Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 10, No. 3, July, 1958

Sur les groupes de Chevalley.

Par Takashi ONO

(Reçu le 18 avril, 1958)

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur le corps C des nombres complexes. C. Chevalley [1] a construit, comme nous allons le rappeler dans § 1 de cette note, une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_K$ sur un corps K quelconque qui a, en un certain sens, la "même structure" que celle de $\mathfrak{g}$ réduite modulo la caractéristique de K. Moyennant $\mathfrak{g}_K$, il a construit un groupe G_K comme un sous-groupe du groupe $A(\mathfrak{g}_K)$ des automorphismes de $\mathfrak{g}_K$, et démontré que le groupe G_K' des commutateurs de G_K est un groupe simple (sauf quelques cas d'exception qui sont très rares) si l'algèbre $\mathfrak{g}$ est simple, classique ou exceptionnelle.[1]

Une des questions[2] posées à la fin de [1] peut être exprimée comme suit:

(A) Le groupe G_K, est-il toujours un groupe algébrique, si K est infini?

(B) Si G_K est algébrique, dans quels cas G_K est la composante algébrique de l'identité dans $A(\mathfrak{g}_K)$ et dans quels cas l'algèbre de Lie de G_K est isomorphe à $\mathfrak{g}_K$?

Dans ce qui suit, nous résoudrons la question (A) en affirmative (Théorème 2), et donnerons une réponse (partielle) à la question (B) (Théorème 3).

La théorie de la réduction modulo p des groupes algébriques se montre utile dans la démonstration, et il nous semble aussi que cette théorie éclaircierait plus d'un point dans la description de [1]. Par exemple, soit en effet $K=F_q$, F_q étant le corps fini à q éléments et q étant une puissance d'un nombre premier p. On verra alors que, pour presque tous les p, le groupe fini $G_K=G_{F_q}$ construit dans [1] est formé des points rationnels sur F_q du groupe algébrique obtenu du groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ par la réduction modulo p (Corollaire 2), ce qui mettra en évidence la signification de la construction donnée dans [1].

Je désire exprimer ici ma reconnaissance à Monsieur E. Abe pour sa communication sur le Théorème 1.

---

1) [1], § IV. Théorème 3, Corollaire.
2) [1], § V. 3.

§ 1. Rappel de construction de G_K.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de degré n sur le corps C des nombres complexes et soit $\mathfrak{h}$ une algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Nous désignons par $\mathbf{P}$ le groupe additif engendré par les poids (par rapport à $\mathfrak{h}$) de toutes les représentations de $\mathfrak{g}$. D'après [1] nous appelons co-poids les éléments H de $\mathfrak{h}$ tels que $w(H)\in Z$ (l'anneau des entiers) pour tout $w\in\mathbf{P}$: ils forment un groupe additif は. Alors on sait qu'on peut attacher à toute racine r un élément radiciel X_r et un co-poids H_r de telle manière que les conditions suivantes soient satisfaites: a) on a $[X_r, X_{-r}]=H_r, r(H_r)=2$ pour toute racine r; b) si $r, s, r+s$ sont des racines, on a $[X_r, X_s]=N_{r,s}X_{r+s}$, avec $N_{r,s}=\pm(\mu+1)$, μ étant le plus grand entier $\nu\geqq 0$ tel que $s-\nu r$ soit une racine.[3)]

Nous désignons par $\mathfrak{g}_Z$ le groupe additif engendré par le groupe は des co-poids et par les éléments X_r pour toutes les racines r; nous supposons choisie une fois pour toutes une base $(H_1,\cdots, H_l, X_r$, pour tout $r)$ de $\mathfrak{g}_Z$ composée d'une base $(H_1,\cdots, H_l)$ de は et des X_r. Soit maintenant K un corps quelconque. Le produit tensoriel $\mathfrak{g}_K=K\otimes\mathfrak{g}_Z$ admet une structure d'algèbre de Lie sur K; nous posons $\mathfrak{h}_K=K\otimes$は, $H_{r,K}=1_K\otimes H_r$, $H_{i,K}=1_K\otimes H_i$, $X_{r,K}=1_K\otimes X_r$, 1_K étant l'élément unité de K. Les éléments $H_{i,K}, X_{r,K}$ forment une base de $\mathfrak{g}_K$ que nous appellerons dans la suite la base canonique de $\mathfrak{g}_K$ et $\mathfrak{h}_K$ s'identifie à un sous-espace de $\mathfrak{g}_K$ engendré par les éléments $H_{i,K}$. Soit L un sur-corps de K. Alors on peut identifier l'algèbre $\mathfrak{g}_L$ à l'algèbre déduite de $\mathfrak{g}_K$ par extension à L du corps de base.

Pour toute racine r, nous posons $x_r(t)=\exp t(ad\, X_r)$, $t\in C$ et nous désignons par $\mathfrak{X}_r$ le groupe formé des $x_r(t)$, $t\in C$. On sait alors qu'il existe une matrice $A_r(T)$, dont les coefficients sont les polynomes en une lettre T à coefficients entiers, tels que, pour tout $t\in C$, la matrice qui représente $x_r(t)$ par rapport à la base canonique de $\mathfrak{g}$ soit $A_r(t)$.[4)] Si $t\in K$, on peut substituer t à T dans les coefficients de la matrice $A_r(T)$; on obtient ainsi une matrice à coefficients dans K, que nous désignerons par $A_{r,K}(T)$. Nous désignerons par $x_{r,K}(t)$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_K$ qui est représenté par la matrice $A_{r,K}(t)$ relativement à la base canonique de $\mathfrak{g}_K$. Alors $x_{r,K}(t)$ est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_K$; nous désignerons par $\mathfrak{X}_{r,K}$ le groupe formé des $x_{r,K}(t)$, $t\in K$.

Soit χ un homomorphisme du groupe additif $\mathbf{P}_r$ engendré par les racines de $\mathfrak{g}$ dans le groupe multiplicatif K^* des éléments $\neq 0$ de K. Nous désignons par $h(\chi)$ l'automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_K$ qui laisse fixes les éléments de $\mathfrak{h}_K$ et qui transforme $X_{r,K}$ en $\chi(r)X_{r,K}$ pour toute racine r; nous désignerons

3) [1], § I. Théorème 1.

4) [1], § II.

par $\mathfrak{H}_K$ le groupe formé des $h(\chi)$, pour tout $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{P}_r, K^*)$.

Enfin, nous désignerons par G_K le groupe engendré par $\mathfrak{H}_K$ et par tous les groupes $\mathfrak{X}_{r,K}$; on a donc $G_K \subset A(\mathfrak{g}_K)$: le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}_K$. Au moyen de la base canonique de $\mathfrak{g}_K$, on peut regarder G_K comme un sous-groupe de $GL(n, K)$. Si L est un sur-corps de K, on voit tout de suite que $G_K \subset G_L \cap GL(n, K)$. Nous démontrerons dans le paragraphs suivant que $G_K = G_L \cap GL(n, K)$ (Théorème 1).

Les notations introduites ci-dessus garderont les mêmes sens jusqu'à la fin de cette note.

§ 2. Extension du corps de base.

Proposition 1. *Soit K un corps et soit L un sur-corps de K. Alors on a $\mathfrak{X}_{r,K} = \mathfrak{X}_{r,L} \cap GL(n, K)$ pour toute racine r.*

Soit en effet $x_{r,L}(t) \in GL(n, K)$, $t \in L$. On a $x_{r,L}(t) X_{-r,K} = X_{-r,K} + tH_{r,K} - t^2 X_{r,K}$.[5] Comme les éléments $X_{-r,K}, H_{r,K}, X_{r,K}$ sont linéairement indépendants sur L[6] et on a $H_r = \sum_{i=1}^{l} a_i H_i$, $a_i \in Z$, on voit que $t \in K$, d'où $x_{r,L}(t) = x_{r,K}(t) \in \mathfrak{X}_{r,K}$, c. q. f. d.

Nous supposerons dorénavant choisie une fois pour toutes une structure régulière de groupe ordonné sur $\mathbf{P}_r$. Pour un corps K, nous désignerons par $\mathfrak{U}_K$(resp.: $\mathfrak{V}_K$) le sous-groupe de G_K engendré par les groupes $\mathfrak{X}_{r,K}$ relatifs aux racines r positives (resp.: négatives).

Proposition 2. *Soit L un sur-corps de K. Alors, $\mathfrak{U}_K = \mathfrak{U}_L \cap GL(n, K)$, $\mathfrak{V}_K = \mathfrak{V}_L \cap GL(n, K)$.*

Soit en effet $x \in \mathfrak{U}_L \cap GL(n, K)$. On sait que x se met d'une manière et d'une seule sous la forme $x = \prod_r x_r(t_r)$, $t_r \in L$, le produit étant étendu aux racines $r > 0$ rangées par ordre de grandeur croissante.[7] Pour tout entier $m > 0$, nous désignerons par $\mathfrak{U}_m$ le groupe engendré par les $\mathfrak{X}_{r,L}$ pour les racines $r > 0$ de hauteurs $\geqq m$. Comme $\mathfrak{U}_m = \{1\}$ pour m assez grand, nous démontrerons par récurrence descendante sur m que tout $t_r \in K$ si $x = \prod_r x_r(t_r) \in \mathfrak{U}_m \cap GL(n, K)$. Soit r une racine de hauteur m. Alors on a $xX_{-r,K} \equiv X_{-r,K} + t_r H_{r,K}$ (mod. $\mathfrak{u}$), $\mathfrak{u}$ étant l'espace vectoriel sous-tendu par les $X_{r,K}$ sur L pour les racines $r > 0$.[8] La somme $LX_{-r,K} + LH_{r,K} + \mathfrak{u}$ étant directe, et $H_{r,K}$ étant $\neq 0$, on voit que $t_r \in K$. Posons $x = \prod_s' x_s(t_s) \cdot \prod_s'' x_s(t_s)$, le produit $\prod'$ étant étendu aux racines de hauteur m, et le produit $\prod''$ aux racines de hauteurs $> m$.

---

5) [1], § III, formule (1).
6) [1], § III, Lemme 1.
7) [1], § III, Lemme 6.
8) Voir la démonstration de 7).

Appliquant l'hypothèse inductive à l'élément $\prod_s'' x_s(t_s) \in \mathfrak{U}_{m+1} \cap GL(n, K)$, on voit que tout $t_s \in K$, e. q. f. d.

Proposition 3. *Soit L un sur-corps de K. Alors on a $\mathfrak{H}_K = \mathfrak{H}_L \cap GL(n, K)$.*

En effet soit $h(\chi) \in \mathfrak{H}_L \cap GL(n, K)$, $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{P}_r, L^*)$. Puisqu'on a $h(\chi) X_{r,K} = \chi(r) X_{r,K}$ pour tout r, on voit que $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{P}_r, K^*)$, d'où $h(\chi) \in \mathfrak{H}_K$, c. q. f. d.

Théorème 1. *Soient K un corps, L un sur-corps de K. Alors on a $G_K = G_L \cap GL(n, K)$.*[9]

Démonstration. Soient $r_i (1 \leqq i \leqq N)$ toutes les racines positives telles que $r_1 < r_2 < \cdots < r_N$. Si l'on range la base canonique de $\mathfrak{g}_K$ en ordre $(X_{-r_N, K}, \cdots, X_{-r_1, K}, H_{1,K}, \cdots, H_{l,K}, X_{r_1}, \cdots, X_{r_N})$, on voit que tout élément de $\mathfrak{U}_K$(resp. : $\mathfrak{V}_K$) est représenté par la matrice triangulaire $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $\left(\text{resp. : } \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}\right)$ par rapport à cette base.[10] Il est clair que le groupe $\mathfrak{H}_K$ est diagonal. Soit $z \in G_L \cap GL(n, K)$. On sait que z se met d'une seule manière sous la forme $z = xh\omega(w)x''$, avec $x \in \mathfrak{U}_L$, $h \in \mathfrak{H}_L$, $x'' \in (\mathfrak{U}_w'')_L$, w étant une opération du groupe de Weyl.[11] De plus, on peut ici supposer que $\omega(w)$ est une opération de G_K. D'après Proposition 2, Proposition 3, il suffit pour démontrer notre théorème de voir que les trois éléments x, h, x'' sont contenus dans $GL(n, K)$. Posons $y = \omega(w)x''(w)^{-1}$. Alors on a $y \in \mathfrak{V}_L$ et $z\omega(w)^{-1} = xh\omega(w)x''\omega(w)^{-1} = xhy$. Comme $\omega(w) \in GL(n, K)$, on a $x'' \in GL(n, K)$ si et seulement si $y \in GL(n, K)$, et on a $z \in GL(n, K)$ si et seulement si $xhy \in GL(n, K)$. D'après la remarque ci-dessus, on peut écrire

$$xh = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ b_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $xhy \in GL(n, K)$, il s'ensuit que tout $a_{ij}, b_{ij} \in K$ par un calcul élémentaire que nous omettons, d'où $xh, y \in GL(n, K)$ et puis $x, h, x'' \in GL(n, K)$, ce qui montre notre assertion.

Proposition 4. *Soit K un corps infini. Alors $\mathfrak{X}_{r,K}$ est un groupe algébrique irréductible. Si L est un sur-corps de K, on a $\mathfrak{X}_{r,L} = (\mathfrak{X}_{r,K})^L$.*

En effet soit M un sur-corps algébriquement clos de K. Puisque $\mathfrak{X}_{r,M}$ est l'image de la représentation rationnelle $t \to x_{r,M}(t)$, $t \in M$, il est algébrique irréductible.[12] D'après Proposition 1, on a $\mathfrak{X}_{r,K} = \mathfrak{X}_{r,M} \cap GL(n, K)$, d'où $\mathfrak{X}_{r,K}$ est

9) La démonstration suivante m'a été communiquée par Monsieur E. Abe.

10) Voir les formules (1), (2), (3) de [1], § III.

11) [1], § III. Théorème 2. En ce qui concerne la définition de $(\mathfrak{U}_w'')_L$ et $\omega(w)$, voir l'explication dans [1], § III.

12) [2], Ch. II, § 6. Proposition 7, § 7. Proposition 2. Corollaire 1.

algébrique[13] et irréductible.[12] Comme l'inclusion $(\mathfrak{X}_{r,K})^L \subset \mathfrak{X}_{r,L}$ est trivial et les groupes des deux membres sont irréductibles et de dimension 1, on a $(\mathfrak{X}_{r,K})^L = \mathfrak{X}_{r,L}$, c. q. f. d.

PROPOSITION 5. *Soit K un corps infini. Alors $\mathfrak{H}_K$ est un groupe algébrique irréductible. Si L est un sur-corps de K, on a $\mathfrak{H}_L = (\mathfrak{H}_K)^L$.*

Soit en effet $(a_1, \cdots, a_l)$ les racines fondamentales; pour toute racine r soit $r = \sum_{i=1}^{l} m_i(r) a_i$. Alors on a $\chi(r) = \prod_i \chi(a_i)^{m_i(r)}$ pour tout $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{P}_r, K^*)$. Réciproquement, soit $z_1, \cdots, z_l$ des élément quelconques de K^*, et soit $z_r = \prod z_i^{m_i(r)}$. Alors on peut trouver un élément $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{P}_r, K^*)$ tel que $\chi(r) = z_r$ pour tout r. On voit donc que $\mathfrak{H}_K$ est un groupe algébrique irréductible diagonal de dimension l defini par les relations $Z_r = \prod Z_i^{m_i(r)}$ pour tout r. Notre Proposition en résulte facilement.

THÉORÈME 2. *Soit K un corps infini. Alors G_K est un groupe algébrique irréductible. Si L est un sur-corps de K, on a $G_L = (G_K)^L$.*

DÉMONSTRATION. Soit M un sur-corps algébriquement clos de K. Puisque G_M est engendré par les groupes algébriques irréductibles $\mathfrak{H}_M, \mathfrak{X}_{r,M}, G_M$ est aussi algébrique irréductible.[14] D'après Théorème 1, on voit que le groupe $G_K = G_M \cap GL(n, K)$ est algébrique. Soit maintenant R l'application rationnelle de $\mathfrak{H}_K \times \prod_s \mathfrak{X}_{s,K}$ dans $GL(n, K)$ définie par $R(s_1, s_2, s_3, \cdots) = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdots$. Puisque G_K est engendré par l'image de l'application R, il en résulte que G_K est irréductible.[15] Si L est un sur-corps de K, on voit d'après Proposition 4, Proposition 5, que $(G_K)^L$ contient les groupes $\mathfrak{H}_L, \mathfrak{X}_{r,L}$ d'où $G_L \subset (G_K)^L$, ce qui montre notre assertion.

§ 3. Réduction modulo p.

Pour la simplicité, nous poserons $G = G_C, \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_C, C$ étant le corps des nombres complexes. Soit Γ le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire la composante connexe (topologique et algébrique) de l'élément unité dans le groupe $A(\mathfrak{g})$ des automorphismes de $\mathfrak{g}$. On sait que Γ est formé des exp $ad(X), X \in \mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie de Γ est l'image ad $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ par sa représentation adjointe, et on a $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\,\mathfrak{h} + \mathrm{ad}\{X_r\} + \cdots$, où la somme étant directe. Comme on a exp $\mathrm{ad}(H) = h(\chi)$ avec $\chi(r) = \exp r(H)$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$, on voint facilement que l'algèbre de Lie de $\mathfrak{H}$ est ad $\mathfrak{h}$, D'autre part, il est clair que l'algèbre de Lie de $\mathfrak{X}_r$ est $\mathrm{ad}\{\mathfrak{X}_r\}$. Comme le group G est algébrique irréductible, on voit donc que G coïncide avec Γ. D'après Théorème 2 on a $G = (G_Q)^C$, d'où G est défini sur Q: le corps des nombres rationnels. Le groupe $\mathfrak{H}$ étant défini par

13) [2], Ch. II, § 5. Lemme 1.
14) [2], Ch. II, § 7. Proposition 2, Corollaire 3.
15) [2], Ch. II, § 6. Proposition 7.

les relations monomials $Z_r=\prod Z_i^{m_i(r)}$ pour tout r, il est défini sur Q. En général, soit A un sous-groupe algébrique de $GL(n, C)$ défini sur Q. Soit p un nombre premier. Nous désignerons alors par $A^{(p)}$ le sous-groupe algébrique de $GL(n, \Omega_p)$ obtenu de A par la réduction modulo p, où Ω_p désigne un corps universel de caractéristique p.[16] Le groupe $A^{(p)}$ est défini sur le corps F_p à p éléments et on a $\dim A^{(p)}=\dim A$.

Proposition 6. *Pour tout nombre premier p, on a $\mathfrak{H}^{(p)}=\mathfrak{H}_{\Omega_p}, \mathfrak{X}_r^{(p)}=\mathfrak{X}_{r,\Omega_p}$ pour tout r.*

Puisque les groupes $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_{\Omega_p}$ sont tous les deux définis par les relations monomials $Z_r=\prod Z_i^{m_i(r)}$, on voit que $\mathfrak{H}^{(p)}\subset\mathfrak{H}_{\Omega_p}$ par le définition de la réduction modulo p. D'autre part, $\mathfrak{H}_{\Omega_p}$ étant irréductible et les dimensions des deux membres étant égaux, on voit que $\mathfrak{H}^{(p)}=\mathfrak{H}_{\Omega_p}$. Ensuite soit $\xi\in\mathfrak{X}_r^{(p)}$. Alors, il existe $x_r(t)\in\mathfrak{X}_r$, tel que $x_r(t)\overset{\mathfrak{o}_p}{\to}\xi$, où $\mathfrak{o}_p$ désigne l'anneau de la valuation par rapport à p. Posons $x_r(t)=(A_{r,ij(t)}), A_{r,ij}(T)\in Z[T]$. $\xi=(\xi_{ij})$. Comme le co-poids H_r attaché à r fait partie d'au moins une base de $\mathfrak{h}$, il existe au moins un nombre i tel que $a_i\not\equiv 0 \pmod{p}$, si l'on écrit $H_r=\sum_{i=1}^{l} a_iH_i$, $a_i\in Z$. De la relation $x_r(t)X_{-r}=X_{-r}+tH_r-t^2X_r=X_{-r}+\sum_i ta_iH_i-t^2X_r$, on voit qu'il existe un indice (j_0, k_0) tel que $A_{r,j_0k_0}(t)=ta_i$, et on a donc $ta_i\overset{\mathfrak{o}_p}{\to}\xi_{j_0k_0}$. Puisque $a_i\not\equiv 0 \pmod{p}$, on peut écrire $\xi_{j_0k_0}=\tau a_i^{(p)}$, où $a_i^{(p)}$ désigne la classe de a_i modulo p. Comme on peut trouver $B_{r,jk}(T)\in\mathfrak{O}_p[T]$ tel que $A_{r,jk}(T)=B_{r,jk}(Ta_i)$, $A_{r,jk}(t)$ est contenu dans l'anneau de la spécialisation : $ta_i\overset{\mathfrak{o}_p}{\to}\xi_{j_0k_0}$, et on a $\xi_{jk}=B_{r,jk}^{(p)}(\xi_{j_0k_0})$ $=A_{r,jk}^{(p)}(\xi_{j_0k_0}a_i^{(p)-1})=A_{r,jk}^{(p)}(\tau)$ pour tout (j, k), où $A_{r,jk}^{(p)}, B_{r,jk}^{(p)}$ désignent les classes de $A_{r,jk}, B_{r,jk}$ modulo p, respectivement. Ceci montre que $\xi=x_{r,\Omega_p}(\tau)\in\mathfrak{X}_{r,\Omega_p}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{X}_r^{(p)}\subset\mathfrak{X}_{r,\Omega_p}$, $\mathfrak{X}_{r,\Omega_p}$ étant irréductible, on a $\mathfrak{X}_r^{(p)}=\mathfrak{X}_{r,\Omega_p}$, c. q. f. d.

Proposition 7. *Pour tout nombre premier p, G_{Ω_p} est la composante algébrique de l'élément unité dans le groupe $G^{(p)}$.* (*On a donc $G_{\Omega_p}=G^{(p)}$ pour presque tous les p.*)

En effet, tout $x\in\mathfrak{U}_{\Omega_p}$ étant écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $x=\prod_{r>0} x_r(t_r)$, on a $\dim\mathfrak{U}_{\Omega_p}=N$, où N désigne le nombre des racines positives. De même on a $\dim\mathfrak{V}_{\Omega_p}=N$. Soient maintenant x, h, y des points génériques indépendants sur F_p de $\mathfrak{U}_{\Omega_p}, \mathfrak{H}_{\Omega_p}, \mathfrak{V}_{\Omega_p}$ respectivement. Alors, par un calcul élémentaire,[17] on voit que $F_p(x, h, y)=F_p(xhy)$, d'où $\dim F_p(xhy)=$ $\dim F_p(x)+\dim F_p(h)+\dim F_p(y)=2N+l=n$. On voit donc que $\dim G_{\Omega_p}\geqq n$. D'autre part, d'après Proposition 6, il résulte que $G_{\Omega_p}\subset G^{(p)}$, d'où s'ensuit $n\leqq\dim G_{\Omega_p}\leqq\dim G^{(p)}=\dim G=n$. Notre proposition est une conséquence facile de cette relation.

Corollaire 1. *Pour tout corps infini K, on a $\dim G_K=n$.*

16) Voir [4], § 1.

17) C. f. la démonstration de Théorème 1.

Soit en effet Ω un corps universel sur K. D'après Théorème 2, il suffit de montrer que $\dim G_\Omega = n$. Au cas où la caractéristique de K est 0, on le voit facilement en considérant l'algèbre de Lie de G_Ω, et au cas où la caractéristique est p, c'est contenu dans notre proposition.

COROLLAIRE 2. *Soit F_q le corps fini à q éléments, q étant une puissance d'un nombre premier p. Alors le groupe fini G_{F_q} est formé des points rationnels sur F_q du groupe algébrique qui est la composante algébrique de l'identité du groupe obtenu du groupe adjoint G de $\mathfrak{g}$ par la réduction modulo p. De plus, pour presque tous les p, G_{F_q} est le groupe des points rationnels sur F_q du groupe obtenu de G par la réduction modulo p.*

Cela résulte du Théorème 1 et de notre Proposition.

THÉORÈME 3. *Soit D le discriminant de la forme bilinéaire fondamentale de $\mathfrak{g}$ par rapport à la base canonique. Soit K un corps de caractéristique* 0 *ou bien un corps infini de caractéristique p telle que $D \not\equiv 0$ (mod. p). Alors G_K est la composante algébrique de l'élément unité dans le groupe $A(\mathfrak{g}_K)$ et l'algèbre de Lie de G_K est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{g}_K$.*

DÉMONSTRATION. Pour démontrer la première assertion, il suffit de montrer que $\dim G_K = \dim A(\mathfrak{g}_K)$, comme G_K est irréductible d'après Théorème 2. Par hypothèse sur p, on voit que la forme bilinéaire fondamentale de $\mathfrak{g}_K$ est non dégénérée. Il en résulte que toute dérivation de $\mathfrak{g}_K$ est une dérivation adjointe.[18] Nous désignerons par $\mathfrak{D}_K$ l'algèbre de Lie de dérivation de $\mathfrak{g}_K$. On a donc $\dim \mathfrak{D}_K \leqq \dim \mathfrak{g}_K = n$. De plus, on sait que l'algèbre de Lie de $A(\mathfrak{g}_K)$ est contenue dans $\mathfrak{D}_K$.[19] D'après Corollaire 1 ci-dessus, on voit donc que $n = \dim G_K \leqq \dim A(\mathfrak{g}_K) \leqq \dim \mathfrak{D}_K \leqq n$, d'où on a $\dim G_K = \dim A(\mathfrak{g}_K)$. Ensuite soit $\mathfrak{g}_K'$ l'algèbre de Lie de G_K. D'après la première assertion, on voit que $\mathfrak{g}_K'$ coïncide avec l'algèbre de Lie de $A(\mathfrak{g}_K)$, et cette dernière algèbre avec $\mathfrak{D}_K$, d'où $\mathfrak{g}_K' = \mathfrak{D}_K \cong \mathfrak{g}_K$, ce qui montre notre assertion.

Université, Municipale d'Osaka.

Bibliographie

[1] C. Chevalley, Sur certains groupes simples, Tôhoku Math. J., 7, (1955) 14-66.
[2] C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie, Tome II, Paris, 1951, Hermann.
[3] C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie, Tome III, Paris, 1954, Hermann.
[4] T. Ono, Sur la réduction modulo $\mathfrak{p}$ des groupes linéaires algébriques, Osaka Math. J., à paraître prochainement.

---

18) [3], Ch. IV, § 2. Voir la démonstration de Proposition 11.
19) [2], Ch. II, § 10. Exemple II.