

**Généralisation, aux fonctions de plusieurs variables, des
théorèmes de Alexander Ostrowski et de Masuo
Hukuhara concernant les fonctions
convexes (J).**

Par Solomon MARCUS

(Reçu le 19, août, 1958)

1. Une fonction réelle, finie, f , définie sur un intervalle (a, b) de la droite, est dite *convexe* sur (a, b) si pour $x \in (a, b)$, $y \in (a, b)$ on a

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

pour chaque couple de nombres réels positifs α et β , satisfaisant la relation $\alpha + \beta = 1$. Comme extensions naturelles de la notion de convexité pour les fonctions de deux variables on a étudié la notion de *fonction sousesharmonique* et celle de *fonction doublement convexe*. Pour les propriétés de ces fonctions voir, par exemple, les travaux de Paul Montel et de Miron Nicolesco ([10], [11]).

Une fonction réelle, finie, f , définie sur un intervalle (a, b) de la droite est dite *convexe au sens de Jensen* ou tout simplement *convexe (J)* sur (a, b) , si pour $x \in (a, b)$, $y \in (a, b)$ on a

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \quad (1)$$

Tandis qu'une fonction convexe est toujours continue, une fonction convexe (J) peut être partout discontinue. Un problème du premier ordre, pour la convexité au sens de Jensen, c'est justement de trouver les conditions les plus modestes qui assurent que la fonction soit continue ou bornée. Une fonction convexe (J) qui est continue est, par ce fait même, convexe.

Mais la théorie des fonctions convexes (J), contrairement à celle des fonctions convexes, n'a été que partiellement transposée pour les fonctions de plusieurs variables réelles. Certaines propriétés de structure de ces fonctions, propriétés qui correspondent à certains faits établis, pour les fonctions d'une variable, par Felix Bernstein et Gustav Doetsch [1], ont été données par Henry Blumberg [2] et Ernst Mohr [9]. Dans ce qui suit nous allons donner l'analogie, pour les fonctions de plusieurs variables, des théorèmes suivants dûs, le premier, à Alexander Ostrowski [12] et le deuxième à Masuo Hukuhara [3]:

Si E est un ensemble de mesure positive, contenu dans (a, b) , et si f est convexe (J) sur (a, b) et supérieurement bornée sur E , alors f est continue sur (a, b) .

Si E est un ensemble de mesure positive, contenu dans (a, b) , et si f est convexe (J) sur (a, b) et inférieurement bornée sur E , alors f est inférieurement bornée sur (a, b) .

En outre, le théorème 2 du présent travail apporte une amélioration effective au théorème de Alexander Ostrowski, même dans le cas des fonctions convexes (J) d'une seule variable.

2. Soit D un domaine convexe situé dans R^n . Soit f une fonction réelle, finie, définie sur D . On dit que f est convexe (J) sur R^n si pour chaque paire de points $x \in D, y \in D$ la condition (1) est remplie (l'addition $x+y$ étant comprise dans le sens vectoriel).

M et N étant deux ensembles de R^n et α et β étant deux nombres réels, désignons par $\alpha M + \beta N$ l'ensemble des points de la forme $\alpha x + \beta y$, où $x \in M, y \in N$.

Pour obtenir l'analogie du théorème de Alexander Ostrowski nous allons utiliser les théorèmes suivants de Ernst Mohr [9] et J. H. B. Kemperman [4]:

THÉORÈME A. *Si f est finie et convexe (J) sur $D \subset R^n$ et s'il existe un point de D où f est supérieurement bornée, alors f est continue dans D .*

THÉORÈME B. *Si M et N sont deux ensembles de mesure positive, situés dans R^n , et si par M_1 (resp. N_1) on désigne l'ensemble des points de densité de M (resp. N), alors les ensembles $M_1 + N_1$ et $M_1 - N_1$ sont ouverts.*

THÉORÈME 1. *Soient: un domaine convexe $D \subset R^n$ et une fonction réelle, finie, f définie et convexe (J) sur D . Soit E un ensemble contenu dans D et de mesure n -dimensionnelle positive. Supposons que f est supérieurement bornée sur E . Alors f est continue dans D .*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème B de J. H. B. Kemperman, l'ensemble $E+E$ contient un point intérieur. L'ensemble $F = (1/2)(E+E)$ est contenu dans D et a aussi l'intérieur non vide. Il existe, par hypothèse, un nombre k tel que $f(x) < k$ pour chaque $x \in E$. On déduit alors, pour $x \in E, y \in E$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} < \frac{k+k}{2} = k$$

donc f est supérieurement bornée sur F .

Soit maintenant un point z appartenant à l'intérieur de F . Il existe un voisinage de z où f est supérieurement bornée. En vertu du théorème A de Ernst Mohr on déduit que f est continue dans D .

Le théorème 1 peut être énoncé sous une forme un peu plus générale, à savoir:

THÉORÈME 1'.¹⁾ Soient : une fonction réelle, finie, f définie et convexe (J) sur un domaine convexe $D \subset R^n$ et un ensemble E contenu dans D et de mesure n -dimensionnelle positive. Supposons qu'il existe une fonction réelle φ , définie, mesurable et presque partout finie sur E , telle que $f(x) < \varphi(x)$ pour chaque $x \in E$. Alors, f est continue dans D .

DÉMONSTRATION. En vertu du théorème de Lusin concernant les fonctions mesurables, il existe un ensemble compact H contenu dans E , de mesure n -dimensionnelle positive et telle que la restriction de φ à H soit continue. En vertu de la compacité de H , φ est bornée sur H . Il existe donc un nombre k tel que $\varphi(x) < k$ pour chaque $x \in H$. Mais on a, par hypothèse, $f(x) < \varphi(x)$ pour $x \in E \supset H$, donc $f(x) < k$ pour chaque $x \in H$. On arrive ainsi dans les hypothèses du théorème 1, donc f est continue dans D .

REMARQUE. Le théorème 1' généralise un résultat de Waclaw Sierpinski de [15]. On y considère seulement les fonctions convexes (J) qui satisfont l'équation de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Pour les fonctions d'une seule variable, le théorème 1' a été donné dans [8, p. 69].

3. Si A est une partie de R^n , nous désignons par $S(A)$ l'ensemble des points de la forme $(1/2)(x+y)$, où $x \in A$, $y \in A$. Posons $S^0(A) = A$, $S^1(A) = S(A)$ et $S^p(A) = S(S^{p-1}(A))$ pour chaque p entier > 1 .

THÉORÈME 2. Soient : une fonction réelle, finie, f définie et convexe (J) sur le domaine convexe $D \subset R^n$ et un ensemble $E \subset D$. Supposons qu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que l'intérieur de l'ensemble $S^p(E)$ soit non vide. Si f est supérieurement bornée sur E , alors f est continue dans D .

DÉMONSTRATION. Pour $p = 0$ le théorème 2 est contenu dans le théorème 1, donc on n'a rien à démontrer. Il faut envisager donc seulement le cas $p > 0$. Pour ne pas compliquer l'écriture, nous considérons le cas particulier $p = 2$.

Soient x_0 et ρ le centre et le rayon d'une sphère contenue dans $S^2(E)$. Il résulte que pour chaque point x appartenant à la sphère de centre x_0 et de rayon ρ on a

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{u+v}{2} + \frac{y+z}{2} \right)$$

où $u \in E$, $v \in E$, $y \in E$, $z \in E$. La sphère en question est contenue dans D . Posons

$$r = \frac{u+v}{2}, \quad t = \frac{y+z}{2}.$$

1) Par une autre voie que la nôtre, ce théorème a été obtenu aussi par M. Akos Császár. Sa démonstration n'a pas encore été publiée.

On a, par suite de la convexité (J) de f ,

$$f\left(\frac{r+t}{2}\right) \leq \frac{f(u)+f(v)+f(y)+f(z)}{4}.$$

En désignant par k la borne supérieure de f sur E , on a donc

$$f\left(\frac{r+t}{2}\right) \leq \frac{k+k+k+k}{4} = k.$$

Il en résulte ainsi

$$f(x) \leq k$$

pour chaque x appartenant à la sphère de centre x_0 et de rayon ρ donc la fonction f est supérieurement bornée au point x_0 . Cela entraîne, en vertu du théorème A de Ernst Mohr, la continuité de f dans D .

REMARQUE 1. Le théorème 1 est contenu dans le théorème 2. En effet, si E est de mesure positive, alors, en vertu du théorème B de J. H. B. Kemperman, l'intérieur de l'ensemble $S^2(E)$ n'est pas vide.

REMARQUE 2. Le théorème 2 apporte une amélioration effective au théorème 1. En effet, il existe, comme l'a montré Sophie Piccard ([13, p. 176]), un ensemble linéaire E tel que l'intérieur de $S(E)$ n'est pas vide tandis que la mesure intérieure de E est nulle.

REMARQUE 3. Dans le théorème 2, pour $n=1$, E peut être, en particulier, un ensemble parfait de première espèce ou un ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire. Voir, pour cela, [13, pp. 181 et 188].

REMARQUE 4. Svetozar Kurepa a démontré [6] que toute fonction convexe (J) d'une variable, bornée sur un ensemble E tel que la mesure intérieure de $E+E$ soit positive, est continue. Mais Sophie Piccard a démontré ([13, p. 187]) que pour chaque ensemble linéaire A , de mesure positive, l'intérieur de l'ensemble $S(A)$ n'est pas vide. Il s'ensuit que l'intérieur de l'ensemble $S^2(E)$ n'est pas vide. On constate ainsi que le résultat de Svetozar Kurepa est contenu dans le théorème 2 ci-dessus.

REMARQUE 5. D'après un résultat de H. Kestelman [5], toute fonction satisfaisant l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(x+y)=f(x)+f(y)$, qui est bornée sur l'ensemble triadique de Cantor ou, plus général, sur un ensemble parfait de première espèce, est continue. Mais Sophie Piccard a démontré ([13, p. 181]) que si E est un ensemble parfait de première espèce, alors $S(E)$ contient un point intérieur. Donc le théorème 2 apporte une amélioration sensible au résultat de H. Kestelman.

REMARQUE 6. Pour les fonctions convexes (J) d'une seule variable le théorème 2 a été donné dans [7].

4. THÉORÈME 3. Soient : D borné et convexe $\subset R^n$ et une fonction réelle,

finie, f définie et convexe (J) sur D . Supposons qu'il existe un ensemble E contenu dans D , de mesure n -dimensionnelle positive et tel que f soit inférieurement bornée sur E . Alors, f est inférieurement bornée dans D .

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer le théorème dans le cas $D \subset \mathbb{R}^2$.

D'après un théorème connu (voir, par exemple, [14]), presque tous les points de l'ensemble E en sont des points de densité linéaire dans les directions des x et y à la fois. Il existe donc un ensemble borelien $E_1 \subset E$ (le noyau mesurable de E) de mesure superficielle positive et tel que chaque droite horizontale ou verticale qui rencontre E_1 ait en commun avec E un ensemble de mesure linéaire positive. Mais E_1 étant borélien (à savoir du type F_σ) sa projection sur O_x ou sur O_y est un ensemble mesurable au sens de Lebesgue (cet ensemble est même borélien, du type F_σ). Il existe donc un ensemble mesurable G , formé de nombres réels, tel que la mesure linéaire de G soit positive et tel que pour chaque $\lambda \in G$ la droite $y = \lambda$ ait en commun avec E un ensemble de mesure linéaire positive. Sur une telle droite sont remplies les hypothèses du théorème de Masuo Hukuhara pour les fonctions convexes (J) d'une seule variable. Donc, pour chaque $\lambda \in G$, la fonction f est inférieurement bornée sur la droite $y = \lambda$, la borne pouvant être prise indépendante de λ , à savoir égale à la valeur de la borne inférieure de f sur E . Désignons cette borne par m .

Soit maintenant un point ξ de D et considérons la droite passant par ξ et parallèle à O_y . Pour chaque point x situé sur cette droite et dont l'ordonnée appartient à G , on a $f(x) > m$. Puisque G est de mesure linéaire positive, on peut appliquer, sur cette droite, de nouveau le théorème de Masuo Hukuhara et on déduit qu'on a, pour *chaque* point x de cette droite, $f(x) > m$, donc, en particulier, $f(\xi) > m$.

REMARQUE 1. En utilisant un raisonnement par récurrence, on peut transposer la démonstration du théorème 3 aux fonctions convexes (J) de n variables.

REMARQUE 2. Dans la démonstration du théorème 3 on n'a utilisé que la convexité (J) de f par rapport à x , pour chaque valeur de y et par rapport à y pour chaque valeur de x . Par analogie avec la notion correspondante concernant la convexité proprement dite [10], on peut dire d'une telle fonction qu'elle est *doublement convexe au sens de Jensen*. Ce sont ces fonctions qui font l'objet du théorème 3.

Institut de Mathématique
de la République Populaire Roumaine
Bucarest.

Références

- [1] F. Bernstein-G. Doetsch, Zur Theorie der Konvexen Funktionen, *Math. Ann.*, **76** (1915), 514-526.
 - [2] H. Blumberg, On convex functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1919), 40-44.
 - [3] M. Hukuhara, Sur la fonction convexe, *Proc. Japan Acad.*, **30** (1954), 683-685.
 - [4] J. H. B. Kemperman, A general functional equation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **86** (1957), 28-56.
 - [5] H. Kestelman, On the functional equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Fund. Math.*, **34** (1947), 144-147.
 - [6] S. Kurepa, Convex functions, *Glasnik Matematicko-Fizicki i Astronomski* **11** (1956), 89-93.
 - [7] S. Marcus, Critères de majoration pour les fonctions sousadditives, convexes ou internes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **244** (1957), 2270-2272.
 - [8] S. Marcus, Fonctions convexes et fonctions internes, *Bull. Sci. Math.*, **81** (1957), 66-70.
 - [9] E. Mohr, Beitrag zur Theorie der Konvexen Funktionen, *Math. Nachr.*, **8** (1952), 133-148.
 - [10] P. Montel, Sur les fonctions convexes et les fonctions sousesharmoniques, *J. Math. Pures Appl.*, **7** (1928), 29-60.
 - [11] M. Nicolesco, Familles de fonctions convexes et de fonctions doublement convexes, *Bull. Soci. Roumaine Sci.*, **40** (1938), 3-10.
 - [12] A. Ostrowski, Uber die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, **38** (1929), 54-62.
 - [13] S. Piccard, *Sur des ensembles parfaits*, Paris, 1942.
 - [14] S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, Warszawa 1933, 226.
 - [15] W. Sierpinski, Sur une propriété des fonctions de M. Hamel, *Fund. Math.*, **5** (1924), 334-336.
-