen nur im Falle $\Phi=M_2(\boldsymbol{Q})$ vor. $\Gamma^*_{\mathfrak{a}}$ mit $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$ enthält keine elliptische Transformation. Ist s ein parabolischer Fixpunkt (Spitze) von $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ bzw. $\Gamma^*_{\mathfrak{a}}$, dann wird die Gruppe der Transformationen ξ von $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ bzw. $\Gamma^*_{\mathfrak{a}}$ mit $\xi\circ s=s$ eine freie zyklische Gruppe, deren Erzeugende sich mit ρ aus $SL(2,\boldsymbol{R})$ in der Gestalt $\rho\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rho^{-1}$ schreiben läßt. Die Kompaktifikation von $\mathfrak{H}/\Gamma_{\mathfrak{o}}$ bzw. $\mathfrak{H}/\Gamma^*_{\mathfrak{a}}$ (nur im Falle $\Phi=M_2(\boldsymbol{Q})$ sollen die Spitzen hinzugefügt werden, um $\mathfrak{H}/\Gamma_{\mathfrak{o}}$ bzw. $\mathfrak{H}/\Gamma^*_{\mathfrak{a}}$ abzuschließen) wird als eine Riemannsche Fläche angesehen, die wir resp. mit $\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{F}$ bezeichnen. Als Ortsuniformisierende eines inneren Punktes τ_0 von $\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{F}$ kann man $\tau-\tau_0$ wählen. Eine Ortsuniformisierende an einer elliptischen Ecke τ_0 von $\mathfrak{f}$ e-ter Ordnung ($e=2$ oder 3) ist $(\tau-\tau_0)^e$, eine Ortsuniformisierende an einer Spitze s von $\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{F}$ die Variabeln $q=e^{2\pi i\rho^{-1}\tau}$. An der elliptischen Ecke e-ter Ordnung ist $\mathfrak{F}$ verzweigt von Ordnung e, an der Spitze von $\mathfrak{f}$ ist $\mathfrak{F}$ verzweigt von Ordnung n, wo n den kleinsten positiven Exponenten bezeichnet, für den $\left(\rho\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rho^{-1}\right)^n$

in $\Gamma_{\mathfrak{a}}^{*}$ liegt.

Eine in $\mathfrak{H}$ eindeutige, analytische Funktion $f(\tau)$ heißt zu $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ bzw. $\Gamma_{\mathfrak{a}}^{*}$ gehörige automorphe Form der Dimension -2κ, wenn gilt

1) $f(\xi\circ\tau)\left(\frac{d\xi(\tau)}{d\tau}\right)^{\kappa}=f(\tau)$ für jedes ξ aus $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ bzw. $\Gamma_{\mathfrak{a}}^{*}$.

2) $f(\tau)$ ist in $\mathfrak{H}$ bis auf Pole regulär.

3) In jeder Spitze s läßt $f(\tau)\left(\frac{d\tau}{d\rho^{-1}\tau}\right)^{\kappa}$ eine Entwicklung nach der Ortsuniformisierenden $q=e^{2\pi i\rho^{-1}\tau}$ zu mit höchstens endlich vielen negativen Potenzen von q.

Pol- und Nullstellen-Ordnung von $f(\tau)$ in s gemessen in q werden durch die Potenz des ersten nicht verschwindenden Gliedes dieser Entwicklung gegeben.

Kommen Pole nicht vor, heißt $f(\tau)$ ganz, und wenn eine ganze Form $f(\tau)$ in allen Spitzen verschwindet, wird sie Spitzenform der Dimension -2κ genannt. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_{\mathfrak{o}})$ bzw. $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_{\mathfrak{a}})$ resp. die Schar der Spitzenformen der Dimension -2κ zu $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ bzw. $\Gamma_{\mathfrak{a}}^{*}$. Eine automorphe Form der Dimension 0 heißt automorphe Funktion. Die automorphe Funktion läßt sich überall, einschließlich in den Spitzen, in eine Laurent-Reihe nach der Ortsuniformisierenden mit höchstens endlich vielen negativen Potenzen entwickeln. Die automorphe Funktion zu $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ bzw. $\Gamma_{\mathfrak{a}}^{*}$ ist nichts anderes als die meromorphe Funktion auf $\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{F}$. Den Körper der automorphen Funktionen zu $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ bzw. $\Gamma_{\mathfrak{a}}^{*}$ bezeichnen wir resp. mit $\mathfrak{K}(\mathfrak{o})$ bzw. $\mathfrak{K}(\mathfrak{a})$.

Nun beschäftigen wir uns mit den Erzeugungen von $\mathfrak{K}(\mathfrak{o})$ und $\mathfrak{K}(\mathfrak{a})$. Nach der Arbeit [**5**] gibt es endlich viele meromorphe Funktionen $f_1(\tau), f_2(\tau), \cdots, f_m(\tau)$ auf $\mathfrak{H}$, die über $\boldsymbol{C}$ den Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{o})$ erzeugen, und ferner als eine Erzeugung von $\mathfrak{K}(\mathfrak{a})$ mit einem zweiseitigen Ideal $\mathfrak{a}=\alpha_0\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{K}(\mathfrak{o})$ endlich viele von ξ aus Φ abhängige, meromorphe Funktionen $g_1(\xi,\tau), g_2(\xi,\tau), \cdots, g_M(\xi,\tau)$ auf $\mathfrak{H}$, für die gilt

1. $g_j(\xi\gamma,\tau)=g_j(\xi,\gamma\circ\tau)$, $1\leqq j\leqq M$, für ξ aus Φ, γ aus $\mathfrak{o}$ ([**5**], Proposition 3.2).

2. Für ξ_1, ξ_2 aus Φ ist dann und nur dann

$$g_j(\xi_1,\tau)=g_j(\xi_2,\tau),\quad j=1,2,\cdots,M,$$

wenn $\xi_1\equiv\pm\xi_2 \pmod{\mathfrak{o}}$ ist ([**5**], Proposition 3.3). Diese Funktionen $f_1(\tau), \cdots, f_m(\tau)$ und $g_1(\xi,\tau), \cdots, g_M(\xi,\tau)$ können sogar so bestimmt werden, daß das folgende gilt. Die m Funktionen $f_1(\tau), \cdots, f_m(\tau)$ erzeugen über $\boldsymbol{Q}$ einen Körper K_0 der algebraischen Funktionen einer Unbestimmten mit Konstantenkörper $\boldsymbol{Q}$ ([**7**], Theorem 6, [**5**], § 3.1), und durch die M Funktionen $g_1(\xi,\tau), \cdots, g_M(\xi,\tau)$ wird der Körper $\mathfrak{K}(\mathfrak{a})$ in der Form

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{a})=\mathfrak{K}(\mathfrak{o})(g_j(\beta\alpha_0^{-1},\tau), 1\leqq j\leqq M, \beta\in\mathfrak{o})$$

erzeugt ([**5**], Proposition 3.4), und ferner ist der Körper

$$K_{\mathfrak{a}}=K_0(g_j(\beta\alpha_0^{-1},\tau), 1\leqq j\leqq M, \beta\in\mathfrak{o})$$

eine endlich-algebraische normale Erweiterung von K_0 ([**5**], Proposition 2.6). Die Struktur von $K_{\mathfrak{a}}/K_0$ ist bestimmt durch den folgenden Satz ([**5**], Theorem 2):

Die Galoisgruppe $\mathfrak{G}_{\mathfrak{a}}$ *von* $K_{\mathfrak{a}}/K_0$ *ist isomorph zu* $G_{\mathfrak{a}}/\{\pm1\}$. *Ist* γ_σ *das zu* σ *aus* $\mathfrak{G}_{\mathfrak{a}}$ *zugeordnete Element aus* $G_{\mathfrak{a}}/\{\pm1\}$, *dann ist*

$$g_j^\sigma(\beta\alpha_0^{-1},\tau)=g_j(\beta\gamma_\sigma\alpha_0^{-1},\tau),\quad i\leqq j\leqq M.$$

Es sei a *die kleinste positive ganze Zahl, die* $\mathfrak{a}$ *teilt, und* $\zeta_a=e^{2\pi i/a}$. *Zu* $S_{\mathfrak{a}}/\{\pm1\}$ *gehört der Zwischenkörper* $K_0(\zeta_a)$. $\boldsymbol{Q}(\zeta_a)$ *ist algebraisch-abgeschlossen in* $K_{\mathfrak{a}}$, *und* $\zeta_a^\sigma=\zeta_a^{N(\gamma_\sigma)}$.

Von jetzt ab setzen wir durchweg voraus, daß $\mathfrak{a}$ teilerfremd zur Diskriminante $d(\Phi)$ ist. Also ist $\mathfrak{a}=N\mathfrak{o}$ mit einer positiven ganzen Zahl N. $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ ist isomorph mit dem vollen Matrizenring $M_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ 2. Grades über $\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}$. Wir identifizieren $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ mit dem Ring, also $G_{\mathfrak{a}}$ mit der Multiplikationsgruppe von $M_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$.

Heckesche Operatoren zu den Spitzenformen werden nun wie folgt definiert.

Im folgenden bezeichne $R(G,S)$ den Ring der Transformationen von einer Gruppe G in bezug auf eine gewiße Menge S. (Dazu siehe [**5**], § 1.1). Δ, Δ_0 seien resp. die Menge aller Elementen aus Φ bzw. $\mathfrak{o}$ mit positiven Normen. Der Ring $R(\Gamma_0,\Delta)$ ist ein kommutativer Integritätsbereich ([**5**], Proposition 1.7). $\Delta_{\mathfrak{a}}$ sei die Menge aller Elementen aus Δ_0, deren Normen zu $\mathfrak{a}$ teilerfremd sind, $\Delta_{\mathfrak{a}}^*$ die Menge aller Elementen aus $\Delta_{\mathfrak{a}}$, die mod $\mathfrak{a}$ den Matrizen $\begin{pmatrix}1&0\\0&c\end{pmatrix}$ kongruenz sind. Nun sei β ein Element aus $\Delta_{\mathfrak{a}}, N(\beta)=b$. Da b zu $\mathfrak{a}$ teilerfremd ist, so gibt es ganze Zahl d mit $bd\equiv1$ (mod $\mathfrak{a}$). δ sei ein Element aus $\mathfrak{o}$ mit $\delta\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&d\end{pmatrix}$ (mod $\mathfrak{a}$). Nun ist $N(\beta\delta)\equiv1$ (mod $\mathfrak{a}$), also gibt es ein Element γ aus Γ_0 mit $\gamma\equiv\beta\delta$ (mod $\mathfrak{a}$). Es ist dann $\gamma^{-1}\beta\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&b\end{pmatrix}$ (mod $\mathfrak{a}$). ψ sei die Zuordnung $\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}}\to\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ von $R(\Gamma_{\mathfrak{a}},\Delta_{\mathfrak{a}}^*)$ in $R(\Gamma_0,\Delta_{\mathfrak{a}})$. Nach dem gezeigten ist ψ eine Abbildung von $R(\Gamma_{\mathfrak{a}},\Delta_{\mathfrak{a}}^*)$ auf $R(\Gamma_0,\Delta_{\mathfrak{a}})$. Darüber ist ψ ein Isomorphismus ([**5**], Proposition 1.15).

Von nun ab bis zum Schluß bedeute n eine zu $d(\Phi)N$ teilerfremde positive ganze Zahl. Wir bezeichnen mit $T(n)$ die endliche Summe von $\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ aus $R(\Gamma_0,\Delta_{\mathfrak{a}})$ mit $N(\alpha)=n$, mit $T(n;\mathfrak{a})$ das Element aus $R(\Gamma_{\mathfrak{a}},\Delta_{\mathfrak{a}}^*)$, das bei ψ zu $T(n)$ zugeordnet ist.

Es sei α ein Element aus $\Delta, \Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}}=\bigcup_{\nu=1}^{l}\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha_\nu$ eine Zerlegung von $\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}}$ in untereinander fremde Klassen. Wir setzen für jedes $f(\tau)$ aus $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_{\mathfrak{a}})$

(2)
$$f(\tau)\,|\,(\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}})_{2\kappa}=(N(\alpha))^{\kappa-1}\sum_{\nu=1}^{l}f(\alpha_\nu\circ\tau)\Big(\frac{d\alpha_\nu\circ\tau}{d\tau}\Big)^{\kappa}.$$

Die Funktion $f(\tau)\,|\,(\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}})_{2\kappa}$ liegt wieder in $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_{\mathfrak{a}})$, und sie ist unabhängig von der Wahl von α_ν. Ist $\boldsymbol{f}$ eine Basis von $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_{\mathfrak{a}})$ über $\boldsymbol{C}$, als eine einspaltige Matrix gedacht, dann gibt es eine Matrix $\mathfrak{T}_{2\kappa}(\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}})$ mit

(3)
$$\boldsymbol{f}\,|\,(\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}})_{2\kappa}=\mathfrak{T}_{2\kappa}(\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}})\boldsymbol{f}\,.$$

Unter dem *Heckeschen Operator* verstehen wir die lineare Transformation von $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_{\mathfrak{a}})$ in sich, die $f(\tau)$ in $f(\tau)\,|\,(\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}})_{2\kappa}$ überführen.

Nun definieren wir Transformation der automorphen Funktion zu $\Gamma_{\mathfrak{a}}$. $\mathfrak{q}$ sei ein Linksideal von $\mathfrak{o}$ mit $N(\mathfrak{q})=n$. Hierbei bezeichnet $N(\mathfrak{q})$ die Norm von $\mathfrak{q}$. Für α aus $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{q}=\mathfrak{o}\alpha$ können wir $N(\alpha)=n$ setzen, weil $\mathfrak{o}$ ein Element ε mit $N(\varepsilon)=-1$ enthält. Da n teilerfremd zu $\mathfrak{a}$ ist, so gibt es eine ganze Zahl b mit $bn\equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$. Sei β ein Element aus $\mathfrak{o}$ mit $\beta\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&b\end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{a}}$. Es ist dann $N(\alpha\beta)\equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$, so findet sich ein Element γ aus $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ mit $\gamma\equiv\alpha\beta \pmod{\mathfrak{a}}$, daher ist $\gamma^{-1}\alpha\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{a}}$. Also nehmen wir an, daß $\mathfrak{q}=\mathfrak{o}\alpha, N(\alpha)=n$ und $\alpha\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{a}}$ ist. Es sei $\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}}=\bigcup_{\nu=1}^{l}\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha_\nu$ eine Zerlegung von $\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}}$ in untereinander teilerfremde Klassen. Zunächst definieren wir

$$f_i^{\sigma_\nu}(\tau)=f_i(\alpha_\nu\circ\tau),\quad g_j^{\sigma_\nu}(N^{-1}\beta,\tau)=g_j(N^{-1}\beta\alpha'_\nu,\alpha_\nu\circ\tau)$$

für jedes i,j. Da $\alpha\equiv\alpha_\nu \pmod{N\mathfrak{o}}$, also $\alpha'\equiv\alpha'_\nu \pmod{N\mathfrak{o}}$ ist, so ist $g_j(N^{-1}\beta\alpha'_\nu,\alpha_\nu\circ\tau)=g_j(N^{-1}\beta\alpha',\alpha_\nu\circ\tau)$. Bezeichnet ρ den Automorphismus von $K_{\mathfrak{a}}/K_0$ mit

$$g_j^{\rho}(N^{-1}\beta,\tau)=g(N^{-1}\beta\alpha',\tau)\,,$$

dann ist $g_j^{\sigma_\nu}(N^{-1}\beta,\tau)=g_j^{\rho}(N^{-1}\beta,\alpha_\nu\circ\tau)$. Wir setzen nun $f^{\sigma_\nu}(\tau)=f^{\rho}(\alpha_\nu\circ\tau)$ für $f(\tau)$ aus $K_{\mathfrak{a}}$ und verstehen unter der *Transformation* von $f(\tau)$ zu α_ν die Funktion $f^{\sigma_\nu}(\tau)$. Für die Transformation gilt:

1) Ist $\mathfrak{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ ein m-Tupel von Funktionen aus $K_{\mathfrak{a}}$, für das $K_0\subset\boldsymbol{Q}(\mathfrak{u})\subset K_{\mathfrak{a}}$ ist, dann ist

$$\boldsymbol{Q}(\mathfrak{u}^{\sigma_\nu})\subset\boldsymbol{Q}(\mathfrak{u},f_1^{\sigma_1}(\tau),\cdots,f_m^{\sigma_l}(\tau)),\quad \nu=1,2,\cdots,l\,.$$

2) Die l Transformationen $\mathfrak{u}^{\sigma_1},\mathfrak{u}^{\sigma_2},\cdots,\mathfrak{u}^{\sigma_l}$ sind untereinander verschieden und stellen alle Konjugierten zu jedem $\mathfrak{u}^{\sigma_\nu}$ über $\boldsymbol{Q}(\mathfrak{u})$ dar ([**5**], Proposition 4.6). Darüber hinaus sind $\mathfrak{u}^{\sigma_1},\mathfrak{u}^{\sigma_2},\cdots,\mathfrak{u}^{\sigma_l}$ untereinander konjugiert über $K_{\mathfrak{a}}$, und auch über $\mathfrak{K}(\mathfrak{a})$.

Es sei H die Gruppe der Matrizen $\begin{pmatrix}a&0\\0&\pm1\end{pmatrix}$ aus $G_{\mathfrak{a}}$ mit $(a,N)=1$, L_N der zu H gehörige Unterkörper von $K_{\mathfrak{a}}$. Dann ist, wie man leicht einsieht, $L_N(\zeta_N)=K_{\mathfrak{a}}$, $L_N\cap\boldsymbol{Q}(\zeta_N)=\boldsymbol{Q}$. Da $\alpha\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{a}}$ ist, so ist $f^{\rho}(\tau)=f(\tau)$ für jedes $f(\tau)$ aus L_N bei dem Automorphismus ρ von $K_{\mathfrak{a}}/K_0$, der zu α' zugeordnet ist, daher $f^{\sigma_\nu}(\tau)=f(\alpha_\nu\circ\tau)$.

Nun werde $\mathfrak{K}(\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet. $\mathfrak{K}=\boldsymbol{C}(f_1(\tau),\cdots,f_m(\tau),g(\tau))$ sei eine Erzeugung von $\mathfrak{K}$, für die $L_N=\boldsymbol{Q}(f_1(\tau),\cdots,f_m(\tau),g(\tau))$ ist. Ist $\mathfrak{K}'=\boldsymbol{C}(f_1(t),\cdots,f_m(t),g(t))$, dann wird $\mathfrak{K}'$ vermöge der Zuordnung $f_i^\pi(t)=f_i^{\sigma_1}(\tau), i=1,2,\cdots,m$, $g^\pi(t)=g^{\sigma_1}(\tau)$ isomorph auf den Körper $\mathfrak{K}'^\pi=\boldsymbol{C}(f_1^{\sigma_1}(\tau),\cdots,f_m^{\sigma_1}(\tau),g^{\sigma_1}(\tau))$ abgebildet. Da $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'^\pi$ eine endlich-algebraische Erweiterung von $\mathfrak{K}$ ist, so definiert π einen nicht-konstanten Primdivisor $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}$ derart, daß der Restklassenhomomorphismus mod $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}$ den Isomorphismus π von $\mathfrak{K}'/\boldsymbol{C}$ auf $\mathfrak{K}'^\pi/\boldsymbol{C}$ induziert. Die durch $\mathfrak{P}$ bestimmte Korrespondenz (Modularkorrespondenz) von $\mathfrak{K}$ in sich wird die zum Ideal $\mathfrak{q}=\mathfrak{o}\alpha$ zugeordnete Korrespondenz genannt, und sie wird mit $X_\mathfrak{q}$ bezeichnet. Es sei $L'_{N'}=\boldsymbol{Q}(f_1(t),\cdots,f_m(t),g(t))$ und $L_N'^\pi=\boldsymbol{Q}(f_1^{\sigma_1}(\tau),\cdots,f_m^{\sigma_1}(\tau),g^{\sigma_1}(\tau))$. Da nach dem 2) auf Seite 263 $N_{L_N L_N'^\pi/L_N'^\pi}\mathfrak{c}=N_{\mathfrak{K}\mathfrak{K}'^\pi/\mathfrak{K}'^\pi}\mathfrak{c}$ für einen Divisor $\mathfrak{c}$ von L_N ist, liefert $X_\mathfrak{q}$ für L_N eine Korrespondenz.

§ 4. Nach den Vorbereitungen in § 2 und § 3 wollen wir nun zunächst die rationale Darstellbarkeit von $T(n;N\mathfrak{o})$ mit $N\geqq 2$ beweisen. Ist $dg(\tau)$ ein Differential von $\mathfrak{K}(\mathfrak{a})$, dann ist $\frac{dg(\tau)}{d(\tau)}$ eine automorphe Form des Grades -2. Es bezeichne $g'(\tau)$ das Derivativ $\frac{dg(\tau)}{d(\tau)}$ von $g(\tau)$ nach τ. Die Zuordnung $\lambda: f(dg(\tau))^\kappa\to f(g'(\tau))^\kappa$ ist eine isomorphe Abbildung von der Schar $\mathfrak{D}_\kappa$ der Differentiale des Grades κ von $\mathfrak{K}(\mathfrak{a})$ auf $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_\mathfrak{a})$. Es sei $\mathfrak{p}$ eine Stelle von $\mathfrak{F}$ (Der zugehörige Primdivisor soll mit gleichem Symbol wie die Stelle bezeichnet werden), speziell $\mathfrak{p}_{\infty 1},\cdots,\mathfrak{p}_{\infty h}$ die Spitzen von $\mathfrak{F}$. $m_\mathfrak{p}, m_{\mathfrak{p}_{\infty i}}$ bedeute resp. den Exponent, mit dem $\mathfrak{p},\mathfrak{p}_{\infty i}$ resp. in $dg(\tau)$ steckt. Hier werden wir vorläufig den Pol der Ordnung n die Nullstelle der Ordnung $-n$ nennen. Die Nullstellenordnung von $\frac{dg(\tau)}{d\tau}$ in einem inneren Punkt $\mathfrak{p}$ oder in einer Ecke $\mathfrak{p}$ ist gleich $m_\mathfrak{p}$, aber die in der Spitze $\mathfrak{p}_{\infty i}$, gemessen in der zu $\Gamma_\mathfrak{a}^*$ gehörigen Ortsuniformisierenden, gleich $m_{\mathfrak{p}_{\infty i}}+1$. Es sei $dg_0(\tau)$ ein Differential von L_N. Eine automorphe Form $f(\tau)\Big(\frac{dg_0(\tau)}{d\tau}\Big)^\kappa$ der Dimension -2κ zu $\Gamma_\mathfrak{a}^*$ mit $f(\tau)$ aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{a})$ ist dann und nur dann eine Spitzenform zu $\Gamma_\mathfrak{a}^*$, wenn $f(\tau)$ ein Multiplum des Divisors $(dg_0(\tau))^{-\kappa}(\mathfrak{p}_{\infty 1}\cdots\mathfrak{p}_{\infty h})^{-(\kappa-1)}$ ist. Nun kann man das Produkt $\mathfrak{p}_{\infty 1}\cdots\mathfrak{p}_{\infty h}$ der Primfaktoren $\mathfrak{p}_{\infty i}$ von den Primdivisoren von $\mathfrak{K}(\mathfrak{o})$, die den Spitzen von $\mathfrak{f}$ zugehören, zu 1. Potenz als die Fortsetzung eines Divisors von L_N ansehen, weil die Primdivisoren von L_N bei Konstantenerweiterung von $\boldsymbol{Q}$ zu $\boldsymbol{C}$ unverzweigt bleiben. Daraus folgt, daß die Schar $\mathfrak{S}_\kappa(\mathfrak{d})$ der Differentiale des Grades κ von $\mathfrak{K}(\mathfrak{a})$, die die Multipla des Divisors $\mathfrak{d}^{-1}=(\mathfrak{p}_{\infty 1}\cdots\mathfrak{p}_{\infty h})^{1-\kappa}$ von L_N sind, die Schar derjenigen Differentiale des Grades κ ist, den die Spitzenformen der Dimension -2κ zu $\Gamma_\mathfrak{a}^*$ bei λ zugeordnet sind.

Nun haben wir nach der Definition (1)

$$X_{\mathfrak{q}}\,(f(\tau)(dg_0(\tau))^{\kappa}) = S_{P_{\mathfrak{K}\mathfrak{K}'\pi/\mathfrak{K}}} f^{\sigma_1}(\tau)\Big(\frac{dg_0^{\sigma_1}(\tau)}{dg_0(\tau)}\Big)^{\kappa}\cdot(dg_0(\tau))^{\kappa}. \tag{4}$$

Aus der rechten Seite durch Division durch $(d\tau)^{\kappa}$ ergibt sich nach Definition (2)

$$\sum_{\nu=1}^{l} f(\alpha_\nu\circ\tau)\Big(\frac{dg_0(\alpha_\nu\circ\tau)}{d\tau}\Big)^{\kappa} = \sum_{\nu=1}^{l} f(\alpha_\nu\circ\tau)(g'(\alpha_\nu\circ\tau))^{\kappa}\Big(\frac{d\alpha_\nu\circ\tau}{d\tau}\Big)^{\kappa} \tag{5}$$
$$=(N(\alpha))^{1-\kappa}\cdot f(\tau)(g'(\tau))^{\kappa}\,|\,(\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}})_{2\kappa}.$$

Aus (5) folgt, daß $X_{\mathfrak{q}}$ die Schar $\mathfrak{S}_{\kappa}(\mathfrak{d})$ in sich abbildet. Also ist nach (5) und nach dem in §2 gesagten der Heckesche Operator $(\Gamma_{\mathfrak{a}}\alpha\Gamma_{\mathfrak{a}})_{2\kappa}$ rational, daher sind die Heckeschen Operatoren $T(n\,;\mathfrak{a})$ mit $n, (n, d(\Phi)N)=1$, rational darstellbar.

§5. Im Falle $N=1$ kommt es, abweichend von dem Falle $N\geqq 2$, ferner auf die zu elliptischen Ecken zugehörigen Primdivisoren an. $\mathfrak{p}$ bezeichne eine Ecke τ_0 von $\mathfrak{f}$, $(\tau-\tau_0)^{e(\mathfrak{p})}$ ihre Ortsuniformisierende, ferner $\mathfrak{p}_\infty$ eine Spitze s von $\mathfrak{f}$, $q=e^{2\pi i\rho^{-1}\tau}$ ihre Ortsuniformisierende. $g(\tau)$ sei ein Element aus K_0,

$$g(\tau)=\sum_{\substack{\nu=n_0(\mathfrak{p})\\ \nu\neq 0}}^{\infty} a_\nu(\tau-\tau_0)^{e(\mathfrak{p})\nu}+a_0\,,$$

$$g(\tau)=\sum_{\substack{\mu=m_0\\ \mu\neq 0}}^{\infty} b_\mu q^{\mu}+b_0$$

resp. seine Laurent-Reihe nach $(\tau-\tau_0)^{e(\mathfrak{p})}$ bzw. q. Dann ist

$$\frac{dg(\tau)}{d\tau}=(\tau-\tau_0)^{n_0(\mathfrak{p})e(\mathfrak{p})-1}P(\tau)\,,$$

$$\frac{dg(\tau)}{d\tau}=q^{m_0}Q(q)\,,$$

wo $P(\tau)$, $Q(q)$ resp. eine Potenzreihe von $(\tau-\tau_0)^{e(\mathfrak{p})}$ bzw. q ohne negative Potenzen bedeutet. Daraus folgt, daß $f(\tau)\Big(\frac{dg(\tau)}{d\tau}\Big)^{\kappa}$ mit $f(\tau)$ aus K_0 dann und nur dann Spitzenform ist, wenn $f(\tau)$ ein Multiplum des Divisors $\prod\mathfrak{p}^{-\left[\frac{(n_0(\mathfrak{p})e(\mathfrak{p})-1)\kappa}{e(\mathfrak{p})}\right]}\times\prod\mathfrak{p}_\infty^{-m_0\kappa+1}$ ist, also $f(\tau)(dg(\tau))^{\kappa}$ ein Multiplum von

$$\mathfrak{d}^{-1}=\prod\mathfrak{p}^{(n_0(\mathfrak{p})-1)\kappa-\left[\frac{(n_0(\mathfrak{p})e(\mathfrak{p})-1)\kappa}{e(\mathfrak{p})}\right]}\prod\mathfrak{p}_\infty^{1-\kappa}$$

ist. Hierbei durchläuft $\mathfrak{p}$ die Ecken von $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}_\infty$ die Spitzen von $\mathfrak{f}$.

Nun unterscheiden wir die beiden Fälle: $\Phi=M_2(\boldsymbol{Q})$ oder $\Phi=$ eine Divisionsalgebra. Erstens sei $\Phi=M_2(\boldsymbol{Q})$. In diesem Falle ist $\mathfrak{K}(\mathfrak{o})=\boldsymbol{C}(j(\tau))$, $K_0=\boldsymbol{Q}(j(\tau))$, wo $j(\tau)$ die absolute Invariante der homogenen Modulgruppe $\Gamma(1)$ bezeichnet. Auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{f}$ von $\boldsymbol{C}(j(\tau))$ existieren nur zwei elliptische Ecken. Eine davon ist durch das Primideal $(j(\tau))$ in $\boldsymbol{C}[j(\tau)]$ definiert, die andere durch das Primideal $(j(\tau)-1)$ in $\boldsymbol{C}[j(\tau)]$. Die einzige Spitze auf $\mathfrak{f}$ ist durch das Primideal $\left(\frac{1}{j(\tau)}\right)$ in $\boldsymbol{C}\left[\frac{1}{j(\tau)}\right]$ definiert. Also liefert jede elliptische Ecke oder die Spitze resp. einen Primdivisor von $\boldsymbol{Q}(j(\tau))$, daher kann $\mathfrak{d}$ als ein Divisor von $\boldsymbol{Q}(j(\tau))$ angesehen werden. Daraus ergibt sich nach einer ähnlichen Schlußweise wie im Falle $N \geqq 2$, daß die Heckeschen Operatoren $T(n; \mathfrak{o})$ mit n, sodaß $(n, N)=1$, rational darstellbar sind.

Bemerkung. Unsere Behauptung bei $N=1$ im Falle $\Phi = M_2(\boldsymbol{Q})$ wird sich auch unter Berücksichtigung der Fourierentwicklungen der Spitzenformen der Stufe 1 einfach ergeben, nämlich so: Es seien

$$G_k(\tau) = \sum_{m_1, m_2}' (m_1\tau + m_2)^{-k}$$

für $k=4, 6, \cdots$, und ferner

$$g_2 = 60G_4, \quad g_3 = 140G_6, \quad \Delta = \frac{1}{(2\pi)^{12}}(g_2^3 - 27g_3^2).$$

Jede ganze Modulform von der Art $(-k, 1)$ läßt sich auf eine und nur eine Weise als Summe

$$\sum x_n (2\pi)^{12-k} \Delta^n G_{k-12} \quad \left(0 \leqq n \leqq \frac{k}{12},\ k-12n \neq 2\right)$$

mit konstanten x_n darstellen; hierbei ist $G_0 = 1$ zu setzen. Es gibt also eine Basis $\{F^\rho\}$ der ganzen Spitzenformen der Art $(-k, 1)$, deren Fourierentwicklungskoeffizienten rational sind.

Nun ist für irgendeine Modulform $F(\tau) = \sum_{N=0}^{\infty} a(N) e^{2\pi i N\tau}$ der Art $(-k, 1)$

$$F(\tau) \mid T_n = \sum_{N=0}^{\infty} b_n(N) e^{2\pi i N\tau}$$

mit $b_n(N) = \sum_{d \mid n, N} a\left(\frac{Nn}{d^2}\right) d^{k-1} \binom{n = 1, 2, \cdots\cdots}{N = 0, 1, 2, \cdots}$. Daher ergibt sich, daß die durch $\{F^\rho\}$ gegebene Darstellung von T_n rational ist.

§6. Im Falle $\Phi =$ eine Divisionsalgebra ist es mir nicht gelungen, zu entscheiden, ob die elliptischen Ecken in K_0 Primdivisoren liefern oder nicht. Hier geben wir einen direkten Beweis bei beliebiger indefiniten Quaternionenalgebra und $N=1$, der von der bisherigen Schlußweise unabhängig ist.

Nach dem Satz 3 in [**6**] werden die Heckeschen Operatoren $T(n; \mathfrak{a})$ mit n, sodaß $(n, d(\Phi)N)=1$, bei einem zu $d(\Phi)$ teilerfremden zweiseitigen Ideal $\mathfrak{a} = N\mathfrak{o}$ als ein Endmorphismus einer abelschen Mannigfaltigkeit A angesehen, die man aus $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_{\mathfrak{a}})$ durch Klasseneinteilung nach einem gewissen Gitter $\mathfrak{D}_{2\kappa}(\Gamma_{\mathfrak{a}})$ von $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_{\mathfrak{a}})$ als einen komplexen Torus bekommt und für die $c(f, g)$ mit einer geeigneten positiven ganzen Zahle c eine Riemannsche Form ist. Hierbei ist (f, g) das Peterssonsche innere Produkt von f, g aus $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_{\mathfrak{a}})$. $T(n; \mathfrak{a})$ erzeugen eine kommutative halbeinfache Algebra $\mathfrak{M}$ über $\boldsymbol{Q}$.

Im Falle $N=1$, d.h. $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$ ist $T(n;\mathfrak{o})$ konjugiert zu sich in bezug auf die Peterssonsche Metrik (f,g). Also läßt die durch $c(f,g)$ definierte Involution der Algebra $\mathrm{End}_{\boldsymbol{Q}}(A)$ der Endmorphismen von A über $\boldsymbol{Q}$ jedes Element von $\mathfrak{M}$ invariant, daher ist $\mathfrak{M}$ in diesem Falle eine direkte Summe endlich vieler total-reellen algebraischen Zahlkörper F_i. Es sei e_i die Eins in F_i. Dann ist F_i eine Teilalgebra von $\mathrm{End}_{\boldsymbol{Q}}(e_iA)$, Es sei R^{2n_i}/D_i die analytische Darstellung von e_iA, angesehen als komplexer Torus. Ist $\lambda\to S(\lambda)$ die Darstellung von $\mathrm{End}_{\boldsymbol{Q}}(e_iA)$ in bezug auf das analytische Koordinatensystem, dann ist $\lambda\to S(\lambda)+\overline{S(\lambda)}$ (direkte Summe), wo $\overline{S(\lambda)}$ das komplexe konjugierte von $S(\lambda)$ bezeichnet, äquivalent mit der Darstellung von $\mathrm{End}_{\boldsymbol{Q}}(e_iA)$ in bezug auf eine Basis von D_i. Die letztere ist bekanntlich äquivalent mit einer rationalen. Da F_i total-reell ist, ergibt sich, daß die Darstellung $\lambda\to S(\lambda)$ von F_i, daher die Darstellung von $\mathfrak{M}$ in bezug auf das analytische Koordinatensystem von $A\cong\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma_0)/\mathfrak{D}_{2\kappa}(\Gamma_0)$, d.h. in bezug auf eine Basis von Spitzenformen der Dimension -2κ äquivalent mit einer rationalen ist.

Musashi Institute of Technology

Literatur

[1] H. Hecke, Über die Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung, I, II, Math. Ann., **114** (1937), 1–28, 316–351.

[2] M. Eichler, Modular correspondences and their representations, J. Indian Math. Soc., **20** (1956), 163–206.

[3] M. Eichler, Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integral, Math. Z., **67** (1957), 267–278.

[4] H. Petersson, Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung, I, II, III, Math. Ann., **116** (1939), 401–412; **117** (1940), 39–64, 277–300.

[5] G. Shimura, On the Zeta-functions of the algebraic curves uniformized by certain automorphic functions, J. Math. Soc. Japan, **13** (1961), 275–331.

[6] G. Shimura, Sur les intégrales attachées aux formes automorphes, J. Math. Soc. Japan, **11** (1959), 291–311.

[7] G. Shimura, On the theory of automorphic functions, Ann. Math., **70** (1959), 101–144.