Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 11, No. 3, July, 1959

Note sur le traitement par les opérateurs d'intégrale singulière du problème de Cauchy.

Par Sigeru MIZOHATA

(Reçu le 13 avril, 1959)

1. Pour le problème de Cauchy, l'outil d'opérateur d'intégrale singulière donne des résultats précis. Cette utilité est déjà manifeste dans le travail de M. A. P. Calderón [**1**]. Mais, quand on suit le raisonnement de ce travail, il faut exclure les cas $n=2$ et $n=3$ (où n est la dimension de l'espace) à cause d'une difficulté topologique. La même difficulté arrive pour le traitement du problème de Cauchy pour les systèmes hyperboliques, comme l'auteur a indiqué dans [**2**].

Le but de cet article est de montrer qu'on peut éviter ces difficultés, en utilisant une sorte de partition de l'unité dans l'espace R_ξ^n, ce qui nous épargne des considérations topologiques. Grâce à ce principe, nous pourrions étendre notre méthode indiquée dans [**2**] aux systèmes hyperboliques plus généraux, mais pour éclaircir notre principe, nous nous limitons ici aux cas où les racines des équations caractéristiques sont *distinctes*.

2. Nous voulons compléter le résultat dans [**2**]. Dans le cas $n=2$, notre méthode n'a pas marché. Pour notre but, il suffirait de traiter ce cas. Mais, pour éclaircir notre méthode—car notre méthode n'est pas limitée au cas $n=2$—nous allons traiter le problème dans le cas où $n \geqq 2$. Nous suivons les notations et les définitions de [**2**], et écrivons des numéros des formules dans [**2**] par "$'$". Partons de

$$\frac{d}{dt}u(t) = i\mathcal{H}(t)\Lambda u(t) + \mathcal{B}(t)u(t) + f(t)\,. \tag{1.9$'$}$$

Comme nous avons indiqué, il n'est pas toujours possible de construire une matrice d'opérateur singulière $\mathcal{N}(t)$ telle que

$$\sigma(\mathcal{N}(t))\sigma(\mathcal{H}(t)) = \sigma(\mathcal{D}(t))\sigma(\mathcal{N}(t))\,.$$

Pour éviter cette construction, nous utilisons une partition de l'unité: Désignons par ξ^0 les points sur la sphère-unitè dans R_ξ^n: $|\xi|=1$. Soient $\hat{\alpha}_i(\xi^0)$ $(i=1,2,\cdots,p)$ la partition de l'unité au sens suivant: $\sum_{i=1}^{p}\hat{\alpha}_i(\xi_0)^2 \equiv 1$. Les $\hat{\alpha}_i(\xi^0)$ sont des fonctions indéfiniment différentiables en ξ^0 à supports assez petits. On suppose bien entendu l'application $\xi \to \xi^0$ indéfiniment différentiable. On prolonge ces fonctions $\hat{\alpha}_i(\xi^0)$ dans l'espace entier par homothétie de degré 0: $\hat{\alpha}_i(\xi)=\hat{\alpha}_i\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$. Ensuite, prenons $\beta(\xi)$ telle que

$$\beta(\xi)=\begin{cases}1 \text{ pour } |\xi|\geqq 2\\ 0 \text{ pour } |\xi|\leqq 1,\end{cases}$$

$1\geqq\beta(\xi)>0$ pour $1<|\xi|\leqq 2$, indéfiniment différentiable.

Définissons

$$\hat{\alpha}_0(\xi)=(1-\beta(\xi)^2)^{\frac{1}{2}},\ \hat{\alpha}_i{}'(\xi)=\beta(\xi)\hat{\alpha}_i(\xi)\text{, on aura alors}$$
$$\hat{\alpha}_0(\xi)^2+\hat{\alpha}_i{}'(\xi)^2=1. \tag{2.1}$$

En écrivant $\hat{\alpha}_i(\xi)$ au lieu de $\hat{\alpha}_i{}'(\xi)$, on a

$$\sum_{i=0}^{p}\hat{\alpha}_i(\xi)^2\equiv 1. \tag{2.2}$$

Définition. *Soit α la distribution telle que $\hat{\alpha}(\xi)\xrightarrow[\mathcal{F}]{}\alpha$ c'est-à-dire l'image (de Fourier) réciproque de $\hat{\alpha}(\xi)$. On désigne par αf*

$$\alpha f=\alpha*f.$$

Enonçons un

Lemme 2.1. *Soit H un opérateur d'intégrale singulière tel que $\sigma(H)\in C_\beta^\infty$, avec $\beta=+\infty$; $\hat{\alpha}(\xi)$ une fonction bornée indéfiniment différentiable telle que*

1°) $$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{\alpha}(\xi)\right|\leqq\frac{C_\nu}{|\xi|}\quad\textit{pour } |\xi|\geqq 1 \textit{ et pour } |\nu|\geqq 1;$$

2°) *Pour tout $k>0$, il existe un entier m_0 tel que*

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu\hat{\alpha}(\xi)\right|\leqq\frac{C_\nu'}{|\xi|^k}\quad\textit{pour } |\xi|\geqq 1 \textit{ et pour } |\nu|\geqq m_0.$$

Alors $(\alpha H-H\alpha)\Lambda$ est un opérateur borné de $\mathcal{D}_{L^2}^s$ dans lui-même, s étant un entier quelconque (positif, 0, ou négatif).

Démonstration. Limitons-nous à démontrer dans le cas L^2, car notre démonstration qui suivra est presque analogue à celle du lemme 2.4 de [**2**]. Prenons d'abord le cas simple: $\sigma(H)=c(x)Y$, où Y est l'un des Y_{nm} (voir pour cette notation, la démonstration du lemme 2.4 de [**2**]).

Alors

$$(\alpha H-H\alpha)\Lambda f=(\alpha c(x)Y-c(x)Y\alpha)\Lambda f=(\alpha c(x)-c(x)\alpha)\Lambda Yf.$$

Posons $Yf=g$, alors cette expression s'écrit

$$\int\alpha(x-y)[c(y)-c(x)](\Lambda g)(y)dy=\sum_{1\leqq|\nu|\leqq m-1}\frac{D^\nu c(x)}{\nu!}\int\alpha(x-y)(y-x)^\nu(\Lambda g)(y)dy$$
$$+\sum\frac{1}{\nu!}\int c_\nu(y,x)(y-x)^\nu\alpha(x-y)(\Lambda g)(y)dy.$$

Prenons

$$\varphi_\nu=\int\alpha(x-y)(y-x)^\nu(\Lambda g)(y)dy\underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow}\Big(-\frac{1}{2\pi i}\Big)^{|\nu|}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^\nu\hat{\alpha}(\xi)\Big]|\xi|\hat{g}(\xi).$$

Or, d'après la condition 1°), $\left|\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^\nu\hat{\alpha}(\xi)\right||\xi|\leqq C_\nu$ d'où

$$\|\varphi_\nu\|\leqq C_\nu\|g\|.$$

Deuxièmement,

$$\psi_\nu(x)=\int c_\nu(y,x)(y-x)^\nu\alpha(x-y)(\Lambda g)(y)dy.$$

Or $\Lambda+i=(1-\Delta)(\Lambda-i)^{-1}=(1-\Delta)B$ où B est un opérateur borné.

$$\psi_\nu(x)=\int c_\nu(y,x)(y-x)^\nu\alpha(x-y)(1-\Delta_y)Bg(y)dy$$

$$-i\int c_\nu(y,x)(y-x)^\nu\alpha(x-y)g(y)dy.$$

Prenons le deuxième terme

$$|\psi_\nu{}^1(x)|\leqq\sup_{x,y}|c_\nu(y,x)|\int|(x-y)^\nu\alpha(x-y)||g(y)|dy.$$

On voit que

$$\int|x^\nu\alpha(x)|dx<+\infty.$$

En effet,

$$x^\nu\alpha(x)\to\Big(-\frac{1}{2\pi i}\Big)^{|\nu|}\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^\nu\hat{\alpha}(\xi).$$

Cette image est sommable si l'on prend $k\geqq n+1$ dans la condition 2°), d'où $x^\nu\alpha(x)$ est une fonction continue et bornée. Deuxièmement, pour $|x|\geqq 1$,

$$x^\nu\alpha(x)=\frac{1}{|x|^{2p}}|x|^{2p}x^\nu\alpha(x),\ \text{et}\ |x|^{2p}x^\nu\alpha(x)\to\Big(-\frac{1}{2\pi i}\Big)^{2p+|\nu|}\Delta_\xi^p\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)^\nu\hat{\alpha}(\xi).$$

Cette image est évidemment sommable, d'où $|x|^{2p}x^\nu\alpha(x)$ est bornée. Donc

$$\int|x^\nu\alpha(x)|dx<+\infty.$$

Le premier terme se traite de la même manière, en effet, il s'écrit

$$\int(1-\Delta_y)[c_\nu(y,x)(y-x)^\nu\alpha(x-y)]Bg(y)dy.$$

Compte tenu de la démonstration du lemme 2.4 dans [2], la démonstration s'achèvera. c. q. f. d.

Il est facile de voir que les $\hat{\alpha}_i(\xi)$ $(i=1,2,\cdots,p)$ vérifient les conditions du Lemme, d'où

COROLLAIRE. *$(H\alpha_i - \alpha_i H)\Lambda$ est un opérateur borné de $\mathcal{D}^{s}_{L^2}$ dans lui-même.*

Examinons maintenant le procédé de la construction de $\sigma(\mathcal{N}(t))$ dans l'appendice de [2]. Supposons $n \geqq 2$. On sait que, en posant $\lambda = \lambda_1$, et en notant le (i, j)-cofacteur de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} \cdots\cdots & a_{N1} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \\ \vdots & & \\ a_{1N} & \cdots\cdots\cdots & a_{NN}-\lambda \end{pmatrix}$$

par $M_{ij}(x, t, \xi)$ le fait suivant: Pour tout ξ^0, $|\xi^0| = 1$, $\max_{i,j}(|M_{ij}(x, t, \xi^0)|)$ n'est jamais nul. De plus, lorsque x parcourt R^n, t parcourt $[0, T]$, et ξ^0 parcourt la sphère-unité, cette fonction a pour borne inférieure une constante positive. Cela entraîne le fait suivant: pour tout ξ^0, il existe un voisinage V de ξ^0 sur la sphère tel que pour (x, t) fixé la variation d'angle de l'eigen-vecteur $e_1(x, t, \xi)$ soit inférieure à π lorsque ξ parcourt V. Par Heine-Borel, on recouvre la sphère par tels voisinages, $V_1, V_2, \cdots, V_q$. Ici, les V_i non seulement jouissent de la propriété ci-dessus mais aussi chacun des V_i a un voisinage $V_i'(\supset V_i)$ jouissant de la même propriété. On prend alors une partition de l'unité $\hat{\alpha}_i(\xi)$ sur la sphère, définie plus haut, subordonnée à $\{V_i\}$. Ensuite, par la modification explicitée plus haut, on a une partition de l'unité dans R^n_ξ: $\sum_{i=0}^{q} \hat{\alpha}_i(\xi)^2 \equiv 1$.

Ceci fait, on va modifier le symbole $\sigma(\mathcal{H})$ correspondant à chaque indice i. Soit $\varphi_i(\xi)$ une application indéfiniment différentiable de la sphère-unité dans V_i', laissant invariant tous les points de V_i. On définit $\mathcal{H}_i(t)$ par

$$\sigma\mathcal{H}_i(x, t, \xi) = \sigma\mathcal{H}(x, t, \varphi_i(\xi)) . \tag{2.3}$$

On remarque alors

$$\mathcal{H}\alpha_i u(x, t) = \mathcal{H}_i \alpha_i u(x, t) . \tag{2.4}$$

En effet, soit K un opérateur d'intégrale singulière, on a alors en désignant par $k(x, \xi)$ le symbole de K,

$$(K\alpha_i u)(x) = \int \exp(2\pi i x\xi) k(x, \xi) \hat{\alpha}_i(\xi) u(\xi) d\xi .$$

Cette formule montre que l'image $K\alpha_i u$ ne dépend que de la valeur de $k(x, \xi)$ sur V_i, c'est-à-dire que quand on change la valeur de $k(x, \xi)$ sur $\complement V_i$ ce symbole définit le même opérateur.

Ceci remarqué, nous avons pour tout i $(i = 1, 2, \cdots, q)$ une $\sigma(\mathcal{N}_i(t))$, une matrice d'opérateur d'intégrale singulière du type $C_\beta^{\frown}$, avec $\beta = +\infty$, telle que

$$\sigma(\mathcal{N}_i(t))\sigma(\mathcal{H}_i(t)) = \sigma(\mathcal{D}_i(t))\sigma(\mathcal{N}_i(t)) . \tag{2.5}$$

On considère alors

$$B_m(t)=\sum_{i=0}^{q}\alpha_i\Lambda^m\mathcal{N}_i^*\mathcal{N}_i\Lambda^m\alpha_i+\beta_m I\,. \tag{2.6}$$

Il est manifeste que cet opérateur hermitien définit une norme équivalente dans $\mathcal{D}_{L^2}^m$ si β_m est assez grand.[1] Il ne reste qu'à examiner $B_mA+A^*B_m$.

$$\begin{aligned}B_mA&=\sum_{i=0}^{q}\alpha_i\Lambda^m\mathcal{N}_i^*\mathcal{N}_i\Lambda^m\alpha_iA+\beta_mA\\&=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\Lambda^m\mathcal{N}_i^*\mathcal{N}_i\Lambda^m\alpha_i(i\mathcal{H}\Lambda)+B_m\mathcal{B}+\beta_mA+\alpha_0\Lambda^m\mathcal{N}_0^*\mathcal{N}_0\Lambda^m\alpha_0(i\mathcal{H}\Lambda)\end{aligned}$$

on utilise la notation (Λ^{2m}) dans [**2**], de là

$$\equiv\sum_{i=1}^{q}i\alpha_i\Lambda^m\mathcal{N}_i^*\mathcal{N}_i\Lambda^m\mathcal{H}\alpha_i\Lambda+\sum_{i=1}^{q}i\alpha_i\Lambda^m\mathcal{N}_i^*\mathcal{N}_i\Lambda^m(\alpha_i\mathcal{H}-\mathcal{H}\alpha_i)\Lambda$$

La seconde somme $\equiv 0$ (Λ^{2m}), d'après le lemme 2.1, d'où

$$\begin{aligned}&\equiv\sum i\alpha_i\Lambda^m\mathcal{N}_i^*\mathcal{N}_i\Lambda^m\mathcal{H}\alpha_i\Lambda,\qquad \text{comme } \mathcal{H}\alpha_i=\mathcal{H}_i\alpha_i\\&=\sum i\alpha_i\Lambda^m\mathcal{N}_i^*\mathcal{N}_i\Lambda^m\mathcal{H}_i\alpha_i\Lambda\equiv\sum i\alpha_i\Lambda^m\mathcal{N}_i^*\mathcal{N}_i\mathcal{H}_i\Lambda^m\alpha_i\Lambda\end{aligned}$$

compte tenu de ce que $\mathcal{N}_i\mathcal{H}_i\Lambda\equiv\mathcal{D}_i\mathcal{N}_i\Lambda$ (Λ^0),

$$\equiv\sum i\alpha_i\Lambda^m\mathcal{N}_i^*\mathcal{D}_i\mathcal{N}_i\Lambda^m\alpha_i\Lambda\,.$$

De là

$$\begin{aligned}B_mA+A^*B_m&\equiv\sum_{i=1}^{q}i\alpha_i\Lambda^m(\mathcal{N}_i^*\mathcal{D}_i\mathcal{N}_i\Lambda-\Lambda\mathcal{N}_i^*\mathcal{D}_i^*\mathcal{N}_i)\Lambda^m\alpha_i\\&\equiv\sum_{i=1}^{q}i\alpha_i\Lambda^m\mathcal{N}_i^*(\mathcal{D}_i-\mathcal{D}_i^*)\Lambda\mathcal{N}_i\Lambda^m\alpha_i\,.\end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$-\gamma_m(\Lambda+1)^{2m}\leqq B_mA+A^*B_m\leqq\gamma_m(\Lambda+1)^{2m}\,.$$

3. On va montrer dans ce numéro que le résultat de Calderón dans [**1**] sur l'unicité est vrai indépendamment de la dimension de l'espace. Mais ici on suppose tous les coefficients d'ordre homogène du plus haut degré indéfiniment différentiables, pour simplifier notre raisonnement. Le raisonnement devient plus simple que dans le numéro précédent.

D'abord remarquons que (x,t) ne parcourt qu'un voisinage de (0,0). Pour tout point ξ_0 sur la sphère, il existe un voisinage V' de ξ_0 et un voisinage W' de (0,0) tels que $\operatorname*{Max}_{i,j}(|M_{ij}(x,t,\xi)|)$ reste supérieur à une constante positive quand ξ, (x,t) parcourent V' et W' respectivement. Cela entraîne qu'il existe un voisinage V de ξ_0 et W de (0,0) tels que l'un des $\min_{\substack{(x,t)\in W\\ \xi\in V}}|M_{ij}(x,t,\xi)|$

1) On pose $\mathcal{N}_0=I$ (identité). On a alors,

$$\sum_{i=0}^{q}\|\mathcal{N}_i\Lambda^m\alpha_iu\|^2\geqq\sigma\sum_{i=0}^{p}\|\Lambda^m\alpha_iu\|^2-\gamma\sum_{i=0}^{p}\|\alpha_iu\|^2=\sigma\sum_{i=0}^{p}\|\alpha_i\Lambda^mu\|^2-\gamma\sum_{i=0}^{p}\|\alpha\cdot u\|^2$$

Or on a $\sum_{i=0}^{p}\|\alpha_iu\|^2=\|u\|^2$ (voir la fin du numéro suivant).

soit positif. Ceci signifie qu'on peut définir par l'une des expressions $(M_{1j}, M_{2j}, \cdots, M_{Nj})$ $(j=1,2,\cdots,N)$, un champ (indéfiniment différentiable en x, t, ξ) d'eigen-vecteurs sur $(x,t)\times\xi\in W\times V$. Par Heine-Borel, on recouvre la sphère-unité dans R_ξ^n par un nombre fini de V_i (couplé par W_i) $(i=1,\cdots,p)$. On ne considère que le voisinage $W=\bigcap_{i=1}^{p} W_i$.

Par le procédé fait dans le numéro précédent, on définit $\sigma\mathcal{H}_i(x,t,\xi)$ et $\sigma\mathcal{N}_i(x,t,\xi)$ $(i=1,\cdots,p)$. Soit $u(t)$ une solution s'annulant en $t=0$ de

$$\frac{d}{dt}u(t)=(i\mathcal{H}\Lambda+\mathcal{B})u(t)\,. \tag{3.1}$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\alpha_i u=i\mathcal{H}\alpha_i\Lambda u+\alpha_i\mathcal{B}u+i(\alpha_i\mathcal{H}-\mathcal{H}\alpha_i)\Lambda u$$

comme $\mathcal{H}\alpha_i=\mathcal{H}_i\alpha_i$ on a

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{N}_i\alpha_i u)=i\mathcal{N}_i\mathcal{H}_i\Lambda\alpha_i u+\mathcal{B}_1^{(i)}u\,,$$

où $\mathcal{B}_1^{(i)}$ est un opérateur borné de L^2 dans lui-même en vertu du lemme 2.1. Compte tenu de $\mathcal{N}_i\circ\mathcal{H}_i=\mathcal{D}_i\circ\mathcal{N}_i$, le second membre s'écrit

$$i\mathcal{D}_i\mathcal{N}_i\Lambda\alpha_i u+i(\mathcal{N}_i\mathcal{H}_i-\mathcal{D}_i\mathcal{N}_i)\Lambda\alpha_i u+\mathcal{B}_1^{(i)}u=i\mathcal{D}_i\Lambda(\mathcal{N}_i\alpha_i u)+\mathcal{B}^{(i)}u\,,$$

$\mathcal{B}^{(i)}$ est un opérateur borné.

D'où, en posant

$$\mathcal{N}_i\alpha_i u=v_i \tag{3.2}$$

on a

$$\left(\frac{d}{dt}-i\mathcal{D}_i\Lambda\right)v_i=\mathcal{B}^{(i)}u \qquad (i=1,\cdots,p)\,. \tag{3.3}$$

En posant

$$\alpha_0 u=v_0 \tag{3.2$'$}$$

on a

$$\frac{d}{dt}v_0=(i\alpha_0\mathcal{H}\Lambda+\alpha_0\mathcal{B})u=\mathcal{B}^{(0)}u\,, \tag{3.3$'$}$$

où $\mathcal{B}^{(0)}$ est un opérateur borné, car $\alpha_0\mathcal{H}\Lambda=\alpha_0\Lambda\mathcal{H}+\alpha_0(\mathcal{H}\Lambda-\Lambda\mathcal{H})$ et $\alpha_0\Lambda$ est borné.

Supposons que $v_i(t)$ ne s'annule identiquement dans aucun voisinage de $t=0$, on a alors, en prenant, s'il est nécessaire, une suite partielle des φ_n,

$$\int_0^h\varphi_n^2\left\|\left(\frac{d}{dt}-i\mathcal{D}_i\Lambda\right)v_i\right\|^2dt\geqq\frac{1}{2n}\int_0^h\varphi_n'^2\,\|v_i\|^2dt\,, \tag{3.4}$$

si n est assez grand. Voici la raison: Si quelques uns des composants de v_i s'annulent identiquement dans un voisinage de $t=0$, on prend h plus petit de sorte que chacun des composants ou bien s'annule identiquement dans $[0, h]$ ou bien ne s'annule identiquement dans aucun voisinage de $t=0$. Or, l'auteur l'a montré dans [3], (l'inégalité (C)), dans le cas où v_i est à seul composant et $\left(\frac{d}{dt}-i\mathcal{D}_i\Lambda\right)$ est un opérateur elliptique, à savoir, le cas où $\mathcal{D}_i=P+iQ$, P est inversible. Dans le cas où $P\equiv 0$ cette inégalité est manifestement vraie. Remarquons que (3.4) est vraie dans le cas où $v_i(t)$ s'annule identiquement.

Comme notre considération est de caractère local, $\mathcal{N}_i(t)$ est inversible, d'où

$$\|\mathcal{N}_i w\|^2 \geqq \sigma \| w \|^2, \qquad \sigma>0 \qquad (i=1,\cdots,p). \tag{3.5}$$

De (3.4), il vient donc

$$\int_0^h \varphi_n{}^2 \left\| \left(\frac{d}{dt}-i\mathcal{D}_i\Lambda\right)v_i \right\|^2 dt \geqq \frac{\sigma}{2n}\int_0^h \varphi_n'^2 \| \alpha_i u \|^2 dt \qquad (i=1,2,\cdots,p). \tag{3.6}$$

Evidemment on a

$$\int_0^h \varphi_n{}^2 \left\| \frac{d}{dt} v_0 \right\|^2 dt \geqq \frac{1}{2n}\int_0^h \varphi_n'^2 \| \alpha_0 u \| dt. \tag{3.7}$$

En ajoutant (3.6) et (3.7) on a

$$\sum_{i=0}^p \int_0^h \varphi_n{}^2 \left\| \left(\frac{d}{dt}-i\mathcal{D}_i\Lambda\right)v_i \right\|^2 dt \geqq \frac{\sigma}{2n}\int_0^h \varphi_n'^2 \left(\sum_{i=0}^p \| \alpha_i u \|^2\right) dt, \tag{3.8}$$

on suppose $\sigma\leqq 1$. Or, par hypothèse, $\sum_{i=0}^p \hat{\alpha}_i(\xi)^2\equiv 1$, d'où $\sum_{i=0}^p \| \alpha_i u \|^2 = \| u \|^2$. En effet, la transformation de Fourier donne

$$\int \sum_{i=0}^p |\hat{\alpha}_i(\xi)\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \| u \|^2.$$

D'où

$$\text{Le premier membre de (3.8)} \geqq \frac{\sigma n}{2}\int_0^h \varphi_n{}^2 \| u \|^2 dt. \tag{3.9}$$

D'autre part,

$$\sum_{i=0}^p \int_0^h \varphi_n{}^2 \| \mathcal{B}^{(i)} u \|^2 dt \leqq C \int_0^h \varphi_n{}^2 \| u \|^2 dt,$$

ce qui est absurde.

Bibliographie

[1] A. P. Calderón, Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equa tions, Amer. J. Math., **53** (1958), 16-36.

[2] S. Mizohata, Systèmes hyperboliques, J. Math. Soc. Japan, **11** (1959) 205-233.

[3] S. Mizohata, Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre, Proc. Japan Acad., **34** (1958), 687-692.

[4] I. G. Petrowsky, Quelques remarques sur mes travaux relatifs au problème de Cauchy (en russe). Math. Sbornik **39** (1956), 267-272.