Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 10, No. 2, April, 1958

Sur les espaces A_3 non projectivement euclidiens à groupe transitif $\mathcal{G}_7$.

Par G. VRANCEANU

(Reçu le 18 avril, 1957)
(Revisé le 20 déc., 1957)

Dans les dernières dix années, un grand nombre de travaux s'occupent de la détermination des nombres des paramètres des groupes de mouvement des espaces A_n à connexion affine ou des espaces P_n à connexion projective. C'est ainsi qu'en 1947 [1] j'ai montré que si l'espace A_n possède une forme de Pfaff invariante, le groupe de mouvement de l'espace possède au plus n^2 paramètres et j'ai déterminé tous les espaces A_n à groupe $\mathcal{G}_{n^2}$. Je me suis posé ce problème en remarquant que le tenseur de courbure de A_n nous donne par contraction deux tenseurs covariants du second ordre et de ces tenseurs on peut obtenir un tenseur symétrique. On peut donc associer à l'espace A_n une forme quadratique et l'espace peut avoir un groupe maximum si cette forme quadratique est dégénérée et contient un seul carré. En ce cas c'est ce carré qui nous fournit la forme de Pfaff invariante. De même une forme de Pfaff invariante peut apparaître par la contraction du tenseur de torsion.

C'est aussi en 1947 [2] que I. P. Egorof a montré qu'un espace A_n qui n'est pas euclidien, possède un groupe ayant au plus n^2 paramètres. Des recherches ultérieures d'Egorof et de moi-même ont montré que les seuls espaces A_n à groupe $\mathcal{G}_{n^2}$ sont ceux que j'avais déjà obtenus comme espaces A_n à forme de Pfaff invariante. Tous ces espaces sont des espaces projectivement euclidiens s'ils sont sans torsion et une propriété importante de ces espaces trouvée par Egorof est donnée par le fait que leur groupe de mouvement peut être considéré dans un système convenable de variables comme un groupe projectif qui conserve deux hyperplans[1)].

D'autres résultats dans le problème de la détermination des nombres des paramètres du groupe d'un espace A_n ont été obtenus par les mathématiciens japonnais Y. Muto [6], K. Yano [7] et S. Ishihara [9], [10][2)].

Le present travail est en relation avec un résultat que j'ai obtenu en 1949 sur les espaces A_n qui ne sont pas projectivement euclidiens. J'ai

1) Ce problème a été considéré aussi dans mon travail [4] où on y trouve aussi des indications bibliographiques relatives aux travaux d'Egorof.

2) On y trouve aussi des indications bibliographiques assez complètes.

montré [3] que ces espaces possèdent, si $n \geqq 3$, un groupe ayant au plus n^2-2n+5 paramètres.

J'ai montré aussi [5] que les espaces A_n qui possèdent ce groupe maximum peuvent être réduits à avoir toutes les composantes du tenseur de courbure nulles sauf une $r^1_{223}=1$ et toutes les composantes de la connexion nulles, sauf une $\Gamma^1_{22}=x^3$ et ce sont par conséquent des espaces qu'on doit considérer comme bien connus. Il en résulte en particulier que dans le cas d'un espace A_3 non projectivement euclidien, le groupe maximum contient 8 paramètres.

Nous allons montrer maintenant dans la première partie de ce travail que pour un A_3 non projectivement euclidien dont le groupe de mouvement contient 7 paramètres le tenseur quadratique de courbure est au plus de rang 1. Dans la seconde partie nous allons montrer qu'on peut s'arranger de façon que toutes les composantes du tenseur de courbure soient nulles sauf $r^1_{223}=1$, r^1_{212}, r^3_{221}. Dans la troisième partie nous allons donner des exemples[1)] que ces espaces existent et dans la dernière partie nous allons montrer que ces exemples conduisent à deux classes d'espaces A_n dont le groupe de mouvement possède n^2-3n+7 et $n^2-4n+10$ paramètres.

I

Supposons maintenant, ce qui est toujours possible [5], que les composantes r^i_{jkl} du tenseur de courbure ont été réduites à la forme canonique

$$(1) \qquad r^1_{223}=-r^1_{232}=1,\ r^\alpha_{223}=r^\alpha_{232}=0 \quad (\alpha=2,3),\quad r^1_{323}=r^1_{332}=0\,.$$

Supposons aussi que les coordonnées sont normales. En ce cas le groupe de stabilité est un groupe linéaire défini par des transformations infinitésimales

$$X=a^i_j x^j \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

et les équations auxquelles doivent satisfaire les constantes a^i_j en tenant compte du tenseur de courbure, s'écrivent

$$(2) \qquad (ijkl);\quad r^i_{skl}a^s_j+r^i_{jsl}a^s_k+r^i_{jks}a^s_l-r^s_{jkl}a^i_s=0\,,$$

où r^i_{jkl} interviennent par leurs valeurs à l'origine.

Pour trouver le groupe de stabilité de l'espace il faut résoudre en premier lieu un problème algebrique qui consiste à trouver les solutions des équations (2).

Cela dit, considérons les équations (2) pour $j=2$, $k=2$, $l=3$ et $i=1,2,3$

1) La détermination de tous les espaces A_3 à groupe $\mathcal{G}_7$ fait l'objet d'un travail de mon élève V. Dumitraş [8], qui sera publié prochainement. Dans ce travail on y trouvera une large bibliographie relative aux travaux sur les groupes de mouvement des différents espaces A_n ou P_n.

et pour $i=1$, $j=3$, $k=2$, $l=3$, donc les équations $(i223)$, $(i=1,2,3)$ et (1323). En tenant compte des équations (1), et du fait que γ^i_{jkl} ont symétriques gauches dans k, l on obtient

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
&2a^2_2+a^3_3-a^1_1+(\gamma^1_{123}+\gamma^1_{213})a^1_2+\gamma^1_{221}a^1_3=0\,,\\
&(\gamma^2_{213}+\gamma^2_{123})a^1_2+\gamma^2_{323}a^3_2+\gamma^2_{221}a^1_3-a^2_1=0\,,\\
&(\gamma^3_{213}+\gamma^3_{123})a^1_2+\gamma^3_{323}a^3_2+\gamma^3_{221}a^1_3-a^3_1=0\,,\\
&(\gamma^1_{123}+\gamma^1_{321}-\gamma^3_{323})a^1_3+(\gamma^1_{313}-\gamma^2_{323})a^1_2+a^2_3=0\,.
\end{aligned}
$$

Les équations (3) constituent quatre équations indépendantes dans les inconnues $a^1_1, a^2_1, a^3_1, a^2_3$. Comme les inconnues a^i_j sont en nombre de neuf, il en résulte qu'on peut avoir au plus cinq a^i_j indépendantes.

Il faut donc pour que le groupe de stabilité de A_3 soit un $\mathcal{G}_5$ que toutes les équations (2) indépendantes se réduissent aux équations (3). J'ai montré [5] que celà arrive si toutes les composantes du tenseur de courbure sont nulles sauf $\gamma^1_{223}=1$. Chercher les espaces A_3 à groupe transitif $\mathcal{G}_7$, donc à groupe de stabilité $\mathcal{G}_4$, revient à voir dans quelles conditions cinq parmi les équations (2) sont indépendantes, donc une équation indépendante autre que les (3).

Nous allons montrer que cela arrive seulement dans le cas où toutes les composantes du tenseur de courbure sont nulles sauf

$$
(3') \qquad \gamma^1_{223}=1,\ \gamma^1_{212},\ \gamma^3_{221}\,.
$$

La démonstration est longue et comprendra une parties préparatoire. Il sera démontré en premier lieu que le rang du tenseur contracté symétrique de courbure est au plus égal à 1, et que le tenseur contracté gauche symétrique de courbure est nul.

Nous allons observer que les équations (2) possèdent une propriété générale que nous utiliserons dans la suite. En effet une telle équation, disons $(ijkl)$, s'ecrit

$$
(3'') \qquad \gamma^i_{jkl}(a^j_j+a^k_k+a^l_l-a^i_i)+\cdots=0
$$

les termes non écrits ne contenant que les inconnues a^i_j $(i\neq j)$. Une telle équation où k doit être toujours différent de l, car γ^i_{jkl} sont gauche symétriques dans k, l est indépendante des équations (3) si elle est indépendante de la première (3) donc si γ^i_{jkl} ne coïncide pas avec γ^1_{223} ou γ^1_{232}. En ce qui concerne le nombre des équations (2), en tenant compte que le couple k, l peut avoir les trois valeurs $1,2$; $2,3$; $3,1$, il en résulte que le nombre des équations (2) est 27, mais trois d'entre elles ne sont pas indépendantes à cause des identités

$$
(3''') \qquad \gamma^i_{123}+\gamma^i_{231}+\gamma^i_{312}=0\,.
$$

Considérons alors les équations ($i323$) où $i=2, 3$. Nous avons

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
&(\gamma^{2}_{123}+\gamma^{2}_{321})a^{1}_{3}+2\gamma^{2}_{323}a^{3}_{3}+\gamma^{2}_{313}a^{1}_{2}-\gamma^{3}_{323}a^{2}_{3}=0\,,\\
&\gamma^{3}_{323}[a^{2}_{2}+a^{3}_{3}]+(\gamma^{3}_{123}+\gamma^{3}_{321})a^{1}_{3}+\gamma^{3}_{313}a^{1}_{2}-\gamma^{2}_{323}a^{3}_{2}=0\,.
\end{aligned}
$$

On voit facilement que si $\gamma^{2}_{323}\neq 0$, les équations (3) et (4) constituent six équations indépendantes dans les inconnues $a^{1}_{1}, a^{2}_{1}, a^{3}_{1}, a^{2}_{3}, a^{3}_{3}, a^{3}_{2}$ donc le groupe de stabilité ne peut pas être un $\mathcal{G}_{4}$. Il faut par conséquent que nous ayons

$$
(4') \qquad \gamma^{2}_{323}=0
$$

pour que l'espace possède un groupe $\mathcal{G}_{7}$.

Nous allons maintenant montrer que les dix composantes du tenseur de courbure

$$
(5) \qquad \gamma^{3}_{323},\ \gamma^{1}_{113},\ \gamma^{1}_{123},\ \gamma^{1}_{213},\ \gamma^{1}_{312},\ \gamma^{2}_{213},\ \gamma^{2}_{123},\ \gamma^{2}_{312},\ \gamma^{2}_{113},\ \gamma^{3}_{313}
$$

doivent être aussi nulles pour que l'espace possède un $\mathcal{G}_{7}$.

Pour cela considérons les équations ($i123$). Nous avons

$$
(5') \qquad \begin{aligned}
&\gamma^{1}_{123}[a^{2}_{2}+a^{3}_{3}]+a^{2}_{1}+(\gamma^{1}_{113}-\gamma^{2}_{123})a^{1}_{2}+(\gamma^{1}_{121}-\gamma^{3}_{123})a^{1}_{3}=0\,,\\
&\gamma^{2}_{123}[a^{1}_{1}+a^{3}_{3}]+\gamma^{2}_{113}a^{1}_{2}+\gamma^{2}_{121}a^{1}_{3}-\gamma^{1}_{123}a^{2}_{1}-\gamma^{3}_{123}a^{2}_{3}=0\,,\\
&\gamma^{3}_{123}[a^{1}_{1}+a^{2}_{2}]+(\gamma^{3}_{323}-\gamma^{1}_{123})a^{3}_{1}+\gamma^{3}_{113}a^{1}_{2}+\gamma^{3}_{121}a^{1}_{3}-\gamma^{2}_{123}a^{3}_{2}=0\,.
\end{aligned}
$$

Supposons maintenant qu'une des quantités (5) n'est pas nulle, par exemple γ^{3}_{323}. En ce cas la dernière équation (4) associée à la première (3) nous donne deux équations indépendantes dans les a^{i}_{i}. Pour n'avoir pas une troisième équation indépendante dans les a^{i}_{i} il faut que toutes les 12 composantes

$$
(5'') \qquad \gamma^{2}_{313},\ \gamma^{3}_{113},\ \gamma^{3}_{112},\ \gamma^{2}_{112},\ \gamma^{1}_{313},\ \gamma^{3}_{213},\ \gamma^{3}_{312},\ \gamma^{3}_{123},\ \gamma^{1}_{112},\ \gamma^{2}_{212},\ \gamma^{1}_{212},\ \gamma^{3}_{221}
$$

soient nulles. Cela arrive aussi comme il est facile à voir, si une quelconque des composantes (5) n'est pas nulle, par exemple γ^{1}_{113}. En effet, en ce cas c'est l'équation (1113) qui associée à la première (3) nous donnent deux équations indépendantes dans a^{i}_{i} et pour n'avoir pas une troisième équation indépendante dans a^{i}_{i}, il faut que les composantes (5'') soient nulles.

Si les composantes (5'') sont nulles et si γ^{3}_{323} n'est pas nulle, les équations (3) et la dernière (4) peuvent être résolues sous la forme

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
&a^{1}_{1}=a^{2}_{2}+\lambda a^{1}_{2},\ \ a^{3}_{3}=-a^{2}_{2}+\mu a^{1}_{2}\,,\\
&a^{2}_{1}=\rho a^{1}_{2},\ \ a^{3}_{1}=\sigma a^{3}_{2},\ \ a^{2}_{3}=\delta a^{1}_{3}
\end{aligned}
$$

où $\lambda, \mu, \rho, \sigma, \delta$ sont des constantes. On obtient les mêmes formules (6) si une autre quelconque des composantes (5) n'est pas nulle.

En tenant compte des formules (6) dans les formules (3) et (4) nous obtenons

$$\begin{aligned}(6')\qquad &\mu-\lambda+\gamma^1_{123}+\gamma^1_{213}=0,\ \sigma=\gamma^3_{323},\ \delta=\sigma-\gamma^1_{123}-\gamma^1_{321},\\ &\rho=\gamma^2_{213}+\gamma^2_{123},\ \sigma\delta=\gamma^2_{123}+\gamma^2_{321},\ \mu\sigma+\gamma^3_{313}=0.\end{aligned}$$

De même en tenant compte des formules (6) dans les formules (5′) nous obtenons en tenant toujours compte que les composantes (5″) sont nulles

$$\begin{aligned}(6'')\qquad &\mu\gamma^1_{123}+\rho+\gamma^1_{113}-\gamma^2_{123}=0,\\ &(\lambda+\gamma)\gamma^2_{123}+\gamma^2_{113}-\gamma^1_{123}\rho=0,\\ &\sigma(\sigma-\gamma^1_{123})-\gamma^2_{123}=0.\end{aligned}$$

D'une manière analogue si l'on tient compte des (6) dans les formules (2) que nous n'avons pas considérées et précisément $(ij12)$, $(ij13)$ nous obtenons des formules analogues aux formules (6′), (6″). Toutes ces formules nous permettent d'une part de déterminer les composantes (5) en fonction des constantes $\lambda, \mu, \rho, \sigma, \delta$ et d'autre part de voir que ces constantes ne sont pas indépendantes.

On arrive d'une manière plus directe à trouver les relations qui existent entre ces constantes, en observant que les opérateurs des transformations infinitésimales du groupe de stabilité $\mathcal{G}_4$ sont donnés, en tenant comptes des (6), par les formules

$$\begin{aligned}(7)\qquad &X_4=x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}-x^3\frac{\partial f}{\partial x^3},\\ &X_5=x^2\frac{\partial f}{\partial x^1}+\lambda x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+\mu x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}+\rho x^1\frac{\partial f}{\partial x^2},\\ &X_6=x^2\frac{\partial f}{\partial x^3}+\sigma x^1\frac{\partial f}{\partial x^3},\ X_7=x^3\frac{\partial f}{\partial x^1}+\delta x^3\frac{\partial f}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Considérons alors la parenthèse formée avec X_6 et X_7. Nous avons

$$(X_6, X_7)=x^2\frac{\partial f}{\partial x^1}+\delta x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+\sigma x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+\sigma\delta x^1\frac{\partial f}{\partial x^2}-(\sigma+\delta)x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}.$$

Donc on peut écrire

$$(X_6, X_7)=X_5+(\sigma\delta-\rho)x^1\frac{\partial f}{\partial x^2}+\delta x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+(\sigma-\lambda)x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}-(\mu+\sigma+\delta)x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}.$$

Pour que les opérateurs (7) forment un groupe, il faut que le second terme du second membre soit nul et les trois derniers termes s'expriment à l'aide de X_4. Nous avons donc les formules

$$\sigma\delta=\rho,\ \delta=\sigma-\lambda=\mu+\sigma+\delta$$

formules qu'on peut encore écrire

$$(7')\qquad \sigma=-\mu,\ \delta=-\lambda-\mu,\ \rho=\mu(\lambda+\mu).$$

En tenant compte de ces formules dans les formules (6′), (6′′), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&r^3_{323}=-\mu,\ r^3_{313}=\mu^2,\ r^2_{213}=r^2_{321}=\frac{\mu(\mu+\lambda)}{3},\ r^2_{123}=\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{3},\\
(8)\qquad &r^1_{123}=\frac{2\lambda-\mu}{3},\ r^1_{321}=\frac{\lambda+\mu}{3},\ r^1_{213}=\frac{\lambda-2\mu}{3},\\
&r^1_{113}=-\lambda\mu,\ r^2_{113}=-\mu^2(\lambda+\mu).
\end{aligned}
$$

Nous allons maintenant observer que l'espace A_3 qui admet le groupe de stabilité (6) doit être symétrique, donc doit avoir le tenseur dérivé de courbure nul. En effet, si une des composantes $r^i_{jkl,p}$ du tenseur dérivé du tenseur de courbure serait différente de zéro, l'équation

$$
(8')\qquad r^i_{jkl,p}[a^j_j+a^k_k+a^l_l+a^p_p-a^i_i]+\cdots=0
$$

où les termes non écrits contiennent seulement $a^i_j\,(i\neq j)$ est une équation indépendante des (6) dans a^i_i, car l'expression

$$
a^j_j+a^k_k+a^l_l+a^p_p-a^i_i=0
$$

ne peut être vérifiée, si l'on pose $a^1_1=a^2_2$, et $a^3_3=-a^2_2$ quelques soient les indices j, k, l, p, i.

L'espace étant symétrique on sait alors que les transformations infinitésimales

$$
X_{kl}=r^i_{jkl}x^j\frac{\partial f}{\partial x^i}
$$

font partie du groupe de stabilité.

Dans notre cas, en tenant compte des formules (8) et du fait que nous avons aussi $r^1_{223}=1$, l'opérateur

$$
X_{23}=x^2\frac{\partial f}{\partial x^1}-\mu x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}+\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{3}x^1\frac{\partial f}{\partial x^2}+\frac{2\lambda-\mu}{3}x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}
$$

doit s'exprimer à l'aide des opérateurs (7) où l'on tient compte des (7′). Nous avons donc

$$
X_{23}=X_5-2\mu x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}-\frac{\mu+\lambda}{3}x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}-\frac{\mu(\lambda+\mu)}{3}x^1\frac{\partial f}{\partial x^2}.
$$

Il faut par conséquent que nous ayons

$$
\mu=0,\ \mu+\lambda=0,\ \mu(\lambda+\mu)=0
$$

ce qui nous dit que $\mu=\lambda=0$. Nous avons donc le théorème:

Pour qu'un espace A_3 dont le tenseur de courbure a été réduit à la forme canonique (1), *possède comme groupe complet de stabilité un $\mathcal{G}_4$, il faut que les composantes* (5) *du tenseur de courbure soient nulles.*

Les composantes (5) étant nulles nous avons

$$r_{13}=r^1_{113}+r^2_{213}+r^3_{313}=0\,,$$
$$r_{23}=r^1_{123}+r^2_{223}+r^3_{323}=0$$

et par conséquent les composantes r_{13}, r_{23} du second tenseur contracté r^{i}_{ikl} de courbure sont nulles. Il faut d'ailleurs que la composante r_{12} soit aussi nulle, car autrement cette composante nous donne les deux équations

$$r_{12}[a^1_1+a^2_2]=0\;,\quad r_{12}a^1_3=0$$

qui forment avec les (3) six équations indépendantes.

Il en résulte donc le théorème:

Pour qu'un espace A_3 non projectivement euclidien possède comme groupe de stabilité un $\mathcal{G}_4$, il faut que le tenseur contracté gauche symétrique de courbure soit nul.

Considérons maintenant le premier tenseur contracté de courbure

$$p_{kl}=r^h_{khl}\,.$$

L'espace étant sans torsion et le second tenseur contracté de courbure étant nul, le tenseur p_{kl} est symétrique. Ce tenseur impose aux a^i_j les conditions

$$(8'')\qquad p_{sj}a^s_k+p_{ks}a^s_j=0$$

où p_{jk} apparaissent par leurs valeurs à l'origine. D'autre part en tenant compte des formules (1) et du fait que les composantes (5) sont nulles nous avons

$$p_{23}=p_{13}=0$$

et les équations (8″) pour $j, k=1, 2$ s'écrivent

$$p_{11}a^1_1+p_{12}a^2_1=0\,,$$
$$p_{11}a^1_2+p_{12}[a^1_1+a^2_2]+p_{22}a^2_1=0\,,$$
$$p_{22}a^2_2+p_{12}a^1_2=0\,.$$

Ces équations nous disent que si $p_{11}\neq 0$, alors elles forment avec les (3) six équations indépendantes et précisément si p_{12} ou p_{22} est différent de zéro nous avons six équations indépendantes dans les $a^1_1, a^2_2, a^3_3, a^2_1, a^3_1, a^2_3$ et si $p_{12}=p_{22}=0$ nous avons six équations indépendantes dans $a^1_1, a^2_2, a^2_1, a^3_1, a^2_3, a^1_2$. Il faut donc que nous ayons $p_{11}=0$. D'une manière analogue il en résulte que p_{12} doit être nul.

Considérons alors les conditions (8″) si un au moins des indices j, k prend la valeur 3. Nous avons

$$p_{33}a^3_2+p_{22}a^2_3=0,\ p_{33}a^3_3=0$$

ce qui nous dit que p_{33} doit être nul car autrement ces équations associées aux (3) nous donnent six équations indépendantes. Il en résulte donc que toutes les composantes du tenseur p_{kl} sont nulles sauf éventuellement p_{22}. Par conséquent nous devons avoir

$$\gamma^2_{121}+\gamma^3_{131}=0,\ \gamma^1_{112}+\gamma^3_{132}=0,\ \gamma^2_{221}+\gamma^3_{231}=0,\ \gamma^1_{313}=0. \tag{9}$$

Nous avons donc le théorème:

Le tenseur contracté symétrique de courbure d'un espace A_3 non projectivement euclidien, à groupe de stabilité à quatre paramètres, est au plus de rang un.

II

Supposons donc que les composantes (5) sont nulles et que les formules (9) sont vérifiées. En ce cas les formules (4) s'écrivent en tenant compte aussi de (4′)

$$\gamma^2_{313}a^1_2=0,\ (\gamma^3_{123}+\gamma^3_{321})a^1_3=0. \tag{10}$$

Ces formules nous disent qu'on doit avoir

$$\gamma^2_{313}=0,\ \gamma^3_{123}+\gamma^3_{321}=0 \tag{10′}$$

car autrement l'équation (2313) ou (3123) constitue avec (3) et (4) six équations indépendantes.

Considérons maintenant les équations (5′) en tenant compte que les composantes (5) sont nulles et que les formules (9) soient vérifiées. Elles s'écrivent

$$a^1_1+2\gamma^3_{132}a^1_3=0,\ \gamma^2_{121}a^1_3-\gamma^3_{123}a^2_3=0,\ \gamma^3_{123}[a^1_1+a^2_2]-\gamma^3_{131}a^1_2-\gamma^3_{112}a^1_3=0. \tag{11}$$

Supponons maintenant que nous avons $\gamma^3_{131}\neq 0$. En ce cas pour n'avoir pas trois équations indépendantes dans les a^i_i il faut que γ^3_{123}, γ^3_{112} soient nulles et la dernière des équations (11) devient $a^1_2=0$. Donc cette équation forme avec les (3) et l'équation (3113) six équations indépendantes. Il faut donc que γ^3_{131} soit nul, mais en ce cas les équations (9) nous disent que γ^2_{121} doit être aussi nul. Donc nous avons les conditions

$$\gamma^2_{121}=\gamma^3_{131}=0. \tag{11′}$$

De même, si nous avons $\gamma^3_{112}\neq 0$, il faut que nous ayons $\gamma^3_{123}=0$ et alors la dernière équation (11) constituent avec les (3) et l'équation (3112) six équations indépendantes. Il faut donc que nous ayons

$$\gamma^3_{112}=0. \tag{11″}$$

Considérons maintenant les équations (2213) et (3312). Nous avons en tenant compte des équations (9), (10′) et des identités (3‴)

$$\gamma^2_{212}(a^2_3+a^1_3)=0,\ \gamma^2_{212}[a^1_1+a^2_2]+\cdots =0. \tag{12}$$

Ces équations nous disent que γ^2_{113} et γ^2_{212} doivent être nulles et nous avons

$$\gamma^3_{312}=\gamma^3_{123}=\gamma^3_{231}=\gamma^1_{112}=\gamma^2_{221}=0. \tag{13}$$

Nous avons donc le théorème:

Si un espace A_3 non projectivement euclidien, dont le tenseur de courbure a été réduit à la forme canonique (1) *possède un groupe transitif $\mathcal{G}_7$ toutes les composantes du tenseur de courbure sont nulles sauf $r^1_{223}=1$, r^1_{312}, r^3_{212}.*

Considérons maintenant le cas où toutes les composantes du tenseur de courbure sont nulles sauf

$$r^1_{223}=1,\ r^1_{212}=\alpha,\ r^3_{221}=\beta\,. \tag{13'}$$

En ce cas les équations (3) s'écrivent

$$2a^2_2+a^3_3-a^1_1-\alpha a^1_3=0,\ a^2_1=0,\ a^2_3=0,\ a^3_1=\beta a^1_3\,. \tag{13''}$$

De même les équations (1212) et (3221) s'écrivent

$$\alpha a^2_2=0,\ \beta a^2_2=0 \tag{13'''}$$

de façon que si α, β ne sont pas nulles, en même temps, ce que nous supposons car autrement l'espace A_3 possède un groupe $\mathcal{G}_8$, il faut associer aux équations (13'') l'équation $a^2_2=0$. Nous avons donc les cinq équations

$$a^2_1=a^2_3=a^2_2=0,\ a^3_3=a^1_1+\alpha a^1_3,\ a^3_1=\beta a^1_3 \tag{14}$$

et il est facile à voir que toutes les autres équations (2) que nous n'avons pas considérées sont identiquement vérifiées.

III

Observons que le groupe de stabilité $\mathcal{G}_4$ est défini, en tenant compte qu'une au moins des quantités α, β doit être différente de zéro, par les équations (14). Ces équations nous disent que le groupe $\mathcal{G}_4$ s'écrit

$$\begin{aligned} x'^1&=a^1_1x^1+a^1_2x^2+a^1_3x^3\,,\\ x'^2&=x^2\,,\\ x'^3&=\beta a^1_3x^1+a^3_2x^2+(a^1_1+\alpha a^1_3)x^3 \end{aligned} \tag{15}$$

et il est par conséquent défini par les transformations infinitésimales

$$\begin{gathered} X_4=x^2\frac{\partial f}{\partial x^1}\,,\ \ X_5=x^2\frac{\partial f}{\partial x^3}\,,\ \ X_6=x^3\frac{\partial f}{\partial x^1}+(\beta x^1+\alpha x^3)\frac{\partial f}{\partial x^3}\,,\\ X_7=x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}\,. \end{gathered} \tag{15'}$$

Les espaces A_3 ayant toutes les composantes de la courbure nulles sauf celles données par les formules (13'), où α, β sont des constantes, existent comme nous montrent les espaces A_3 dont les composantes non nulles de la connexion sont données par les formules

$$\Gamma^1_{22}=x^3-\alpha x^1,\ \ \Gamma^3_{22}=\beta x^1 \tag{16}$$

ce qu'on peut facilement vérifier, car pour un tel espace les parties quadratiques des composantes du tenseur le courbure $\Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl}-\Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk}$ sont nulles et cela à cause du fait que le seul indice qui figure en bas ne figure pas en haut.

Quant aux composantes du tenseur dérivé de courbure

$$\Gamma^i_{jkl,p}=\Gamma^i_{skl}\Gamma^s_{jp}+\Gamma^i_{jsl}\Gamma^s_{kp}+\Gamma^i_{jks}\Gamma^s_{lp}-\Gamma^s_{jkl}\Gamma^i_{sp}$$

elles sont toutes nulles. En effet, le dernier terme ne peut contenir aucun terme non nul car Γ^i_{sp} peutent être non nuls seulement pour $s=2$ et Γ^2_{jkl} sont toutes nulles. D'autre part l'indice p doit être égal à deux et l'indice s dans les autres termes doit être égal à 1 ou à 3, mais Γ^i_{1kl}, Γ^i_{3kl} sont toutes nulles. Quant aux quantités $\Gamma^i_{j1l}\Gamma^1_{k2}$, $\Gamma^i_{j3l}\Gamma^3_{k2}$ elles ne peuvent être différentes de zéro car k, l ne peuvent être égaux à deux. Il en est de même des quantités $\Gamma^i_{jk1}\Gamma^1_{l2}$, $\Gamma^i_{jk3}\Gamma^3_{l2}$. Il en résulte donc que les espaces (16) sont des espaces symétriques.

Considérons maintenant le groupe de transformations en lui-même de l'espace donné par les formules (16). Nous avons les formules[1)]

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k}=\Gamma'^i_{22}\frac{\partial x'^2}{\partial x^j}\frac{\partial x'^2}{\partial x^k}-\Gamma^1_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^1}-\Gamma^3_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^3} \tag{17}$$

où Γ'^1_{22}, Γ'^3_{22} sont données par les formules (16) à variables accentuées. Ces formules nous disent pour $k\neq 2$ que la variable x'^2 est une fonction linéaire dans les variables x^1, x^3. Donc nous avons

$$x'^2=Ax^1+Bx^3+\varphi(x^2)\,, \tag{17'}$$

où A, B sont des constantes et les formules (17) pour $j=k=2$ nous donnent

$$\varphi''=-(x^3-\alpha x^1)A-\beta x^1 B$$

qui ne peut pas être vérifiée pour $\beta\neq 0$ que si $A=B=0$ et $\varphi''=0$, donc il en résulte que dans le cas $\beta\neq 0$, nous avons

$$x'^2=ax^2+b\,.$$

Quant aux x'^1 et x'^3 les formules (17) pour $k\neq 2$ nous disent qu nous avons

$$x'^1=rx^1+sx^3+p(x^2),\quad x'^3=\lambda x^1+\mu x^3+q(x^2)$$

où r, s, λ, μ sont des constantes.

Quant aux formules (17) pour $j=k=2$ et pour $i=1, 3$, elles nous donnent

$$\begin{aligned} p''&=[(\lambda x^1+\mu x^3+q)-\alpha(rx^1+sx^3+p)]a^2-[(x^3-\alpha x^1)r+\beta x^1 s]\,,\\ q''&=\beta(rx^1+sx^3+p)a^2-(x^3-\alpha x^1)\lambda-\beta\mu x^1\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Comme les premiers membres ne dépendent que de la variable x^2, il faut

1) D'autre auteurs utilisent Γ^i_{jk} changées de signe.

que les seconds membres ne dépendent pas de x^1 et x^3, donc que nous ayons

$$(18') \qquad \begin{aligned} &(\lambda-\alpha r)a^2+\alpha r-\beta s=0, \ (\mu-\alpha s)a^2-r=0\,, \\ &\beta ra^2+\alpha\lambda-\beta\mu=0, \ \beta sa^2-\lambda=0\,. \end{aligned}$$

Nous avons ici quatre équations linéaires et homogènes dans r, s, λ, μ et comme r et μ ne peuvent pas être nulles, le déterminant du système doit être nul. On vérifie facilement que ce déterminant est un polynome en a qui possède la racine $a=1$, qui est la seule acceptable pour nous, car a ne peut être une constante, que si cette constante est égale 1. En supposant $a=1$, les équations (18′) deviennent

$$\lambda=\beta s\,, \quad \mu=r+\alpha s\,.$$

Quant aux équations (18) elles nous donnent encore

$$p''=q-\alpha p\,, \quad q''=\beta p\,.$$

On voit donc que la fonction p satisfait à l'équation différentielle homogène et à coefficients constants

$$(19) \qquad p^{\prime v}+\alpha p''-\beta p=0$$

En supposant que p est une solution générale de cette équation, p contient alors quatre constantes arbitraires et q est donné par $p''+\alpha p$ et le groupe de l'espace A_3 dans le cas $\beta\neq 0$ peut s'écrire

$$(20) \qquad x'^1=rx^1+sx^3+p, \ x'^2=x^2+b, \ x'^3=\beta sx^1+(r+\alpha s)x^3+p''+\alpha p$$

et contient effectivement 7 constantes arbitraires et précisement r, s, b et les quatres constantes intervenant dans p.

IV

Supposons maintenant que nous avons un espace A_n dont les composantes de la connexion sont toutes nulles sauf les (16) avec $\beta\neq 0$. En ce cas les formules (17) nous disent pour $i=2$ qu'on peut avoir dans x'^2 aussi des termes en x^ρ $(\rho>3)$ mais les mêmes formules pour $i=1$ et 3 nous disent que cela n'est pas possible pour $\beta\neq 0$ que si r est nul. De même les formules (17) pour i égal à 1 et à 3 et pour $j=k=2$, nous montrent que x'^1 et x'^3 ne peuvent pas contenir des termes en x^ρ. Le groupe de l'espace A_n $(n>3)$ à connexion (16) avec $\beta\neq 0$ est défini par les formules (20) et par les formules

$$(20') \qquad x'^\rho=a^\rho_2 x^2+a^\rho_\sigma x^\sigma+a^\rho \qquad (\rho, \sigma=4,\cdots, n)\,.$$

Par conséquent il contient $(n-1)(n-3)+7=n^2-4n+10$ paramètres.

Nous avons donc le théorème:

Les espaces A_n dont les composantes non nulles de la connexion sont données par les formules (16) *avec $\beta\neq 0$ possèdent des groupes de transformations en eux-mêmes à $n^2-4n+10$ paramètres, donnés par les formules* (20) *et* (20′).

Il reste à considérer maintenant le groupe des espaces A_n ($n \geqq 3$) dont la connexion est donnée par les formules (16) avec $\beta=0$. Supposons que $n=3$. En ce cas les formules (17) pour $i=2$ nous disent que x'^2 est défini par la formule (17′) avec $A=0$ et $\varphi(x^2)=ax^2+b$, a et b étant des constantes. Les formules (17) pour $i=1$ s'écrivent

$$\frac{\partial^2 x'^1}{(\partial x^1)^2}=0,\ \frac{\partial^2 x'^1}{\partial x^1 \partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 x'^1}{\partial x^1 \partial x^3}=0,\ \frac{\partial^2 x'^1}{(\partial x^2)^2}=(x'^3-\alpha x'^1)a^2-(x^3-\alpha x^1)\frac{\partial x'^1}{\partial x^1},$$

(21)

$$\frac{\partial^2 x'^1}{\partial x^2 \partial x^3}=(x'^3-\alpha x'^1)aB,\ \frac{\partial^2 x'^1}{(\partial x^3)^2}=(x'^3-\alpha x'^1)B^2.$$

Il en résulte donc que nous avons

$$x'^1=rx^1+m(x^2, x^3)$$

où r est une constante. De même les formules (17) pour $i=3$ nous disent qu'on doit avoir

$$x'^3=\rho x^2+\mu x^3+\tau$$

où ρ, μ, τ sont des constantes.

Les dernières formules (21) nous disent que les secondes membres ne doivent pas dépendre de x^1, donc que nous avons

$$\alpha r(1-a^2)=0,\ \alpha raB=\alpha rB^2=0.$$

Comme on ne peut pas avoir $r=0$, il faut que nous ayons $a=1$ et $B=0$. Les équations (21) nous disent alors que nous avons $x'^1=rx^1+sx^3+p(x^2)$ et nous avons aussi la condition

$$p''=(\mu-\alpha s-r)x^3+\rho x^2+\tau-\alpha p.$$

Il faut donc que nous ayons aussi $\mu-\alpha s-r=0$ et le groupe de l'espace A_3 avec $\beta=0$ est donc donné par les mêmes formules (20), dans lesquelles $\beta=0$ et où p satisfait à l'équation (19) avec $\beta=0$, ou bien à l'équation

$$p''+\alpha p=\rho x^2+\tau, \tag{21′}$$

où ρ, τ sont des constantes.

Dans le cas d'un espace A_n ($n \geqq 3$) avec $\beta=0$, on peut écrire, comme on peut voir facilement, le groupe sous la forme

$$\begin{aligned} x'^1&=rx^1+sx^3+p+a_\beta{}^1 x^\beta \qquad (\beta, \gamma=4,\cdots, n),\\ x'^2&=x^2+b,\\ x'^3&=(r+\alpha s)x^3+\rho x^2+\tau+\alpha a_\beta{}^1 x^\beta,\\ x'^\beta&=a_2{}^\beta x^2+a_\gamma{}^\beta x^\gamma+a^\beta \end{aligned}$$

où p satisfait à l'équation (21′) et ce groupe contient $n(n-3)+7=n^2-3n+7$ paramètres.

En conclusion nous avons le théorème suivant:

Le groupe de transformations en lui-même de l'espace A_3 à connexion (16) *est toujours donné par les formules* (20) *où p satisfait à l'équation* (19) *et il dépend de* 7 *paramètres. Dans le cas de l'espace A_n ($n>3$), le groupe contient* n^2-3n+7 *ou* $n^2-4n+10$ *paramètres suivant que* $\beta=0$ *ou* $\beta\neq 0$.

Bibliographie

[1] G. Vranceanu, Leçons de géométrie différentielle, vol. I (1947), p. 263 et vol. II (1951), (en roumain).

[2] I. P. Egorof, Sur l'ordre du groupe de mouvement d'un espace à connexion affine (en russe), Doklady Ak. Nauk **57** (1947), p. 867.

[3] G. Vranceanu, Sur les espaces à connexion à groupe maximum de transformations en eux-mêmes, Comptes Rendus, **229** (1949), p. 543.

[4] G. Vranceanu, Propriétés différentielles globables des espaces A_n à groupe maximum $\mathcal{G}_{n^2}$, Bul. Stiinţific Bucarest, VI (1954), 49-59.

[5] G. Vranceanu, Asupra spaţiilor neproiectiv euclidiene fără torsiune cu grup maxim, Revista Universitatii C. I. Parhon (1954), 87-100.

[6] Y. Muto, On the curvature of an affinely connected manifold A_n ($n\geqq 7$) admitting a group of affine motions $\mathcal{G}_r$ of order $r>n^2-2n$, Tensor, Ser., **5** (1955), 39-53.

[7] K. Yano, Groups of motions and groups of affine connections, Convengo di geometria dif. Italia (1953), p. 229.

[8] V. Dumitraş, Determinarea spaţiilor A_3 cu grup $\mathcal{G}_7$, Studii şi cercetări matematice, **8** (1957).

[9] S. Ishihara, Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions, J. Math. Soc. Japan, **7** (1955), 345-370.

[10] S. Ishihara, Groups of projective transformations on a projectively connected manifold, Jap. J. Math., **25** (1955), 37-80.