Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 9, No. 1, January, 1957

Une remarque sur les applications du Théorème de Hille Yosida.

Par J. L. LIONS

(Reçu le 28 Juillet, 1956)

1. Introduction.

Dans un article récent, Yosida [10] a appliqué la méthode des semi-groupes au problème de Cauchy pour les opérateurs $A+\partial^2/\partial t^2$, A étant un opérateur différentiel du deuxième ordre elliptique, en x (x=variable d'espace).

Le but de cette note est de montrer qu'une méthode analogue s'applique aux opérateurs

$$A+\frac{\partial}{\partial t}B+\frac{\partial^2}{\partial t^2}C\,, \tag{*}$$

où A est un opérateur elliptique en x d'ordre $2m$, m quelconque, B un opérateur convenable d'ordre m, C un opérateur d'ordre 0, le problème de Cauchy étant remplacé par des problèmes mixtes (au sens de M. Hadamard) très généraux.

Le N° 2 donne un théorème général qui permet d'appliquer la théorie de Hille Yosida (Hille [1], Yosida [11]), ou bien la méthode de la transformation de Laplace (Lions [2], Chap. 2). Cette application est faite au N° 3. Des exemples sont brièvement donnés au N° 4.

Il n'y a aucune difficulté à généraliser ce qui suit au cas de systèmes différentiels.

Signalons également que l'on peut (par des méthodes complètement différentes) remplacer A, B, C, par des opérateurs $A(t), B(t), C(t)$, convenables, dépendant de t; c'est ce qui est déja fait dans Višik [9], pour les conditions aux limites de Dirichlet, mais vaut pour d'autres conditions aux limites.

2.

Soit Ω un ouvert de R^n; $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$, $dx=dx_1\cdots dx_n$. On désigne par H^0 l'espace $L^2(\Omega)$ des (classes de) fonctions de carré sommable sur

Ω, pour dx; on pose, pour $u, v \in H^0$:

$$(u, v)_0 = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx, \qquad |u|_0^2 = (u, u)_0.$$

On désigne par H^m l'espace des $u \in H^0$ tels que

$$D^p u \in H^0 \quad \text{pour tout} \quad |p| \leqq m^{1)};$$

si $u \in H^m$, on pose

$$|u|_k^2 = \sum_{p=k} |D^p u|_0^2, \quad ||u||_m^2 = \sum_{k=0}^{k=m} |u|_k^2.$$

Muni de la norme $||u||_m$, H^m est un espace de Hilbert. On désigne par H_0^m l'adhérence dans H^m du sous espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact[2].

On suppose que l'ouvert Ω est m-régulier (cf. Lions [4]) ce qui entraîne ceci: il existe des constantes a et b telles que, pour tout $u \in H^m$, on ait

$$|u|_k \leqq a|u|_m + b|u|_0, \quad 1 \leqq k \leqq m-1.$$

Les normes $||u||_m$ et $(|u|_m^2 + |u|_0^2)^{1/2}$ sont alors équivalentes sur H^m.

Soit V un sous espace vectoriel fermé de H^m, avec

$$H_0^m \subset V \subset H^m.$$

On donne sur $V \times V$ une forme sesquilinéaire[3] continue:

$$u, v \to a(u, v);$$

on suppose que cette forme s'écrit

(1) $$a(u, v) = a_0(u, v) + a_1(u, v),$$

avec

(H 1) (i) $\overline{a_0(u, v)} = a_0(v, u)$ pour tout $u, v \in V$,

$a_0(u, u) \geqq c_0 |u|_m^2$, $c_0 > 0$, pour tout $u \in V$.

(ii) $|Re\, a_1(u, v)| \leqq c_1 ||u||_m |v|_0$[4].

---

1) On dérive au sens des distributions; cf. Schwartz [6]. Les notations sont celles de cet ouvrage.

2) Avec les notations de Lions [2], on a: $H^m = \mathfrak{E}_{L^2}^m(\Omega)$, $H_0^m = \mathfrak{D}_{L^2}^m(\Omega)$. Pour ces espaces cf. par exemple: [7], [8], [3].

3) C'est à dire: linéaire en u, semi linéaire en v, donc $a(u, \lambda v) = \bar{\lambda} a(u, v)$, $\lambda \in C$.

4) On désigne par c_i des constantes diverses.

La forme $a(u, v)$ définit un opérateur $A \in \mathfrak{L}(V; \mathfrak{D}'(\Omega))$[5] de la façon suivante: la forme semi linéaire

$$v \rightarrow a(u, v)$$

est continue sur $\mathfrak{D}(\Omega)$, donc de la forme

$$a(u, v) = \langle Au, \bar{v} \rangle, \quad u \in V, v \in \mathfrak{D}(\Omega), \tag{2}$$

où $Au \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, le crochet désignant la dualité entre $\mathfrak{D}'(\Omega)$ et $\mathfrak{D}(\Omega)$; l'application $u \rightarrow Au$ est linéaire continue de V dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

Espace N (cf. [2], Chap. I, 1): c'est l'espace des $u \in V$ tels que $Au \in H^0$ et que

$$(Au, v)_0 = a(u, v) \text{ pour tout } v \in V. \tag{3}$$

On suppose que $\mathfrak{D}(\Omega) \subset N$.

On donne maintenant deux autres opérateurs: B et C,

$$B \in \mathfrak{L}(V; H^0), \quad C \in \mathfrak{L}(H^0; H^0),$$

avec

$$|Re(Bv, v)_0| \leqq c_2 |v|_0^2 \text{ pour tout } v \in V, \tag{H 2}$$

$$(Cf, f)_0 \geqq r|f|_0^2, \ r > 0, \text{ pour tout } f \in H^0. \tag{H 3}$$

Il résulte de (H 3) que C est inversible.

Le lemme suivant est évident:

LEMME 1. *Sous les hypothèses* (H 1) (i) *et* (H 3), *la quantité* $((u, v)) = a_0(u, v) + (Cu, v)_0$ *définit sur* $V \times V$ *une structure hilbertienne de norme correspondante équivalente à* $\|u\|_m$.

On considère maintenant l'espace produit $V \times H^0$; on le munit de la structure hilbertienne suivante: si $\{u, v\} \in V \times H^0$, la norme est $|||\{u, v\}|||$ donnée par

$$|||\{u, v\}|||^2 = ((u, u)) + (Cv, v)_0.$$

On désigne par $\mathfrak{A}$ l'opérateur linéaire

$$\{u, v\} \rightarrow \{v, -C^{-1}Au - C^{-1}Bv\}$$

continu de $N \times V$ dans $V \times H^0$.

De façon générale, si $G \in \mathfrak{L}(V \times H^0; V \times H^0)$, on désigne par $|G|$ la norme de G dans cet espace, $V \times H^0$ étant muni de la norme $|||\{u, v\}|||$.

---

5) Si X et Y sont deux espaces vectoriels topologiques, $\mathfrak{L}(X; Y)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.

On va montrer le

THÉORÈME 1. *On suppose que* Ω *est m-régulier et que* (H 1), (H 2) *et* (H 3) *ont lieu. L'opérateur*

$$1-\lambda^{-1}\mathfrak{A}, \quad \lambda\in R,$$

est pour $|\lambda|$ *assez grand, un isomorphisme de* $N\times V$ *sur* $V\times H^0$*; soit* G_λ *son inverse; donc*

$$G_\lambda\in\mathfrak{L}(V\times H^0\,;\, N\times H^0)\,,$$

et donc en particulier

$$G_\lambda\in\mathfrak{L}(V\times H^0\,;\; V\times H^0)\,.$$

Dans ce dernier espace, on a

$$|G_\lambda|\leqq 1+|\lambda|^{-1}\beta,\ \beta>0\,. \tag{4}$$

Notons d'abord que l'équation

$$(1-\lambda^{-1}\mathfrak{A})\,\{u, v\}=\{f, g\},\ \ u\in N, v\in V, f\in V, g\in H^0\,,$$

équivaut à

$$u-\lambda^{-1}v=f\,, \tag{5}$$

$$Cv+\lambda^{-1}Au+\lambda^{-1}Bv=Cg\,, \tag{6}$$

d'où l'on tire

$$Au+\lambda Bu+\lambda^2 Cu=\lambda Cg+\lambda Bf+\lambda^2 Cf\,,$$

de sorte que la première partie du Théorème résulte du

LEMME 2. *Pour* $|\lambda|$ *assez grand,* λ *réel,* $A+\lambda B+\lambda^2 C$ *est un isomorphisme de* N *sur* H^0.

DÉMONSTRATION. Soit f donné dans H^0; l'équation

$$Au+\lambda Bu+\lambda^2 Cu=f,\ u\in N\,,$$

équivaut à la résolution dans V de

$$\mathfrak{B}(u, v)=a(u, v)+\lambda(Bu, v)_0+\lambda^2(Cu, v)_0=(f, v)_0$$

pour tout $v\in V$ (cf. [2], Chap. I.) et cette équation admet dans V une solution unique si, pour $|\lambda|$ assez grand, on a

$$Re\,\mathfrak{B}(u, u)\geqq\varepsilon\|u\|_m^2,\ \varepsilon>0, \text{ pour tout } u\in V.$$

Or

$$Re\,\mathfrak{B}(u, u)=((u, u))+(\lambda^2-1)\,(Cu, u)_0+Re\,a_1(u, u)+\lambda Re(Bu, u)_0\,.$$

En utilisant maintenant (H 1) et (H 2), on en déduit

$$Re\,\mathfrak{B}(u,u) \geqq ((u,u)) + (\lambda^2-1)\,(Cu,u)_0 - c_3(\|u\|_m + |\lambda|\,|u|_0)\,|u|_0 \geqq$$

$$\geqq ((u,u)) - \frac{1}{2}\,c_3\varepsilon\|u\|_m^2 + (\lambda^2-1)\,(Cu,u)_0 - c_3\left(\frac{1}{2\varepsilon} + |\lambda|\right)|u|_0^2\,.$$

On choisit ε de sorte que

$$((u,u)) - \frac{1}{2}\,c_3\varepsilon\|u\|_m^2 \geqq \frac{1}{2}\,((u,u)) \text{ par exemple};$$

on peut alors choisir $|\lambda|$ assez grand pour que

$$(\lambda^2-1)\,(Cu,u)_0 - c_3\left(\frac{1}{2\varepsilon} + |\lambda|\right)|u|_0^2 \geqq 0\,,$$

d'où le lemme.

Il reste à démontrer (4).

On déduit de (5) et (6):

$$((f,f)) + 2Re(Cg,v)_0 = ((u,u)) + \lambda^{-2}((v,v)) - 2\lambda^{-1}Re((u,v)) +$$
$$+ 2(Cv,v)_0 + 2\lambda^{-1}Re(a(u,v) + (Bv,v)_0)\,.$$

Mais

$$2Re(Cg,v)_0 \leqq (Cg,g)_0 + (Cv,v)_0$$

donc

$$|||\{f,g\}|||^2 \geqq |||\{u,v\}|||^2 + 2\lambda^{-1}Re(a(u,v) - ((u,v))) + 2\lambda^{-1}Re(Bv,v)_0\,.$$

Mais

$$a(u,v) - ((u,v)) = a_1(u,v) - (Cu,v)_0$$

de sorte qu'en utilisant (H 1) on a

$$|Re(a(u,v) - ((u,v)))| \leqq c_4\|u\|_m|v|_0$$

et donc, avec (H 2)

$$(7) \qquad |||\{f,g\}|||^2 \geqq |||\{u,v\}|||^2 - 2c_5|\lambda|^{-1}(\|u\|_m|v|_0 + |v|_0^2)$$

et comme

$$2\|u\|_m|v|_0 \leqq c_6|||\{u,v\}|||^2\,,$$

(7) donne:

$$(8) \qquad |||\{f,g\}|||^2 \geqq (1 - c_7|\lambda|^{-1})\,|||\{u,v\}|||^2\,.$$

Mais pour $|\lambda|$ assez grand et β avec $2\beta > c_7$, on a

$$(1 - c_7|\lambda|^{-1}) \geqq (1 + |\lambda|^{-1}\beta)^{-2}$$

de sorte que (8) donne

$$|||\{u, v\}||| \leqq (1+\beta|\lambda|^{-1})|||\{f, g\}||| \text{ pour } |\lambda| \text{ assez grand},$$

ce qui démontre la deuxième partie du Théorème.

3. Problèmes mixtes.

On déduit du Théorème 1 et du Théorème de Hille Yosida que $\mathfrak{A}$ est générateur infinitésimal d'un groupe, $t \to X(t)$, représentation continue de R dans $\mathfrak{L}(V \times H^0; V \times H^0)$, muni de la topologie de la convergence simple forte. Alors si $f \in N, g \in V$, la fonction

$$t \to X(t)\{f, g\} = \{u(t), v(t)\}$$

est continue de $t \geqq 0$ dans $N \times V$, une fois continûment différentiable de $t \geqq 0$ dans $V \times H^0$, et vérifie

$$\frac{d}{dt}\{u(t), v(t)\} = \mathfrak{A}\{u(t), v(t)\},$$

donc

$$\frac{d}{dt} u(t) = v(t), \frac{d}{dt} v(t) = -C^{-1}(Au(t) + Bv(t)),$$

avec $u(0) = f, v(0) = g$. Il en résulte que $t \to \frac{d}{dt} u(t)$ est une fois continûment différentiable de $t \geqq 0$ dans H^0, donc que $\frac{d^2}{dt^2} u = -C^{-1}(Au(t) + B\frac{d}{dt} u(t))$, donc

$$\text{(1)} \qquad Au(t) + B\frac{d}{dt} u(t) + C\frac{d^2}{dt^2} u(t) = 0, t \geqq 0.$$

On a donc le

THÉORÈME 2. *On suppose que les hypothèses du Théorème* 1 *ont lieu. Soit $f \in N, g \in V$. Il existe une fonction $t \to u(t)$, et une seule*[6] *deux fois continûment différentiable de $t \geqq 0$ dans H^0, une fois continûment différentiable de $t \geqq 0$ dans V, continue de $t \geqq 0$ dans N, vérifiant* (1), *telle que $u(t) \to f$ dans N, et*

---

6) L'unicité résulte par exemple du Théorème 3. Plus simplement, il suffit de multiplier (1) par $(s-t)\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}(t)$ et intégrer de 0 à s.

$$\frac{d}{dt}u(t) \to g \text{ dans } V, \text{ si } t \to 0.$$

Notons maintenant qu'il résulte du Théorème 1 que $p-\mathfrak{A}$ est un isomorphisme de $N \times V$ sur $V \times H^0$ [7] pour

$$Re\, p = \xi > \beta,$$

avec

$$|(p-\mathfrak{A})^{-1}| \leqq 1/(\xi-\beta), \ \xi > \beta.$$

Comme l'équation

(2) $$Au + pBu + p^2Cu = f, \ f \in H^0, u \in N,$$

est équivalente à

$$(p-\mathfrak{A})\{u, v\} = \{0, C^{-1}f\},$$

on voit donc que (2) admet une solution unique

(3) $$u = G(p)f, \ \xi > \beta.$$

On a

$$((u, u)) \leqq |||\{u, v\}|||^2 \leqq (\xi-\beta)^{-1}|f|_0^2.$$

Enfin

$$|Au|_0 \leqq |f|_0 + |p|^2|Cu|_0 + |p|\,|Bu|_0,$$

donc

$$||G(p)|| \leqq c(1+|p|^2), \ c = \text{constante},$$

$||G(p)||$ désignant la norme de $G(p)$ dans $\mathfrak{L}(H^0; N)$.

Il résulte alors de [2], p. 99, 100 que l'on a le

Théorème 3. *On suppose que les hypothèses du Théorème* 1 *ont lieu. Dans ces conditions, l'opérateur*

$$A + \frac{\partial}{\partial t}B + \frac{\partial^2}{\partial t^2}C$$

7) On note d'abord que l'inégalité (4) du Théorème 1 entraine que

$$|(\lambda-\mathfrak{A})^{-1}| \leqq (\lambda-\beta)^{-1} \text{ pour } \lambda > 0 \text{ assez grand},$$

d'où l'on déduit le résultat en utilisant la relation

$$p-\mathfrak{A} = (\lambda-\mathfrak{A})(1+(p-\lambda)G_\lambda).$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{D}'_+(t, N)$ (*resp.* $\mathfrak{D}'_-(t, N)$)[8] *sur*

$$\mathfrak{D}'_+(t, H^0) \ (\textit{resp. } \mathfrak{D}'_-(t, H^0)) .$$

L'isomorphisme inverse est donné par un produit de composition en t à valeurs vectorielles avec une distribution liée à X par une relation analogue à [2], Théorème 14.2 p. 134.

4. Exemples.

Soit

$$a_0(u, v) = \sum_{|p|,|q|\leq m} \int_\Omega a^0_{pq}(x) D^q u \overline{D^p v} dx, \tag{1}$$

avec

$$a^0_{pq} = a^0_{pq} \in L^\infty(\Omega)^{9)}, \text{ et de façon que (H 1) (i) ait lieu.}$$

On peut en particulier avoir $a^0_{pq} = 0$ si $|p| \neq m, |q| \neq m$. On peut prendre ensuite

$$a_1(u, v) = \sum_{|p|\leq m} \int_\Omega a^1_p (D^p u) \bar{v} dx, \ a^1_p \in L^\infty(\Omega) ; \tag{2}$$

alors

$$|a_1(u, v)| \leq c \|u\|_m |v|_0 ,$$

donc (H 1) (ii) a en particulier lieu.

L'opérateur A est

$$A = A_0 + \sum a^1_p D^p, \text{ avec } A_0 = \sum (-1)^{|p|} D^p (a^0_{pq} D^q) .$$

Faisant varier V on en déduit des espaces N dont les éléments vérifient des conditions aux limites de types très variés (cf. [2], p. 69–79).

Supposons maintenant que la frontière Γ de Ω soit une variété de dimension $n-1$, indéfiniment différentiable et bornée. On peut alors définir $\frac{\partial^k}{\partial n^k} u$, $k \leq m-1$, "valeur en moyenne" de la dérivée normale d'ordre k de u sur Γ; c'est un élément de l'espace $L^2(\Gamma)$ des

---

8) On désigne par $\mathfrak{D}_-(R_t)$ (resp. $\mathfrak{D}_+(R_t)$) l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur R_t, à support limité à droite (resp. à gauche), muni de la topologie de Schwartz (cf. Schwartz [6], t. 2). Si E est un espace vectoriel topologique, $\mathfrak{D}_+'(t, E) = \mathfrak{L}(\mathfrak{D}_-(R_t) ; E)$ (resp. $\mathfrak{D}_-'(t, E) = \mathfrak{L}(\mathfrak{D}_+(R_t) ; E)$) est l'espace des distributions en t à valeurs dans E, à support limité à gauche (resp. à droite).

9) $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables et bornées sur Ω.

fonctions de carré sommable sur Γ pour la measure superficielle. L'application $u \to \frac{\partial^k}{\partial n^k} u$ est continue de H^m dans $L^2(\Gamma)$. On peut dans ces conditions ajouter à l'expression (1) de $a_0(u, v)$ la quantité

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} \left(H_k \frac{\partial^k}{\partial n^k} u, \frac{\partial^k}{\partial n^k} v \right)_{L^2(\Gamma)}, \tag{3}$$

où $H_k \in \mathfrak{L}(L^2(\Gamma); L^2(\Gamma))$, $\geqq 0$. Ceci définit alors une nouvelle forme $a(u, v)$, à laquelle correspond le même opérateur A mais de nouvelles conditions aux limites.

Donnons pour terminer un exemple où (H 2) a lieu. On suppose que $V = H_0^m$ et que $B = \sum b_p D^p$, $b_p \in R$, $|p| \leqq m$, et $|p|$ étant impair. Alors, pour $u, v \in H_0^m$ on a

$$Re(Bu, u)_0 = 0,$$

donc (H 2) a en particulier lieu.

REMARQUE. M. Yoshida m'a aimablement signalé qu'une application analogue au théorème 2 du théorème de Hille Yosida a été annoncée par P. D. Lax, Abstract 180, Bull. Amer. Math. Soc. 58, No. 2, 1952, 182.

Institut Mathématique Université de Nancy

Bibliographie

[1] Hille, Functional Analysis and Semi groups, New York (1948).

[2] Lions, Problèmes aux limites en théorie des distributions, Acta Math., 94 (1955), pp. 13-153.

[3] ———, Sur les problèmes aux limites du type dérivée oblique. Ann. of Math., 64 (1956), pp. 207-239.

[4] ———, Ouverts m-réguliers, Ouvrage en Hommage à M. Beppo Levi, Buenos Aires, 1956.

[5] Phillips, Perturbation theory for semi groups of linear operators, Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953), p. 199.

[6] Schwartz, Théorie des distributions, t. I et II. Paris, Hermann, 1950 et 1951.

[7] ———, Séminaire (II). Paris. 1954-55.

[8] Soboleff, Applications de l'Analyse fonctionnelle à la Physique Mathématique, Léningrad, 1950.

[9] Visik, Problème de Cauchy pour des équations à coefficients opérateurs..., Mat. Sbor., 39 (1956), pp. 51-148.

[10] Yosida, An operator theoretical integration of the wave equation, J. Math. Soc. Japan, 8 (1956), pp. 79-92.

[11] ———, On the differentiability and the representation of one parameter semi groups of linear operators, J. Math. Soc. Japan., 1 (1948), pp. 15-21.