Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 7, Supplement, December, 1955

Über die Struktur der metabelschen Gruppen, IV

Von Kiyosi TAKETA

(Received Nov. 25, 1955)

Dies ist die vierte Mitteilung der vom Verfasser seit 1936 unternommenen Arbeit. Zunächst soll ein kurzer Auszug der Resultate der früheren Mitteilungen[1)] vorausgeschickt werden.

$\mathfrak{G}$ sei eine zweistufige metabelsche Gruppe, die eine gegebene Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ als maximalen Abelschen Normalteiler enthält, so daß die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ Abelsch ist.

Transformiert man $\mathfrak{A}$ mit einem beliebigen Elemente von $\mathfrak{G}$, so erhält man einen Automorphismus von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, und alle diese Automorphismen bilden eine treue Darstellung Γ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$.

Da die Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ als direktes Produkt der Untergruppen, deren Ordnungen voneinander verschiedene Primzahlpotenzen sind, darstellbar ist, und solche Untergruppen bei den Automorphismen von $\mathfrak{A}$ invariant sind, so setzt man o. B. d. A. so voraus, daß $\mathfrak{A}$ eine p-Gruppe ist. Sei

$$e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n \tag{1}$$

ein Basissystem von $\mathfrak{A}$ der Art, daß die Ordnung p^{μ_i} von e_i nicht die von e_j übersteigt, insofern $i<j$ ist, und sei g ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$, dann läßt $g^{-1}e_i g$; $i=1, 2, \cdots, n$, sich durch die Basiselemente von (1) darstellen, in der Art, daß

$$g^{-1}e_i\, g = e_1^{a_{i1}} e_2^{a_{i2}} \cdots\cdots e_n^{a_{in}}. \tag{2}$$

Dementsprechend bilden die Kongruenzmatrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

1) Über die Struktur der metabelschen Gruppen, Japanese J. Math., 13 (1936) 129-232; II, J. Osaka Inst. of Sci. Tech., 2 (1950), 1-28; III, Tohoku Math. J., 2 ser., 4 (1952), 10-32.

eine Abelsche Gruppe Γ nach dem Modul

$$
\left(\begin{array}{cccc} p^{\mu_1} & p^{\mu_2} & \cdots\cdots & p^{\mu_n} \\ p^{\mu_1} & p^{\mu_2} & \cdots\cdots & p^{\mu_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p^{\mu_1} & p^{\mu_2} & \cdots\cdots & p^{\mu_n} \end{array}\right), \tag{4}
$$

die $1\sim$ isomorph zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ wird.

Wenn es umgekehrt eine Abelsche Kongruenzgruppe Γ' mit den Elementen der Gestalt (3) nach dem Modul (4), so kann man stets mindestens eine metabelsche Gruppe $\mathfrak{G}'$ der Art konstruiern, die $\mathfrak{A}$ als maximalen Abelschen Normalteiler enthält, und die Faktorgruppe $\mathfrak{G}'/\mathfrak{A}$ zu Γ' $1\sim$ isomorph wird (I, *S.* 131).

Nun setzen wir (1) entsprechend so voraus, daß $\mathfrak{A}$ vom Typus

$$
(p^{\alpha_1}, \cdots n_1\text{-}mal\,;\, p^{\alpha_2}, \cdots n_2\text{-}mal\,; \cdots ;\, p^{\alpha_m}, \cdots n_m\text{-}mal), \tag{5}
$$

$$
\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m,
$$

so erhält man als Element von Γ statt (3) eine Kongruenzmatrix

$$
\left(\begin{array}{cccc} A_{11} & p^{\alpha_2-\alpha_1}A_{12} & p^{\alpha_3-\alpha_1}A_{13} \cdots\cdots & p^{\alpha_m-\alpha_1}A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & p^{\alpha_3-\alpha_2}A_{23} \cdots\cdots & p^{\alpha_m-\alpha_2}A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m-1,1} & A_{m-1,2} & \cdots\cdots & p^{\alpha_m-\alpha_{m-1}}A_{m-1,m} \\ A_{m1} & A_{m2} & & A_{mm} \end{array}\right) \tag{6}
$$

nach dem Modul

$$
\left(\begin{array}{ccccccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hspace{3em}}^{n_1\ Spalten}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hspace{3em}}^{n_2\ Spalten}} & & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\hspace{3em}}^{n_m\ Spalten}} \\ p^{\alpha_1} \cdots\cdots & p^{\alpha_1} & p^{\alpha_2} \cdots\cdots & p^{\alpha_2} & \cdots\cdots & p^{\alpha_m} \cdots\cdots & p^{\alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p^{\alpha_1} & p^{\alpha_1} & p^{\alpha_2} & p^{\alpha_2} & \cdots\cdots & p^{\alpha_m} & p^{\alpha_m} \end{array}\right), \tag{7}
$$

wobei das Kästchen $A_{\lambda\mu}$ eine n_λ-zeilige und n_μ-spaltige Untermatrix bedeutet.

Wenn man A als Summe von zwei Matrizen:

$$
A = A_0 + pA_*
$$

darstellt der Art, daß die Koeffizienten von A_0 Null oder positive ganze Zahlen kleiner als p sind, so bilden solche Matrizen wie A_0 nach dem Modul p eine Kongruenzgruppe Γ_0 homomorph zu Γ, und wenn die Ordnung von A bei Γ teilerfremd zu p ist, so ist A von derselben Ordnung auch bei Γ_0.

Wenn wir also sowie Γ auch Γ_0 als direktes Produkt zweier Untergruppen der Art darstellen, daß die Ordnung der einen zu p teilerfremd ist, während die andre eine p-Gruppe wird, so werden diese ersteren Untergruppen von Γ bezw. von Γ_0 zueinader $1\sim$ isomorph (I, *S.* 133). A_0 ist eine Kongruenzmatrix in $GF_{(p)}$, und falls $\mathfrak{A}$ vom Typus $(p, p, \cdots, p)$, so wird selbst Γ eine Abelsche Substitutionsgruppe in $GF_{(p)}$.

Wenn $\mathfrak{A}$ vom Typus

(8) $$(p^k, p^k, \cdots\cdots, p^k)$$

ist, und man jedes Element A_i von Γ als

(9) $$A_i = A_0^{(i)} + pA_1^{(i)} + p^2 A_2^{(i)} + \cdots + p^{k-1} A_{k-1}^{(i)}$$

setzen kann, während man als die Koeffizienten der Matrizen $A_\sigma^{(i)}$; $\sigma = 0, 1, \cdots, k-1$, geeignete ganze Zahlen nicht immer kleiner als p benutzt, so daß für jede Zwei Elemente A_s und A_t von Γ stets die folgende Beziehung

(10) $$\begin{aligned}&(A_0^{(s)} + pA_1^{(s)} + \cdots + p^j A_j^{(s)})(A_0^{(t)} + pA_1^{(t)} + \cdots + p^j A_j^{(t)}) \qquad (\mathrm{mod}\, p^k)\\ &= (A_0^{(t)} + pA_1^{(t)} + \cdots + p^j A_j^{(t)})(A_0^{(s)} + pA_1^{(s)} + \cdots + p^j A_j^{(s)}), \qquad 0 \leqq j < k,\end{aligned}$$

besteht, so erzeugen die Kongruenzmatrizen der Gestalt

(11) $$\begin{pmatrix} A_0^{(i)} & & & \\ A_1^{(i)} & \ddots & & \\ A_2^{(i)} & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ A_{k-1}^{(i)} \cdots & A_2^{(i)} & A_1^{(i)} & A_0^{(i)} \end{pmatrix}$$

auch eine Abelsche Substitutionsgruppe Γ_k^* in $GF_{(p)}$ Grades nk, und zwar ist $\Gamma \cong \Gamma_k^*$, mithin führt sich die Frage wieder zum Falle mit dem Abelschen Normalteiler vom Typus $(p, p, \cdots, p)$.

Zunächst beschäftigen wir uns noch allgemeiner mit den Matrizen in $GF_{(p^s)}$ und schicken die folgenden Tatsachen voraus.

(*a*) *Ist A eine irreduzible Matrix des Grades n, so bilden alle mit*

A vertauschbaren Matrizen ein Galois-Feld $GF_{(p^{sn})}$ (I, S. 133).

(b) *Alle Matrizen, die mit einer irreduziblen Matrix vertauschbar sind, sind auch untereinander vertauschbar* (I, S. 134).

(c) *Es gibt in* $GF_{(p^s)}$ *stets eine irreduzible Matrix des Grades* n *und von der Ordnung* $p^{sn}-1$ (I, S. 134).

SATZ 1: Jede irreduzible Abelsche Substitutionsgruppe des Grades n *in* $GF_{(p^s)}$ *ist zyklich, und die Ordnung der Gruppe geht in* $p^{sn}-1$ *auf* (I, S. 134).

SATZ **2**: *Jede reduzible Abelsche Substitutionsgruppe* $\mathfrak{H}$ *in* $GF_{(p^s)}$ *zerfällt, so daß jeder Bestandteil durch die Matrizen von den Gestalten*

$$\begin{pmatrix} E & & & \\ A_{21}E & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{r_i 1} & \cdots\cdots & A_{r_i, r_i-1} & E \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \begin{pmatrix} B_i & & & \\ & B_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_i \end{pmatrix} \tag{12}$$

erzeugt ist, wo $A_{\lambda\mu}$ *und* B_i *die Elemente eines Galois-Feldes* $GF_{(p^{sm_i})}$, *das aus den Matrizen des Grades* m_i *besteht, sind.*

Ist $\mathfrak{H}$ *speziell maximal Abelsch, so stellt dieser Bestandteil eine Gruppe vom Typus*

$$(p^{sm_i}-1, p^{\sigma_{i1}}, p^{\sigma_{i2}}, \cdots)$$

dar (I. S. 137).

Daher nehmen wir o. B. d. A. an, daß $\mathfrak{H}$ maximale Abelsche Gruppe ist, erzeugt durch die Matrizen von den Gestalten

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ a_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

und

$$\begin{pmatrix} b & & & \\ & b & & \\ & & \ddots & \\ & & & b \end{pmatrix}, \tag{14}$$

wobei

(15) $$a_{\lambda\mu}, b \in GF_{(p^u)}, \qquad u = sm,$$

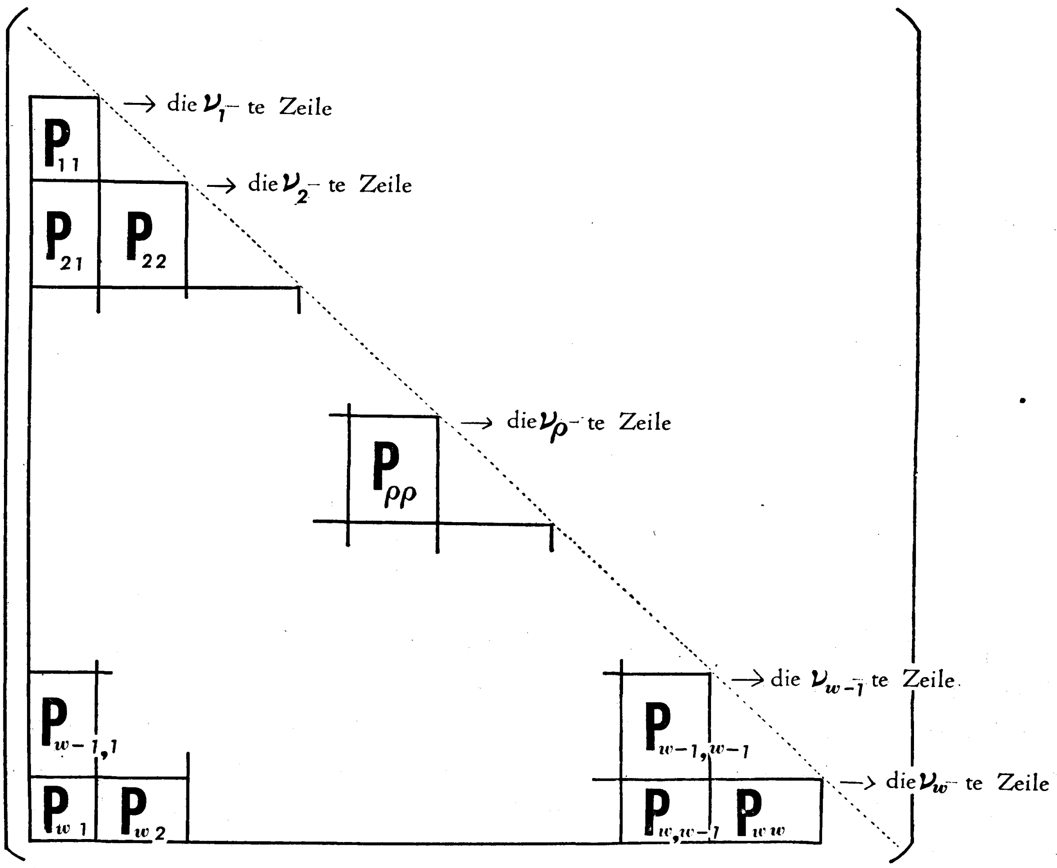
ist (I, *S.* 138).

Wenn man also den Typus von $\mathfrak{H}$ klar machen will, genügt es nur die Invarianten der p zugehörigen Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{H}$ zu bestimmen, weil alle Elemente der Gestalt (14) gesamt eine zyklische Gruppe der Ordnung p^u-1 darstellen.

Wir nennen diejenige Matrix die abgeleitete Gruppenmatrix, die sich aus einer Gruppenmatrix durch Ersetzung der Hauptdiagonalkoeffizienten mit Null ergeben, und bezeichnen insbesondre die abgeleitete Gruppenmatrix von $\mathfrak{P}$ mit $\mathbf{P}$ (I, *S.* 138), ferner verstehen wir unter einem Elemente von $\mathbf{P}$ eine Matrix A der Art, so daß $A+E \in \mathfrak{P}$ wird (I, *S.* 138; III, *S.* 12).

P wird dann von der folgenden Gestalt (I, *S.* 145, *Fig.* (18)):

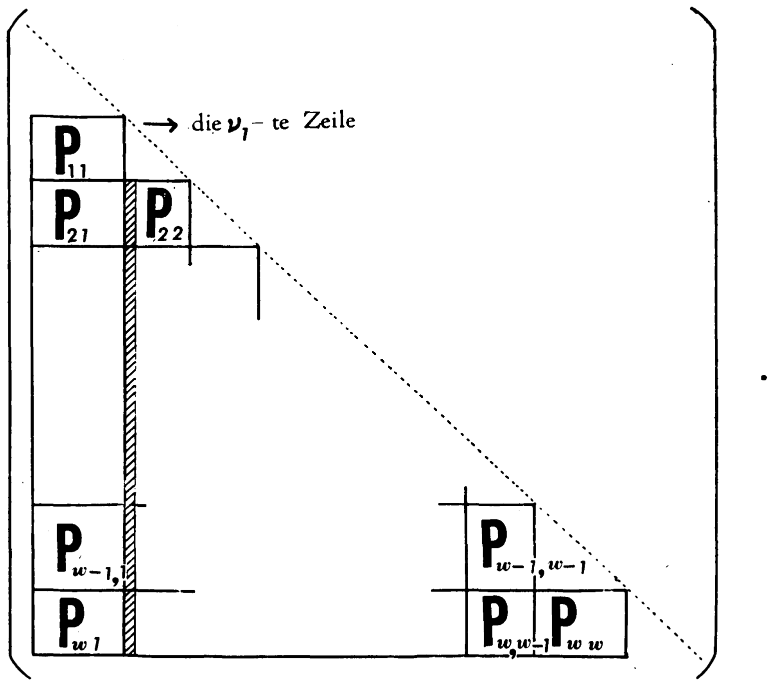
(16)



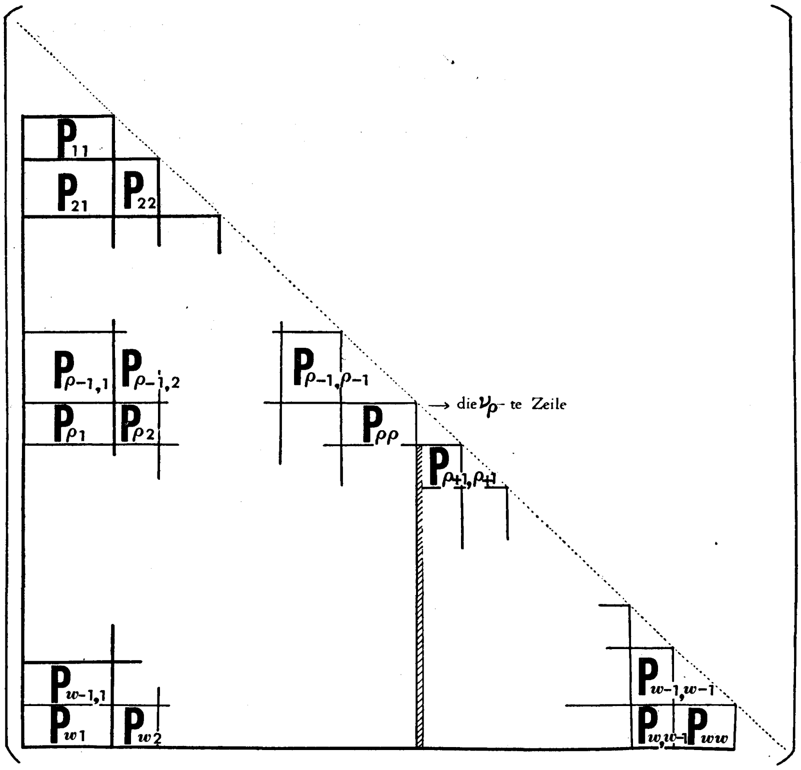
Wir denken uns alle zu **P** äquivalenten Matrizen, und fassen **P** in folgenden drei Formen zusammen.

(*b*) *Die Spalten jedes der Kästchen* $\mathbf{P}_{ii}$; $i=2, 3, \cdots, w-1$, *sind voneinander linear unabhängig, während eine Zeile, etwa die erste, von* $\mathbf{P}_{ww}$ *aus den voneinander linear unabhängigen Koeffizienten besteht, und* $\mathbf{P}_{11} \neq 0$ (III, *S.* 19).

(*c*) *Die erste Zeile von* $\mathbf{P}_{11}$, *d. h. die der* ν_1*-ten Zeile von* **P** *entsprechende, besitzt die voneinander linear unabhängigen Koeffizienten, die* ν_1*-te Spalte von* **P** *verschwindt, während die* ν_1*-te Zeile und alle anderen Zeilen darunter von* **P** *voneinander linear unabhängig werden, d. h.* **P** *nimmt die folgende Gestalt* (III, *S.* 20; *Fig.* (204)):

(17) 

(*d*) *Die erste Zeile eines Kästchens* $\mathbf{P}_{\rho\rho}$, $\rho > 2$, *hat die linear unabhängigen Koeffizienten, die Kästchen* $\mathbf{P}_{ii}$; $i=2, 3, \cdots, \rho-1$, *je die linear unabhängigen Spalten,* $\mathbf{P}_{11} \neq 0$, *die* ν_ρ*-te Spalte von* **P** *ist gleich Null, während alle Zeilen von* **P** *unter der* ν_ρ*-ten voneinander und den anderen nicht verschwindenden Zeilen von* **P** *linear unabhängig werden; d. h.* **P** *ist der folgenden Gestalt* (III, *S.* 21, *Fig.* (205)):

(18) 

.

Im Falle (*c*) wird $\mathfrak{P}$ direktes Produkt von zweier Gruppen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}'$:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}'$$

der Art, daß $\mathfrak{P}_1$ die abgeleitete Gruppenmatrix der folgenden Gestalt

$$(19) \qquad \begin{pmatrix} 0 \cdot. & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ a_{\nu_1 1} a_{\nu_1 2} \cdots a_{\nu_1, \nu_1 - 1} & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, also vom Typus $(p, p, \cdots, p)$ wird, während die abgeleitete Gruppenmatrix von $\mathfrak{P}'$ durch Wegnehmen der ν_1-ten Spalte und Zeile von $\mathbf{P}$ gebildet wird (III, *S.* 30).

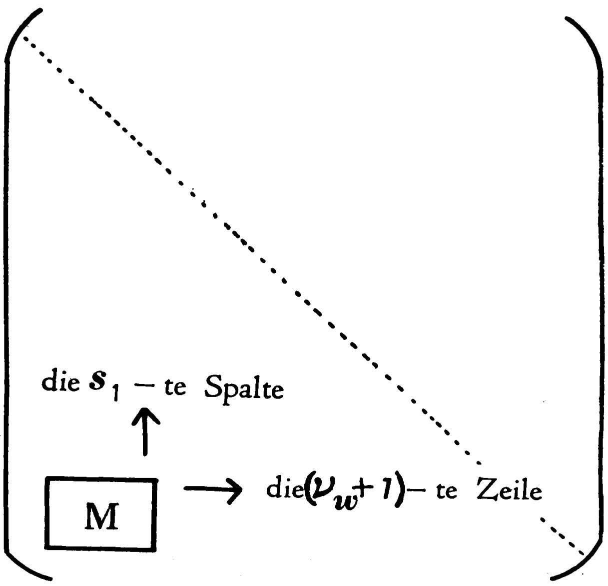
Der Fall (*d*) läßt sich, wie wir es später beweisen werden, auch zum Falle (b) zurückführen.

Im Falle (b) besteht die erste Zeile, d. h. der ν_w-ten Zeile von $\mathbf{P}$ entsprechende Zeile der Untermatrix

$$(20)\qquad (\mathbf{P}_{w1}\mathbf{P}_{w2}\cdots\cdots\mathbf{P}_{ww})$$

aus den voneinander linear unabhängigen Koeffizienten (I, S. 138), und nehmen diejenigen Elemente von $\mathbf{P}$, deren ν_w-te Zeile verschwindt, die folgende Gestalt

(21)



an, folglich stellen gesamt bei Γ zusammen mit der Einheitsmatrix eine Untergruppe vom Typus $(p, p, \cdots, p)$ dar (I, S. 163).

Alle anderen Elemente von $\mathbf{P}$ lassen sich durch die folgenden Basiselemente

$$(22)\qquad A_i\,;\ i=1, 2, \cdots\cdots, \nu_w-1\,,$$

linear in $GF_{(p^u)}$ ausdrücken, wobei die ν_w-te Zeile von A_i je von der Gestalt

$$(23)\qquad (0\cdots\cdots 0\ a_{\nu_w i}\ 0\cdots\cdots 0)\,,\qquad a_{\nu_w i}=1\,,$$

ist (I, S. 138, 148; II, S. 16), und für

$$(24)\qquad s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}<i\leqq s_1+s_2+\cdots+s_k$$

die Beziehung

$$A^{(i)}_{w-\lambda,\mu}=0, \quad \lambda=1,2,\cdots,w-1\,; \quad k-\lambda<\mu\leqq w-\lambda\,, \tag{25}$$

besteht.

Ferner ist die i-te Zeile jedes Basiselementes $A\sigma$; $\sigma=1,2,\cdots,\nu_w-1$, als die σ-te Zeile in A_i enthalten (I, *S.* 167).

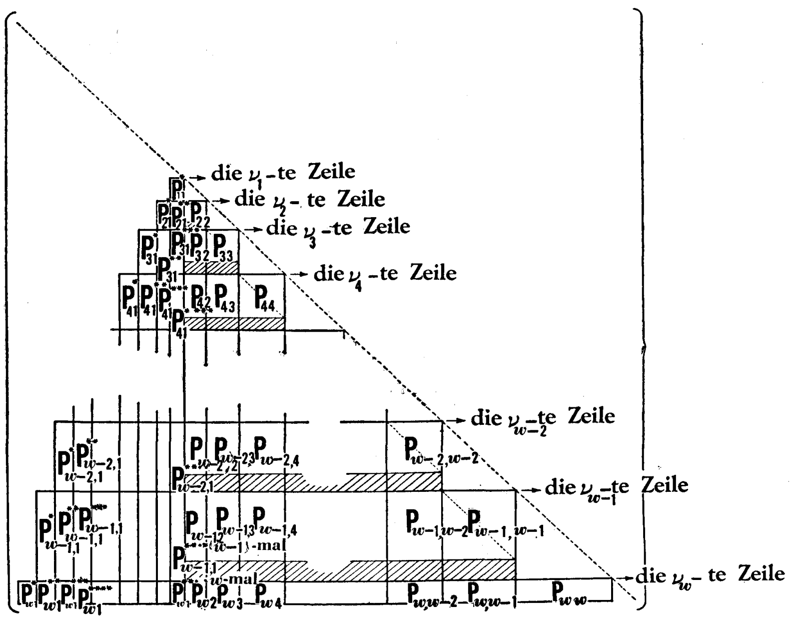
Die Ordnung von $\mathfrak{P}$ wird dann gleich

$$p^{u\{\nu_w-1+s_1(n-\nu_w)\}}\,, \tag{26}$$

wenn man dabei von **P** o. B. d. A. so annimmt, daß die ν_1-te und alle anderen Zeilen darunter voneinander linear unabhängig sind (I, *S.* 221 ; II, *S.* 26, 28 ; III, *S.* 12).

Falls **P** ein Element A_0 der Art enthält, daß der Rang des Kästchens $A^{(0)}_{w-1,w-1}$ gleich s_{w-1} wird, dann kann man **P** so gestalten, daß die erste Zeile jedes der Kästchen $\mathbf{P}_{ii}$; $i=2,3,\cdots,w-1$, die linear unabhängigen Koeffizienten besitzt, während **P** gleich

(27)



wird, wobei die Untermatrix

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} \mathbf{P}'_{22} & & & \\ \mathbf{P}'_{32} & \mathbf{P}'_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{P}'_{w-2,2} & \mathbf{P}'_{w-2,3} & \cdots & \mathbf{P}'_{w-2,w-2} \end{pmatrix} \tag{28}$$

ein Galois-Feld $GF_{(p^{u\sum_{i=2}^{w-2} s_i})}$ darstellt, und $\mathbf{P}'_{ij}$ dasjenige Kästchen bedeutet, das aus den ersteren s_i Zeilen von $\mathbf{P}_{ij}$ besteht (II, *S.* 25, 28; III, *S.* 11).

Man bezeichnet alsdann diejenige Matrix mit $\mathbf{P}^{[k]}$, welche aus den k-ten Potenzen der einzelnen Elemente von $\mathbf{P}$ besteht, d. h. ist

$$\mathbf{P}=A_1x_1+A_2x_2+\cdots+A_gx_g\,, \tag{29}$$

so wird

$$\mathbf{P}^{[k]}=A_1^kx_1+A_2^kx_2+\cdots+A_g^kx_g\,. \tag{30}$$

Ferner läßt man $\mathbf{P}_{ij}^{[k]}$; $i=1,2,\cdots,w$; $j=1,2,\cdots,i$, dasjenige Kästchen von $\mathbf{P}^{[k]}$ bedeuten, das dem Kästchen $\mathbf{P}_{ij}$ von $\mathbf{P}$ entspricht, und $\mathbf{Q}^{[k]}$ und $\mathbf{Q}_{ij}^{[k]}$ von analoger Bedeutung sein, so daß

$$\mathbf{Q}_{ij}^{[1]}=\mathbf{P}'_{ij}\,; \quad i=2,3,\cdots,w-2\,; \quad j=2,3,\cdots,i\,, \tag{31}$$

wird (III, *S.* 12).

Dann wird

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}^{[k]\prime}_{k+1,2} & & & \\ \mathbf{P}^{[k]\prime}_{k+2,2} & \mathbf{P}^{[k]\prime}_{k+2,3} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{P}^{[k]\prime}_{w-1,2} & \mathbf{P}^{[k]\prime}_{w-1,3} & \cdots & \mathbf{P}^{[k]\prime}_{w-1,w-k} \end{pmatrix}, \qquad k\geqq 2\,, \tag{32}$$

gleich

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{[k]}_{22} & & & \\ \mathbf{Q}^{[k]}_{32} & \mathbf{Q}^{[k]}_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{Q}^{[k]}_{w-k,2} & \mathbf{Q}^{[k]}_{w-k,3} & \cdots & \mathbf{Q}^{[k]}_{w-k,w-k} \end{pmatrix} \tag{33}$$

(III, S. 18).

Die Anzahl der Elemente von **P**, deren k-te Potenzen nicht verschwinden, ist gleich der Anzahl der Elemente von **Q**, deren zu (33) entsprechende Untermatrix von Null verschieden ist, addiert mit der Anzahl der Elemente von **Q**, deren zu (33) entsprechender Teil verschwindt, während mindestens eines von den zu

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_{w-1,1}^{[k]**\cdots\sigma\text{-}mal}, \quad \mathbf{P}_{w1}^{[k]**\cdots\sigma\text{-}mal}; \quad k-1<\sigma, \\ (34) \qquad & \\ &\mathbf{P}_{w2}^{[k]}, \quad \mathbf{P}_{wi}^{[k]\prime\prime}; \quad i=3,4,\cdots,w-k+1,\end{aligned}$$

entsprechenden Kästchen dieser Elemente nicht gleich Null ist (III, *S.* 19).

Daher führt sich die Frage den Typus von $\mathfrak{P}$ in diesem Falle zu bestimmen zu derjenigen der Abelschen Substitutionsgruppe von beliebiger Ordnung aber vom niedrigerem Grade in einem Galois-Felde zurück (III, *S.* 19).[1)]

Nun kommen wir zum eigentlichen Gegenstand dieser IV Mitteilung. Nunmehr sollen die Formeln im Text, im Gegensatz zu dem vorangehenden, mit der laufenden Nummer versehen werden, die Nummer der Formeln der früheren Mitteilungen fortsetzen.

In der dritten Mitteilung[2)] haben wir also erfahren, daß alle Gruppenmatrizen[3)] der maximalen Abelschen Substitutions-p-Gruppen in $GF_{(p^u)}$ sich in drei Formen zusammenfassen lassen.

Für allen von diesen drei Fällen kann man o. B. d. A. so annehmen, daß

---

1) Im Falle

$$s_2=s_3=\cdots=s_{w-1}$$

kann man bequem die Ordnung und Invarianten von $\mathfrak{P}$ wie beim Satze 8 bestimmen (I, *S.* 331). Vgl. auch K. Taketa: Über die Struktur der metabelschen p-Gruppen; *Proc. Imp. Acad., Tokyo,* 9 (1933), 480.

2) Tôhoku Math. J.; 4 (1952), 10-32.

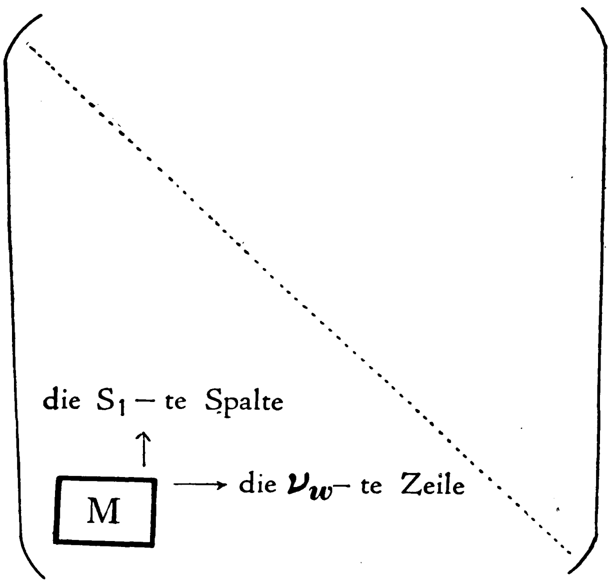
3) Vgl. Fig. (16), *S.* 495.

$$
(221) \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & & & \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{P}_{w-1,1} & \mathbf{P}_{w-1,2} & \cdots\cdots & \mathbf{P}_{w-1,w-1} \end{pmatrix}
$$

aus voneinander linear unabhängigen Zeilen besteht.

Denn da $\mathbf{P}$ eine maximale Abelsche Gruppe darstellt, so muß jede Matrix der folgenden Gestalt

(222)



in $\mathbf{P}$ enthalten sein, mithin sind die Zeilen von $\mathbf{P}_{w1}$ schon voneinander linear unabhängig.

Besteht nun also eine lineare Beziehung zwischen den Zeilen von $\mathbf{P}$:

$$
(0\cdots 0\ c_{\nu_1} c_{\nu_1+1} \cdots\cdots c_m)\mathbf{P} = 0\,,
$$

so wird

$$
c_{\nu_w} = c_{\nu_w+1} = \cdots = c_m = 0\,.
$$

Alsdann kann man durch Transformation mit einer Matrix der folgenden Gestalt

$$(223)\qquad \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_s & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

eine Zeile von **P** verschwinden lassen, und sie danach durch eine gleichzeitige zyklische Permutation der Zeilen und Spalten von **P** hinauf verschieben, bis sie von (221) ausgeht. Setzt man eventuell solches Verfahren fort, so wird man endlich die verlangte Gestalt von **P** erreichen, und es genügt alsdann nur auf **P** aufs neue dasselbe Schlußverfahren wie bei der dritten Mitteilung (III, *S.* 19) anzuwenden. Einfachheitshalber schicken wir zunächst einige Verfahren für die Umformung von **P** voraus.

Sei A ein Element von **P**, A_{ij} das $\mathbf{P}_{ij}$ entsprechende Kästchen von A.

(1) *Jede Zeile von $A_{\rho\rho}$, die den anderen Zeilen von $A_{\rho\rho}$ linear abhängt, wird bei $T^{-1}\mathbf{P}T$ gleich Null, wenn man als T^{-1} die folgende Matrix*

$$(224)\qquad \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \boxed{T_1} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \text{die } \nu_\rho\text{-te Zeile} \\ \to \text{die } \nu_{\rho+1}\text{-te Zeile} \end{matrix}$$

benutzt, wobei T_1 *ein Kästchen des Grades* $s_{\rho+1}$ *und der Gestalt*[1)]

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_k \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{225}$$

ist.

(2) *Braucht man statt* T_1 *von* (224) *eine Matrix, die eine Permutation darstellt, d. h. eine monomiale Matrix mit den Koeffizienten gleich* 1, *so kann diese Nullzeile an beliebige Stelle bei* $A_{\rho\rho}$ *gebracht werden.*

(3) *Jede Spalte von* $A_{\rho\rho}$ *die durch die anderen Spalten von* $A_{\rho\rho}$ *linear ausgedrückt wird, geht in Nullspalte über, wenn man* **P** *mit der folgenden Matrix*

$$\begin{array}{c l} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \boxed{T_2} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \to \text{die } \nu_{\rho-1}\text{-te Zeile} \\ \to \text{die } \nu_{\rho}\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{226}$$

---

1) Wie bisher bezeichnen wir auch bei dieser Mitteilung die Anzahl der Spalten des Kästchens $\mathbf{P}_{ii}$ mit s_i .

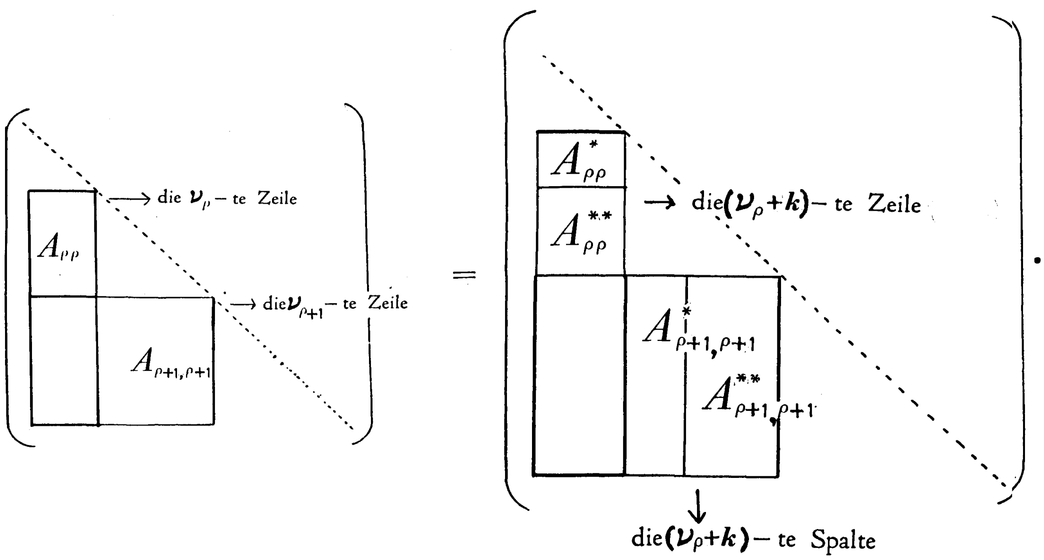
transformiert, wobei das Kästchen T_2 *eine Matrix Grades* s_ρ *mit der folgenden Gestalt bedeutet*:[1)]

$$(227)\qquad \begin{pmatrix} 1 & & & c_1 & & \\ & \ddots & & c_2 & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & c_k & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(4) *Man kann diese Nullspalte analog wie bei* (2) *an einer geeigneten Stelle bei* $A_{\rho\rho}$ *setzen, indem man bei* (226) *statt des Kästchens* T_2 *die Matrix von einer geeigneten Permutation benutzt.*

Man bezeichnet diejenige Untermatrix von $A_{\rho+1,\rho+1}$ mit $A^*_{\rho+1,\rho+1}$, die aus den beliebigen ersteren Spalten, sage die ersteren k Spalten, von $A_{\rho+1,\rho+1}$ besteht, und den anderen Teil von $A_{\rho+1,\rho+1}$ mit $A^{**}_{\rho+1,\rho+1}$, und dementsprechend diejenige Untermatrix von $A_{\rho\rho}$ mit $A^*_{\rho\rho}$, welche aus den ersteren k Zeilen von $A_{\rho\rho}$ besteht, und den anderen Teil von $A_{\rho\rho}$ mit $A^{**}_{\rho\rho}$, also wird

(228)



1) In unsren Mitteilungen verstehen wir im allgemeinen unter der mit M äquivalenten Matrix, transformiert mit T, nicht TMT^{-1} sondern $T^{-1}MT$.

(5) *Wenn man statt der Matrix* (224) *die Matrix*

$$(229)\qquad \left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\boxed{T_1^*}&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ \longrightarrow \text{die}(\nu_\rho+k)-\text{te Zeile}\\ \longrightarrow \text{die } \nu_{\rho+1}-\text{te Zeile}\\ \\ \\ \end{array}$$

bezw. die Matrix

$$(230)\qquad \left(\begin{array}{ccccccc}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\boxed{T_2^*}&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ \longrightarrow \text{die } \nu_\rho-\text{te Zeile}\\ \longrightarrow \text{die}(\nu_\rho+k)-\text{te Zeile}\\ \\ \\ \end{array}$$

braucht, so kann man A bei $T^{-1}\mathrm{P}T$, *durch wiederholte Anwendung der-*

gleichen Transformation, so gestalten, daß die nicht verschwindenden Zeilen von $A^{*}_{\rho\rho}$, *bezw. die von* $A^{**}_{\rho\rho}$ *je voneinander linear unabhängig werden, und bei* $A^{*}_{\rho\rho}$ *bezw. bei* $A^{**}_{\rho\rho}$ *je an beliebigen Stellen nebeneinander liegen, ohne dabei die Kästchen* $A^{**}_{\rho\rho}$ *und* $A^{**}_{\rho+1,\rho+1}$ *bezw.* $A^{*}_{\rho\rho}$ *und* $A^{*}_{\rho+1,\rho+1}$ *zu verändern.*

(6) *Nach dem analogen Verfahren kann man auch diejenigen Spalten von* $A^{*}_{\rho+1,\rho+1}$ *bezw. von* $A^{**}_{\rho+1,\rho+1}$, *welche den anderen Spalten dieses Kästchens linear abhängen, sämtlich verschwinden, und an beliebigen Stellen bei dem entsprechenden Kästchen nebeneinander liegen lassen, während die Kästchen* $A^{**}_{\rho\rho}$ *und* $A^{**}_{\rho+1,\rho+1}$ *bezw. die Kästchen* $A^{*}_{\rho\rho}$ *und* $A^{*}_{\rho+1,\rho+1}$ *dabei unverändert bleiben.*

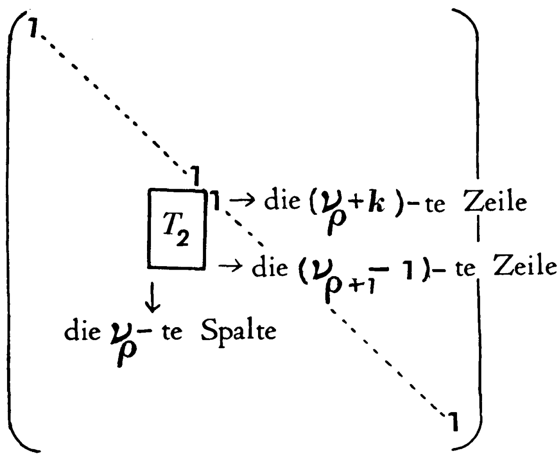
(7) *Jede Zeile von* $A^{*}_{\rho\rho}$, *die den Zeilen von* $A^{**}_{\rho\rho}$ *linear abhängt, wird bei* $T^{-1}\mathbf{P}T$ *gleich Null, wenn man als* T^{-1} *eine Matrix der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \boxed{T_1} & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{die } \nu_\rho - \text{te Zeile} \tag{231}$$

benutzt, wobei T_1 *eine k-zeilige und* $(s_{\rho+1}-k)$*-spaltige Untermatrix der Art, daß nur eine Zeile von ihr nicht verschwindt. Durch solche Transformation verändert* $A^{*}_{\rho+1,\rho+1}$ *sich nicht.*

(8) *Analog kann man jede Zeile von* $A^{**}_{\rho\rho}$, *die durch die Zeilen von* $A^{*}_{\rho\rho}$ *linear ausgedrückt wird, verschwinden lassen, ohne dabei die Kästchen* $A^{*}_{\rho\rho}$ *und* $A^{**}_{\rho+1,\rho+1}$ *zu ändern, indem man statt* (231) *eine Matrix der folgenden Gestalt*

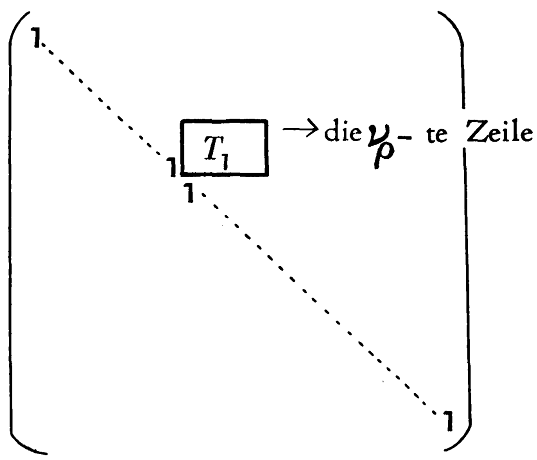
(232)



braucht.

(9) Jede Spalte von $A^{**}_{\rho+1,\rho+1}$, die den Spalten von $A^{*}_{\rho+1,\rho+1}$ linear abhängt, geht bei $T^{-1}\mathbf{P}T$ in Nullspalte über, wenn man für T eine Matrix der Gestalt

(233)

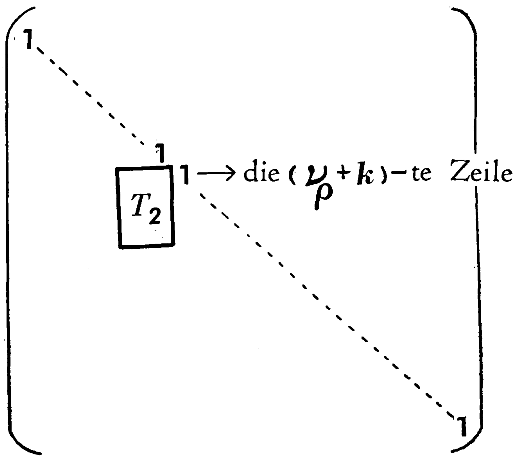


braucht, wobei T_1 ein k-zeiliges und $(s_{\rho+1}-k)$-spaltiges Kästchen mit nur einer von Null verschiedenen Spalte bedeutet.

Die Kästchen $A^{**}_{\rho\rho}$ und $A^{*}_{\rho+1,\rho+1}$ bleiben gegen dieses Verfahren ungeändert.

(10) Jede Spalte von $A^{*}_{\rho+1,\rho+1}$, die den Spalten von $A^{**}_{\rho+1,\rho+1}$ linear abhängt, verschwindet auch durch Transformation mit einer Matrix T der Gestalt

(234)



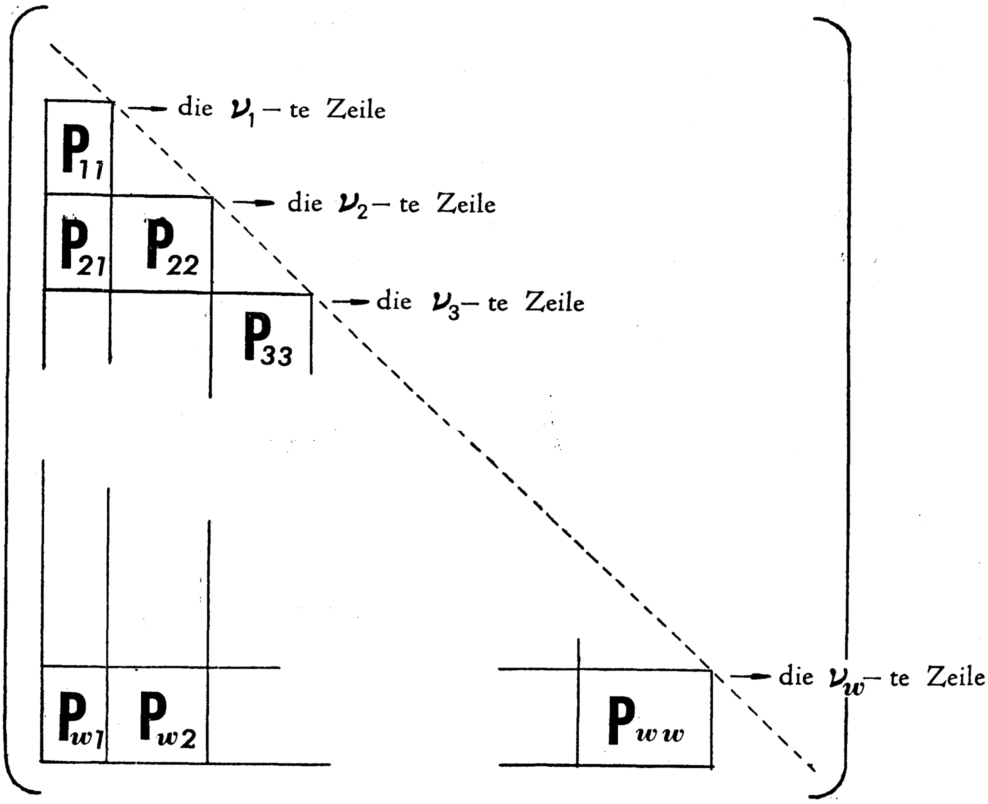
,

wobei T_2 eine $(s_{\rho+1}-k)$-zeiliges und k-spaltiges Kästchen mit nur einer Spalte nicht gleich Null ist. $A^*_{\rho\rho}$ und $A^{**}_{\rho+1,\rho+1}$ bleiben unverändert.

Diesmal betrachten wir die Form (b), also den Fall, wo jedes der Kästchen $\mathbf{P}_{ii}$; $i=2, 3,\cdots, w$, der abgeleiteten Gruppenmatrix

(18)

$\mathbf{P}=$



aus den linear unabhängigen Spalten besteht, während P_{11} nicht verschwindt, und die Koeffizienten der ersten Zeile des Kästchens P_{ww} voneinander linear unabhängig sind.

Die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{P}$ wird dann gleich

$$p^{u\{s_1(n-\nu_w)+\sum_{i=1}^{w} s_i\}}, \tag{235}$$

wobei n das Grad von $\mathbf{P}$ bedeutet. Beweis: Da $\mathfrak{P}$ eine maximale Abelsche Gruppe ist, so muß das Produkt von beliebigen zwei Elementen[1] von $\mathbf{P}$ wieder zu $\mathbf{P}$ gehören, und da andererseits die Koeffizienten der ersten Zeile von $\mathbf{P}_{ww}$ voneinander linear unabhängig sind, so sind auch diejenigen von

$$(\mathbf{P}_{w2}\mathbf{P}_{w3}\cdots\cdots\mathbf{P}_{ww})\,. \tag{236}$$

Daher besteht auch die erste Zeile von

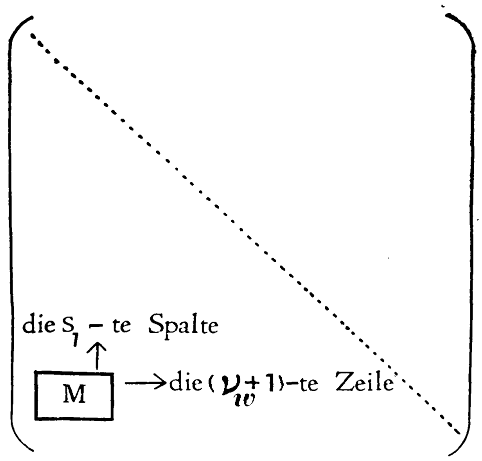
$$(\mathbf{P}_{w1}\mathbf{P}_{w2}\cdots\cdots\mathbf{P}_{ww}) \tag{237}$$

aus solchen Koeffizienten, weil alle Matrizen der Gestalt (222) schon in $\mathbf{P}$ enthalten sind. Also gibt es gerade $s_* = \sum_{i=1}^{w} s_i$ Basiselemente $A_j;\, j=1,2,\cdots,s_*$, von $\mathbf{P}$, deren ν_w-te Zeile je die folgende Gestalt annimmt:

$$(0\cdots 0\; a^{(j)}_{\nu_w j}\; 0\cdots 0)\,, \qquad a^{(j)}_{\nu_w j}=1\,. \tag{238}$$

Nun muß jedes Element N von $\mathbf{P}$ dessen zu (238) entsprechende Zeile verschwindt, von der folgenden Gestalt

(239)



1) Unter dem Elemente von $\mathbf{P}$, versteht man die Matrix $A-E$, wo $A\in\mathfrak{P}$.

sein, wie man leicht durch die Vergleichung der ν_w-ten Zeilen der beiden Seiten von

$$NA_j = A_j N \tag{240}$$

ersehen kann. Also gibt es gerade $s_1(n-\nu_w)+s_*$ in $\mathbf{GF}_{(p^u)}$ voneinander linear unabhängige Elemente von $\mathbf{P}$, w. z. b. w.

Da die Frage aber schon gelöst ist (II,[1] *S.* 11–28; III, *S.* 10–19), wenn $\mathbf{P}$ mindestens ein Element enthält, dessen zu $\mathbf{P}_{w-1,w-1}$ entsprechendes Kästchen vom Rang s_{w-1} ist, so nehmen wir hier an, daß kein Element von $\mathbf{P}$ solche Eigenschaft besitzt.

Bezeichnet man also im allgemeinen den Rang des Kästchens A_{ii} eines Elementes A von $\mathbf{P}$ mit $r(A_{ii})$, so besteht stets

$$r(A_{w-1,w-1}) < s_{w-1}. \tag{241}$$

Ist nun

$$r(A_{\rho\rho}) = s_\rho, \qquad \rho < w-1, \tag{242}$$

so werden analog wie (157) auf *S.* 13 der zweiten Mitteilung[1]

$$r(A_{ii}) = s_i\ ; \qquad i=2, 3, \cdots, \rho, \tag{243}$$

mithin

$$\begin{aligned} &A_{11} \neq 0, \\ &A_{ii}A_{i-1,i-1} \neq 0, \qquad 2 \leqq i \leqq \rho. \end{aligned} \tag{244}$$

Dasselbe gilt auch für $A_{jj}\,; j=\rho+1, \rho+2, \cdots, w-1$, und es besteht der

HILFSSATZ **5**: *Besteht für ein Element A der abgeleiteten Gruppenmatrix* $\mathbf{P}$ *der Form* (*b*) *die folgende Beziehung*

$$A_{\rho\rho}A_{\rho-1,\rho-1} \neq 0, \qquad \rho \geqq 3, \tag{245}$$

so ergibt sich

$$A_{\rho+1,\rho+1}A_{\rho\rho} \neq 0. \tag{246}$$

BEWEIS: Da wegen (246) das Kästchen $A_{\rho\rho}$ nicht verschwindt, so muß $A_{\rho+1,\rho+1}$ auch von Null verschieden sein, denn sonst bestünde eine lineare Beziehung zwischen den Spalten von $\mathbf{P}_{\rho+1,\rho+1}$, weil aus

---

1) Journ. of the Osaka Inst. of science and technology, 2 (1950), 1–28

(247) $$AP = PA$$

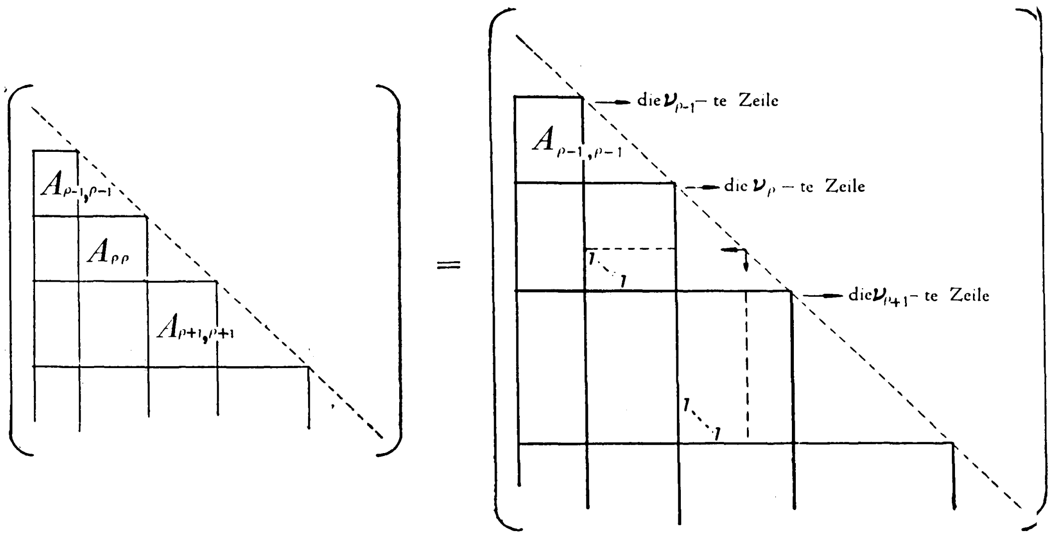
die folgende Beziehung

(248) $$A_{\rho+1,\rho+1}\mathbf{P}_{\rho\rho} = \mathbf{P}_{\rho+1,\rho+1}A_{\rho\rho}$$

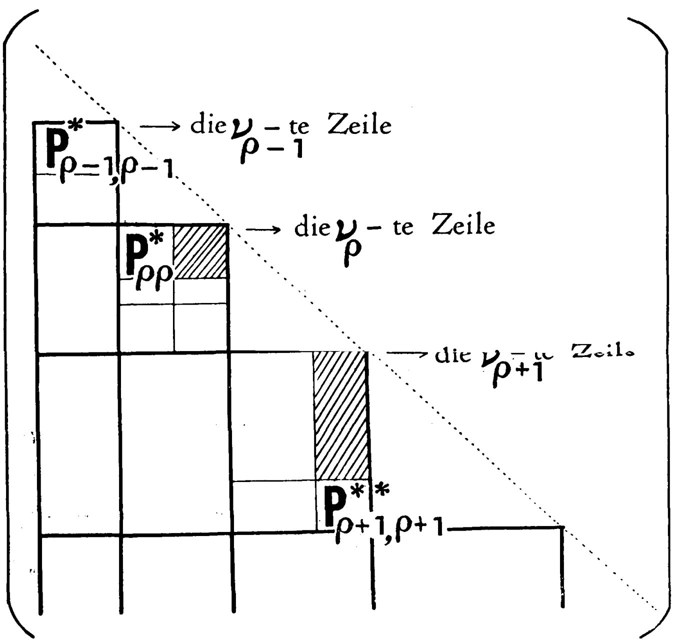
folgt. Wäre nun

(248) $$A_{\rho+1,\rho+1}A_{\rho\rho} = 0\,,$$

dann könnte man **P** durch geeignete Transformation so gestalten, daß

(249)


mithin der entsprechende Teil von **P** wegen (247) gleich

(250)


würde, wobei $\mathbf{P}^*_{\rho\rho}=\mathbf{P}^{**}_{\rho+1,\rho+1}$, und wegen (245) $A^*_{\rho-1,\rho-1}\neq 0$.

Da aber aus (248) die folgende Gleichung

$$\mathbf{P}^*_{\rho\rho}A^*_{\rho-1,\rho-1}=A^*_{\rho\rho}\mathbf{P}^*_{\rho-1,\rho-1}=0 \tag{251}$$

sich ergibt, so bestünde eine lineare Beziehung zwischen den Spalten von $\mathbf{P}^*_{\rho\rho}$ folglich von $\mathbf{P}^{**}_{\rho+1,\rho+1}$, was der Annahme widerspricht, daß $\mathbf{P}_{\rho+1,\rho+1}$ aus den linear unabhängigen Spalten besteht, w. z. b. w.

Wenn also die folgende Ungleichung

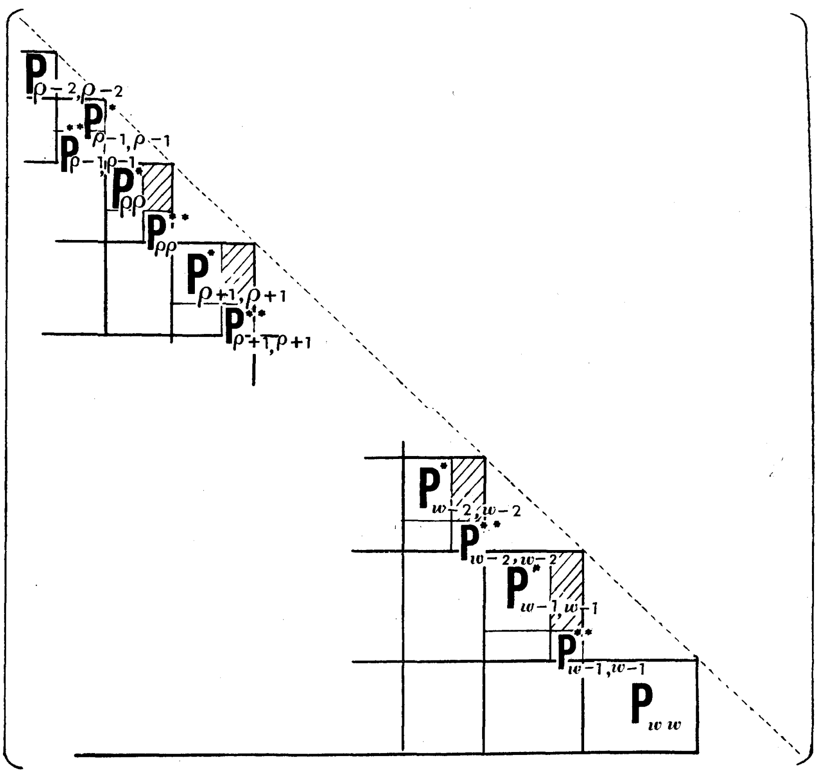
$$s_\rho > r(A_{\rho\rho}) > 0 \tag{252}$$

besteht, so ergeben sich auch

$$s_i > r(A_{ii}) > 0\,, \qquad \rho > i > w\,. \tag{253}$$

In diesem Falle kann man o. B. d. A. die letzteren $s_i - r(A_{ii})$ Spalten von A_{ii}; $i=\rho, \rho+1, \cdots, w$, sämtlich gleich Null setzen, so daß wegen (247) die letzteren $s_i - r(A_{ii})$ Koeffizienten jeder der ersteren $r(A_{i+1,i+1})$ Zeilen von $\mathbf{P}_{ii}$, $\rho \leqq i \leqq w-1$, sämtlich verschwinden, d. h. der betreffende Teil von $\mathbf{P}$ die folgende Gestalt annimmt:

(254)



wobei $\mathbf{P}_{ii}^*$; $i=\rho, \rho+1, \cdots, w-1$, je aus den $r(A_{ii})$ voneinander linear unabhängigen Spalten bestehen.

Denn ließe man sonst eine Spalte, etwa die erste, von $\mathbf{P}_{ii}^*$ verschwinden (Verfahren 3, *S.* 505), dann verschwände wegen (247) die erste Spalte von beiden Seiten von

$$A_{i+1,i+1}\mathbf{P}_{ii}=\mathbf{P}_{i+1,i+1}A_{ii}, \tag{255}$$

folglich bestünde rechts eine lineare Beziehung zwischen den Spalten von $\mathbf{P}_{i+1,i+1}$. Denn da A_{ii} vom Rang $r(A_{ii})$ iat, so kann die erste Spalte von A_{ii} nicht gleich Null sein, w. z. b. w.

Wenn $r(A_{\rho-1,\rho-1})=s_{\rho-1}$ ist, dann kann man analog wie oben beweisen, daß die Spalten desjenigen Kästchens $\mathbf{P}_{\rho-1,\rho-1}^*$, das aus den ersteren $r(A_{\rho\rho})$ Zeilen von $\mathbf{P}_{\rho-1,\rho-1}$ besteht, auch voneinander linear unabhängig sind.

Ist dazu

$$r(A_{w-1,w-1}^*)=r(A_{w-1,w-1})>0, \tag{256}$$

so werden auch

$$r(A_{ii}^*)=r(A_{ii}), \qquad w-1\geqq i\geqq \rho-1, \tag{257}$$

folglich erhält man dieselben Ergebnisse wie beim Satze 10 (II, *S.* 28) mit den Kästchen

$$\mathbf{P}_{11},\ \mathbf{P}_{22}, \cdots,\ \mathbf{P}_{\rho-2,\rho-2},\ \mathbf{P}_{\rho-1,\rho-1}^*,\ \mathbf{P}_{\rho\rho}^*, \cdots,\ \mathbf{P}_{w-1,w-1}^* \tag{258}$$

und im sonstigen Falle, d. h. falls $r(A_{\rho-1,\rho-1})<s_{\rho-1}$, kann man durch die wiederholte Anwendung des analogen Schlußverfahrens die Kästchen $\mathbf{P}_{jj}$; $j=\rho-1, \rho-2, \cdots, 2$, weiter zerfallen.

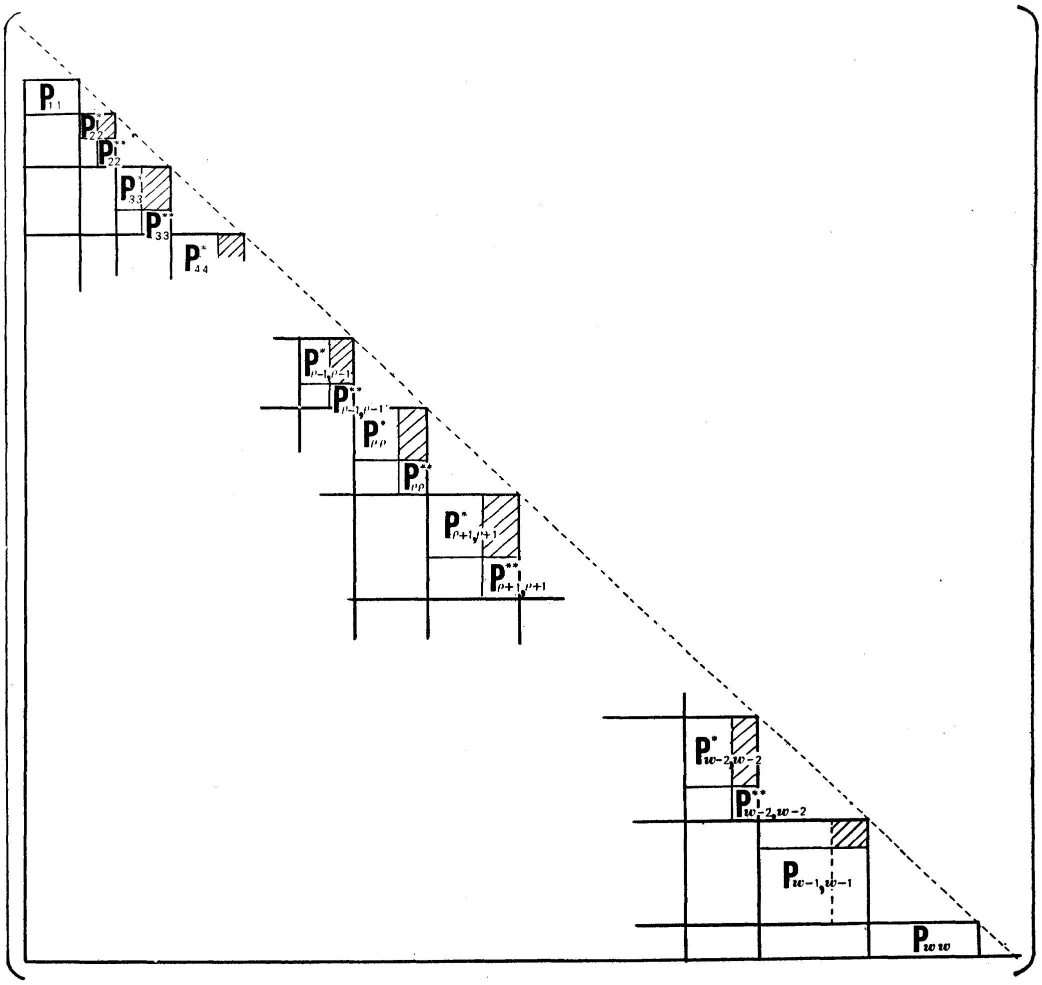
Ist also

$$s_2>r(A_{22})>0, \tag{259}$$

so besteht wegen (242) und (243) auch

$$s_i>r(A_{ii}), \qquad 2\leqq i\leqq w, \tag{260}$$

und wird $\mathbf{P}$ von der folgenden Gestalt

(261)  ,

wobei $\mathbf{P}_{ii}^{*}$; $i=2, 3,\cdots, w-1$, je aus $r(A_{ii})$ Spalten und $r(A_{i+1,i+1})$ Zeilen bestehen, und

$$A_{ii}^{**}=0\,; \qquad i=2, 3,\cdots, w-1\,, \tag{262}$$

sind.

Die letzteren s_w Basiselemente

$$A_{\nu_{w-1}}\,, A_{\nu_{w-1}+1}\,,\cdots, A_{\nu_{w-1}+s_w-1} \tag{263}$$

von (238) geben gesamt den Koeffizienten der ersten Zeile des Kästchens $\mathbf{P}_{ww}$ die linear unabhängige Eigenschaft.

Nun wählen wir aus (263) möglichst wenige Elemente dafür, daß wir die linear Unabhängigkeit der Spalten von $\mathbf{P}_{w-1,w-1}$ liefern können, und diese Elemente bezeichnen wir mit

(264) $$A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, \cdots, A_{\sigma_k}.$$

Unter Benutzung einiger von diesen k Elementen kann man auch die Spalten von $\mathbf{P}_{w-2,w-2}$ voneinander linear unabhägig machen, denn sonst könnte man durch geeignete Transformation von $\mathbf{P}$ wie bei der Form 3 (*S.* 505), mindestens eine bestimmte Spalte, z. B. die erste, der Kästchen

(265) $$A^{(i)}_{w-2,w-2}; \qquad i=\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k,$$

der Elemente (264) gleichzeitig verschwinden lassen.

Da aber jedes der Elemente (264) mit $\mathbf{P}$ vertauschbar ist, so ergibt sich die Beziehung

(266) $$A^{(i)}_{w-1,w-1}\mathbf{P}_{w-2,w-2}=\mathbf{P}_{w-1,w-1}A^{(i)}_{w-2,w-2}; \qquad i=\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k,$$

da andererseits alle Spalten von $A^{(i)}_{w-1,w-1}$; $i=\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$, gesamt die linear Unabhängigkeit der Spalten von $\mathbf{P}_{w-1,w-1}$ liefern, so müßte bei (266) die erste Spalte von $\mathbf{P}_{w-2,w-2}$ gegen die Annahme, daß $\mathbf{P}_{w-2,w-2}$ aus den voneinander linear unabhängigen Spalten besteht, verschwinden.

Analog kann man mit Hilfe der vollständigen Induktion beweisen, daß die Elemente (264) auch den Spalten von $\mathbf{P}_{ii}$; $i=2, 3, \cdots, w-1$, die linear Unabhängigkeit liefern.

(A) Zunächst sei $k=2$.

(A, 1.) Ist nun

(267) $$r(A^{(\sigma_i)}_{22})<s_2; \qquad i=1, 2,$$

so wird wie bei (260)

(268) $$r(A^{(\sigma_i)}_{jj})<s_j; \qquad i=1, 2; \; j=2, 3, \cdots, w.$$

Da aber die Elemente A_{σ_1} und A_{σ_2} zusammen die linear Unabhängigkeit der Spalten jedes der Kästchen

(269) $$\mathbf{P}_{ii}; \qquad i=2, 3, \cdots, w-1,$$

liefern, so muß

(270) $$r(A^{(\sigma_1)}_{ii})+r(A^{(\sigma_2)}_{ii})\geqq s_i; \qquad i=2, 3, \cdots, w-1,$$

sein.

Es gilt der

HILFSSATZ **6**: *Hat jedes der beiden Elemente A_{σ_1} und A_{σ_2} bei einer bestimmten Zeile der Untermatrix*

$$(\mathbf{P}_{\rho 2}\mathbf{P}_{\rho 3}\cdots\mathbf{P}_{\rho\rho})\,; \qquad \rho=2,3,\cdots,w\,, \tag{271}$$

keinen Koeffizienten von Null verschieden, so verschwindt die entsprechende Zeile von (271) *auch.*

BEWEIS: Man bezeichnet die betreffende Zeile von (271) als die λ-te von $\mathbf{P}$.

Die σ_j-te; $j=1,2$, Zeile jedes der Basiselemente A_i von (238) als die i-te Zeile im Basiselemente A_{σ_j} enthalten (I, *S.* 167).[1]

Also besteht die Untermatrix

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{(\sigma_j)} & & & \\ A_{21}^{(\sigma_j)} & A_{22}^{(\sigma_j)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{w-1,1}^{(\sigma_j)} & A_{w-1,2}^{(\sigma_j)} & \cdots\cdots & A_{w-1,w-1}^{(\sigma_j)} \end{pmatrix} \tag{272}$$

aus den σ_j-ten Zeilen der Basiselemente (238).

Daher besitzt die σ_j-te Zeile von $\mathbf{P}$ eben soviele voneinander linear unabhängigen Koeffizienten, wie die voneinander linear unabhängigen Spalten von (272), und entsprechen die Stellen dieser voneinander linear unabhängigen Koeffizienten der σ_j-ten Zeile von $\mathbf{P}$ den der voneinander linear unabhängigen Spalten von (272).

Da aus demselben Grunde alle Koeffizienten, außer der ersteren s_1, der σ_j-ten; $j=1,2$, Zeilen von A_λ sämtlich verschwinden, so kann man durch Vergleichung der σ_j-ten Zeilen der beiden Seiten von

$$A_\lambda\mathbf{P}=\mathbf{P}A_\lambda \tag{273}$$

erfahren, daß die folgende Untermatrix

---

1) Jap. Journ. of Math., 13 (1936), 129-332.

$$(274)\qquad \begin{pmatrix} A_{11}^{(\lambda)} & & & \\ A_{21}^{(\lambda)} & A_{22}^{(\lambda)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{w-2,1}^{(\lambda)} & A_{w-2,2}^{(\lambda)} & \cdots\cdots & A_{w-2,w-2}^{(\lambda)} \end{pmatrix}$$

gleich Null wird. Da andererseits der (274) entsprechende Teil von $\mathbf{P}$ nach der Annahme aus den voneinander linear unabhängigen Zeilen besteht (*S.* 502), so folgt wieder aus (273) die folgende Beziehung

$$(A_{w-1,2}^{(\lambda)} A_{w-1,3}^{(\lambda)} \cdots A_{w-1,w-1}^{(\lambda)}) = 0 .$$

Alsdann wird bei (271) die betreffende Zeile jedes der Basiselemente von (238) auch gleich Null, w. z. b. w.

Dieser Hilfssatz läßt sich analog auch für den Fall $k>2$ folgendermaßen verallgemeinern.

HILFSSATZ **7**: *Verschwindt eine bestimmte Zeile jedes der Basiselemente* A_{σ_i}; $i=1, 2,\cdots, k$, *von* (264) *bei der Untermatrix* (271), *so wird die entsprechende Zeile dieser Untermatrix selbst auch gleich Null.*

Wenn man also, nachdem man alle Nullzeilen von (271) nach oben verschoben hat, aufs neue so voraussetzt, daß alle Zeilen von

$$(274)\qquad \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} & & & \\ \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{P}_{w-1,2} & \mathbf{P}_{w-1,3} & \cdots\cdots & \mathbf{P}_{w-1,w-1} \end{pmatrix}$$

voneinander linear unabhängig sind,[1] so hat mindestens eins von A_{σ_1} und A_{σ_2} bei jeder Zeile von (274) die von Null verschiedene Zeile.

Nun kann

$$(275)\qquad \begin{pmatrix} A_{11}^{(\sigma_2)} & & & \\ A_{21}^{(\sigma_2)} & A_{22}^{(\sigma_2)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{j-1,1}^{(\sigma_2)} & A_{j-1,2}^{(\sigma_2)} & \cdots\cdots & A_{j-1,j-1}^{(\sigma_2)} \end{pmatrix}, \qquad 2\leqq j<w-1,$$

1) Hier besteht $\mathbf{P}_{22}$ nicht immer aus den voneinander linear unabhängigen Spalten, aber ist $\mathbf{P}_{22}\neq 0$.

mindestens soviele Nullzeilen wie diejenigen von

(276) $$(A_{j2}^{(\sigma_2)} A_{j3}^{(\sigma_2)} \cdots\cdots A_{jj}^{(\sigma_2)})$$

enthalten, falls die letztere solche Zeilen besitzt.

Denn da die zu den Nullzeilen von (276) entsprechenden Zeilen von A_{σ_1} voneinander linear unabhängig sind, so besteht, nach der folgenden Gleichung

(277) $$A_{\sigma_1} A_{\sigma_2} = A_{\sigma_2} A_{\sigma_1},$$

links eine lineare Beziehung zwischen den Zeilen von (275), und einige von ihnen kann man durch analoge Transformation von $\mathbf{P}$ wie bei (224) in Null übergehen lassen (*S.* 504).

Falls

(278) $$0 < r(A_{22}^{(\sigma_2)}) < s_3, \qquad r(A_{32}^{(\sigma_2)} A_{33}^{(\sigma_2)}) < s_4,$$

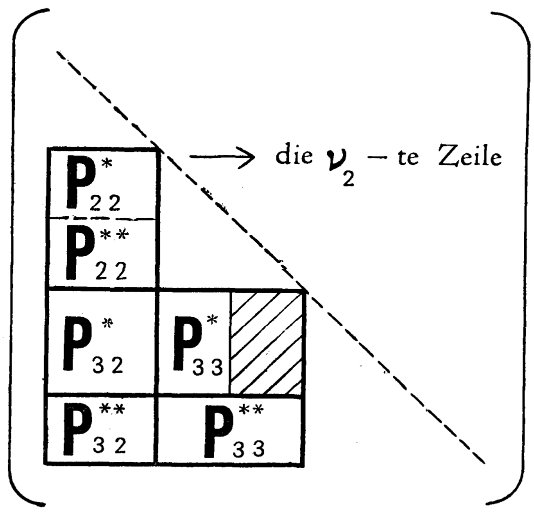
nimmt man nach dem Verfahren 2 an, daß die ersteren $s_3 - r(A_{22}^{(\sigma_2)})$ Zeilen von $A_{22}^{(\sigma_2)}$ und die ersteren $s_4 - r(A_{32}^{(\sigma_2)} A_{3}^{(\sigma_2)})$ Zeilen von $(A_{32}^{(\sigma_2)} A_{33}^{(\sigma_2)})$ sämtlich gleich Null sind.

Alsdann verschwinden wegen der folgenden Beziehung

(279) $$A_{33}^{(\sigma_2)} \mathbf{P}_{22} = \mathbf{P}_{33} A_{22}^{(\sigma_2)}$$

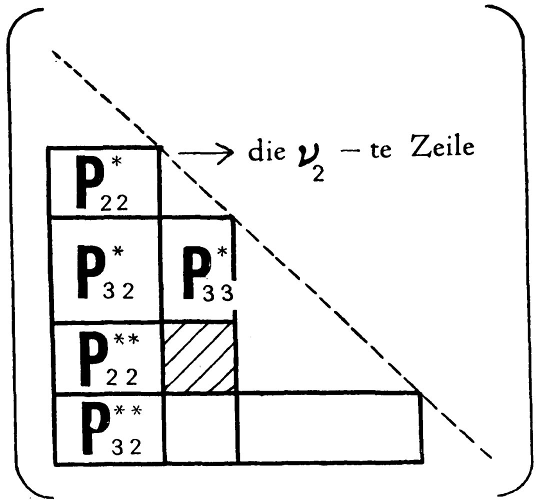
die letzteren $r(A_{22}^{(\sigma_2)})$ Koeffizienten jeder der ersteren $s_4 - r(A_{32}^{(\sigma_2)} A_{33}^{(\sigma_2)})$ Zeilen von $\mathbf{P}_{33}$ sämtlich, mithin wird der betreffende Teil von $\mathbf{P}$ von der folgenden Gestalt

(280)



Diese Untermatrix geht durch die geeignete gleichzeitige Permutation der Zeilen und Spalten von **P** in die folgende Gestalt über:

(281)



,

wobei

$$\begin{pmatrix} A_{22}^{(\sigma_2)*} & \\ A_{32}^{(\sigma_2)*} & A_{33}^{(\sigma_2)*} \end{pmatrix} = 0 \tag{282}$$

wird, und $A_{22}^{(\sigma_2)**}$ aus den voneinander linear unabhängigen Zeilen besteht.

Verschwinden nun verallgemeinert die ersteren $s_{l+1} - r(A_{l2}^{(\sigma_2)} A_{l3}^{(\sigma_2)} \cdots \cdots A_{ll}^{(\sigma_2)})$ Zeilen der Untermatrix

$$(A_{l2}^{(\sigma_2)} A_{l3}^{(\sigma_2)} \cdots A_{ll}^{(\sigma_2)}), \qquad 2 < l \leqq w-1, \tag{283}$$

während

$$\begin{pmatrix} A_{22}^{(\sigma_2)} & & & \\ A_{32}^{(\sigma_2)} & A_{33}^{(\sigma_2)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{j-1,2}^{(\sigma_2)} & A_{j-1,3}^{(\sigma_2)} & \cdots\cdots & A_{j-1,j-1}^{(\sigma_2)} \\ A_{j2}^{(\sigma_2)*} & A_{j3}^{(\sigma_2)*} & \cdots\cdots\cdots & A_{jj}^{(\sigma_2)*} \end{pmatrix} \tag{284}$$

gleich Null, und die Zeilen von

$$(285)\qquad \begin{pmatrix} A_{j2}^{(\sigma_2)**} A_{j3}^{(\sigma_2)**} \cdots\cdots\cdots A_{jj}^{(\sigma_2)**} \\ A_{j+1,2}^{(\sigma_2)} A_{j+1,3}^{(\sigma_2)} \cdots\cdots\cdots A_{j+1,j+1}^{(\sigma_2)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \\ A_{l-1,2}^{(\sigma_2)} A_{l-1,3}^{(\sigma_2)} \cdots\cdots\cdots A_{l-1,l-1}^{(\sigma_2)} \end{pmatrix}$$

voneinander linear unabhängig sind, so werden bei jeder der ersteren $s_{l+1}-r(A_{l2}^{(\sigma_2)}A_{l3}^{(\sigma_2)}\cdots A_{ll}^{(\sigma_2)})$ Zeilen von

$$(286)\qquad (\mathbf{P}_{l2}\mathbf{P}_{l3}\cdots\cdots\mathbf{P}_{ll})$$

mindestens soviele letzteren Koeffizienten wie die Anzahl der Zeilen von (285) gleich Null. Daher kann man durch vollständige Induktion erfahren, daß **P** sich folgendermaßen umformen läßt:

(1) *Die Untermatrix*

$$(287)\qquad \begin{pmatrix} A_{22}^{(\sigma_2)} \\ A_{32}^{(\sigma_2)} A_{33}^{(\sigma_2)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \\ A_{\kappa-1,2}^{(\sigma_2)} A_{\kappa-1,3}^{(\sigma_2)} \cdots\cdots\cdots A_{\kappa-1,\kappa-1}^{(\sigma_2)} \\ A_{\kappa 2}^{(\sigma_2)*} A_{\kappa 3}^{(\sigma_2)*} \cdots\cdots\cdots A_{\kappa,\kappa-1}^{(\sigma_2)*} A_{\kappa\kappa}^{(\sigma_2)*} \end{pmatrix}$$

gleich Null wird, während der andre Teil von A_{σ_2} *außer den Kästchen* $A_{i1}^{(\sigma_2)}$; $i=1, 2,\cdots, w-1$; $A_{wj}^{(\sigma_2)}$; $j=1, 2,\cdots, w$, *aus den voneinander linear unabhängigen Zeilen besteht.*

(2) *Die Untermatrix*

$$(288)\qquad \begin{pmatrix} A_{\kappa 2}^{(\sigma_1)**} A_{\kappa 3}^{(\sigma_1)**} \cdots\cdots\cdots A_{\kappa\kappa}^{(\sigma_1)**} \\ A_{\kappa+1,2}^{(\sigma_1)} A_{\kappa+1,3}^{(\sigma_1)} \cdots\cdots\cdots A_{\kappa+1,\kappa+1}^{(\sigma_1)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \\ A_{\rho-1,2}^{(\sigma_1)} A_{\rho-1,3}^{(\sigma_1)} \cdots\cdots\cdots A_{\rho-1,\rho-1}^{(\sigma_1)} \\ A_{\rho 2}^{(\sigma_1)*} A_{\rho 3}^{(\sigma_1)*} \cdots\cdots\cdots A_{\rho\rho}^{(\sigma_1)*} \end{pmatrix}$$

verschwindt, während die Zeilen des anderen Teils von A_{σ_1} *außer den Kästchen* $A_{i1}^{(\sigma_1)}, A_{wi}^{(\sigma_1)}$; $i=1, 2,\cdots, w$, *voneinander linear unabhängig sind.*

Nach dieser Umformung kann man natürlich nicht immer so annehmen, daß die Kästchen $\mathbf{P}_{ii}$; $i=2, 3, \cdots, w-1$, je aus den voneinander linear unabhängigen Spalten bestehen, aber die linear Unabhängigkeit der ganzen Spalten von (274) bleibt noch fest.[1)]

In Bezug auf die Struktur jenes Teils von $\mathbf{P}$, der die Untermatrix (287) enthält, führt die Frage zum nächsten verallgemeinerten Fall:

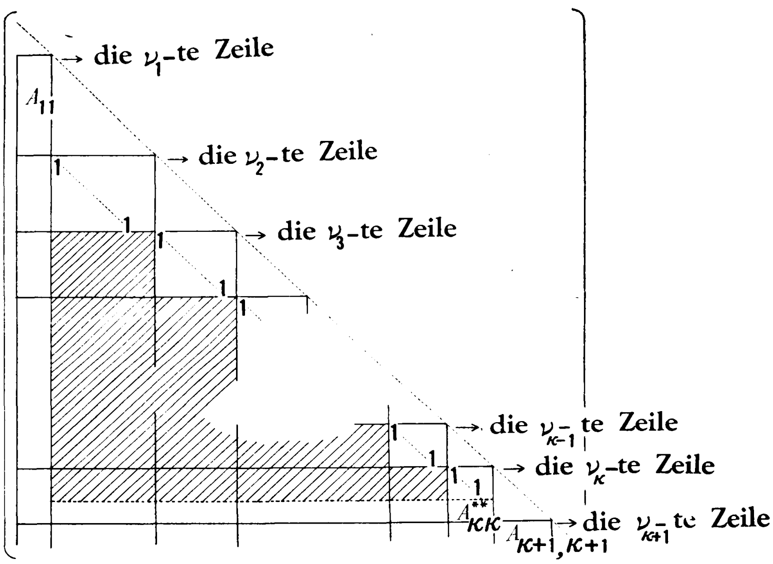
Eins von den Elementen (264), *etwa* A_{σ_1}, *besitzt die Untermatrix, die zu*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} & & & \\ \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{P}_{\kappa-1,2} & \mathbf{P}_{\kappa-1,3} & \cdots & \mathbf{P}_{\kappa-1,\kappa-1} \\ \mathbf{P}^*_{\kappa 2} & \mathbf{P}^*_{\kappa 3} & \cdots & \mathbf{P}^*_{\kappa\kappa} \end{pmatrix} \tag{289}$$

entspricht, mit den voneinander linear unabhängigen Zeilen; während die anderen Elemente alle Nullmatrix als die (289) *entsprechende enthalten.*

In diesem Falle kann man $\mathbf{P}$ so gestalten, daß die (289) entsprechende Untermatrix von A_{σ_1} die folgende Form annimmt:

(290)



1) Diese Eigenschaft wird stets durch A_{σ_1} und A_{σ_2} geliefert.

BEWEIS: Wenn irgend eine Zeile von

$$(A_{j3}^{(\sigma_1)} A_{j4}^{(\sigma_1)} \cdots\cdots A_{jj}^{(\sigma_1)}), \qquad 3 \leqq j \leqq \kappa - 1, \tag{291}$$

oder von

$$(A_{\kappa 3}^{(\sigma_1)*} A_{\kappa 4}^{(\sigma_1)*} \cdots\cdots A_{\kappa\kappa}^{(\sigma_1)*}) \tag{292}$$

gleich Null wird, so verschwindt wie beim Hilfssatz 7 auch der entsprechende Teil von **P**, und da diese Zeile von **P** durch gleichzeitige Permutation der Spalten und Zeilen nach oben bis an die ν_3-te Zeile verschoben werden kann, so kann man o. B. d. A. von vornherein so annehmen, daß die Zeilen von

$$\begin{pmatrix} A_{33}^{(\sigma_1)} & & & \\ A_{43}^{(\sigma_1)} & A_{44}^{(\sigma_1)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{\kappa-1,3}^{(\sigma_1)} & A_{\kappa-1,4}^{(\sigma_1)} & \cdots\cdots & A_{\kappa-1,\kappa-1}^{(\sigma_1)} \\ A_{\kappa 3}^{(\sigma_1)*} & A_{\kappa 4}^{(\sigma_1)*} & \cdots\cdots\cdots & A_{\kappa\kappa}^{(\sigma_1)*} \end{pmatrix} \tag{293}$$

voneinander linear unabhängig sind, so daß man, um die Behauptung durch die vollständige Induktion zu beweisen, voraussetzen kann, daß (293) schon von der verlangten Gestalt ist. Dann gehen die Kästchen

$$A_{i2}^{(\sigma_1)}; \quad i = 3, 4, \cdots\cdots, \kappa - 1; \quad A_{\kappa 2}^{(\sigma_1)*} \tag{294}$$

nach dem analogen Verfahren wie 6 sämtlich in Null über (S. 508), auch die letzteren $s_2 - s_3$ Spalten von $A_{22}^{(\sigma_1)}$ verschwinden durch das Verfahren 3. Endlich kann man dem Kästchen $A_{22}^{(\sigma_1)}$ die verlangte Gestalt geben, indem man **P** mit der folgenden Matrix

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \boxed{T_1} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \to \text{die } \nu_1\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{295}$$

transformeirt, wobei T_1 diejenige Untermatrix bedeutet, welche aus den ersteren s_3 Spalten von $A_{22}^{(\sigma_1)}$ besteht.

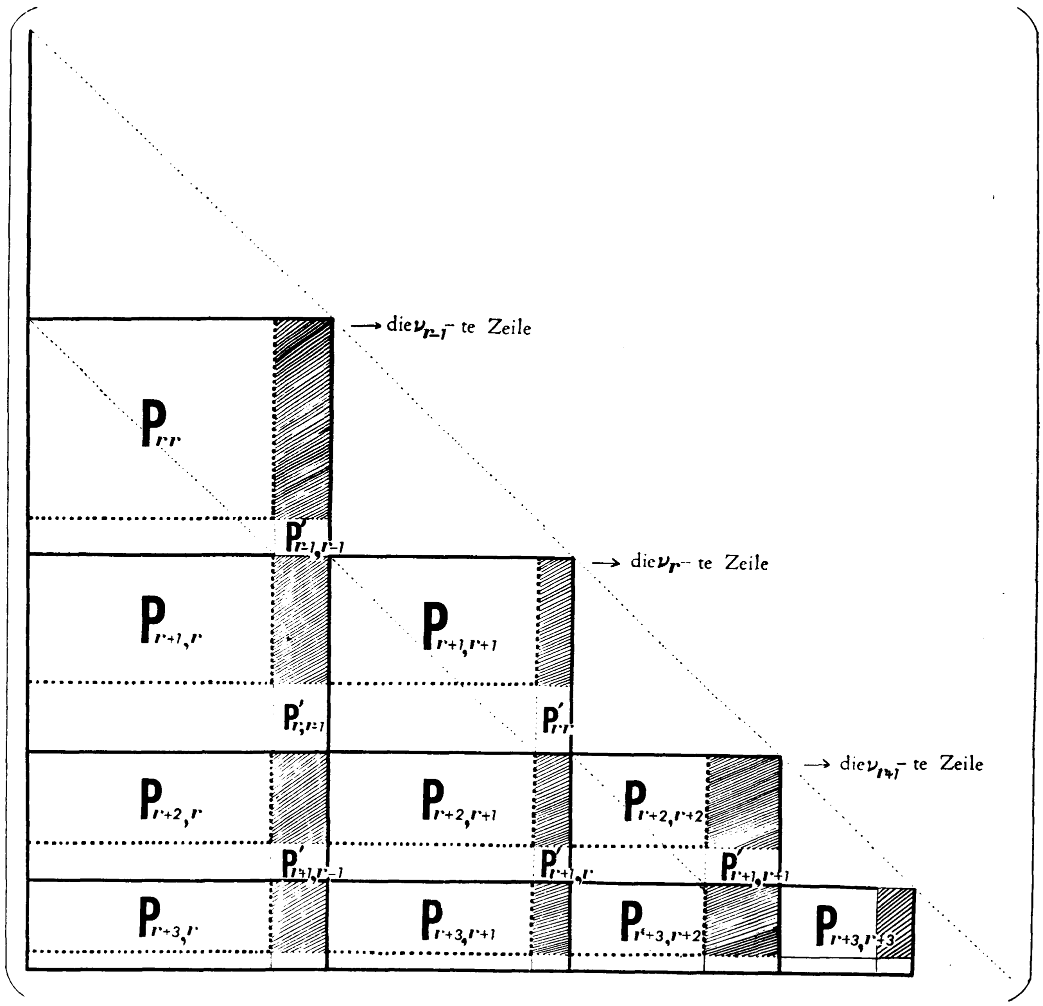
Die analoge Transformation gilt auch für den Fall $\kappa=3$, w. z. b. w.

Dann verschwinden bei $\mathbf{P}$ wegen

(296) $$A_{\sigma_1}\mathbf{P}=\mathbf{P}A_{\sigma_1}$$

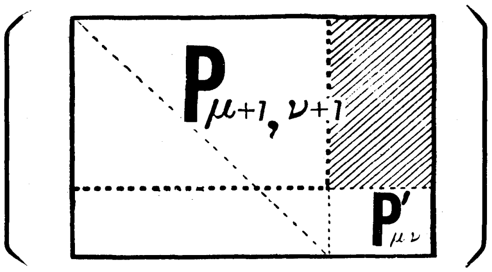
die letzteren s_j-s_{i+1} Koeffizienten jeder der ersteren s_{i+2} Zeilen der Kästchen $\mathbf{P}_{ij}$; $i=2, 3,\cdots, \kappa-2$; $j=2, 3,\cdots, i$, und diejenigen der ersteren $r(A_{\kappa\kappa}^{(\sigma_1)*})$ Zeilen der Kästchen $\mathbf{P}_{\kappa-1,i}$; $i=2, 3,\cdots, \kappa-1$, also wird $\mathbf{P}$ von der folgenden Gestalt

(297)

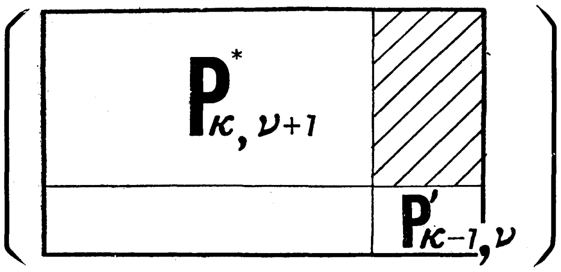


,

wobei

(298) $\mathbf{P}_{\mu\nu} =$ 

$; \quad \mu = 2, 3, \cdots, \kappa-2;\ \nu = 2, 3, \cdots, \mu,$

(299) $\mathbf{P}_{\kappa-1,\nu} =$ 

$; \quad \nu = 2, 3, \cdots, \kappa-1.$

Man bezeichnet nun die Anzahl der voneinander linear unabhängigen Spalten der folgenden Untermatrix

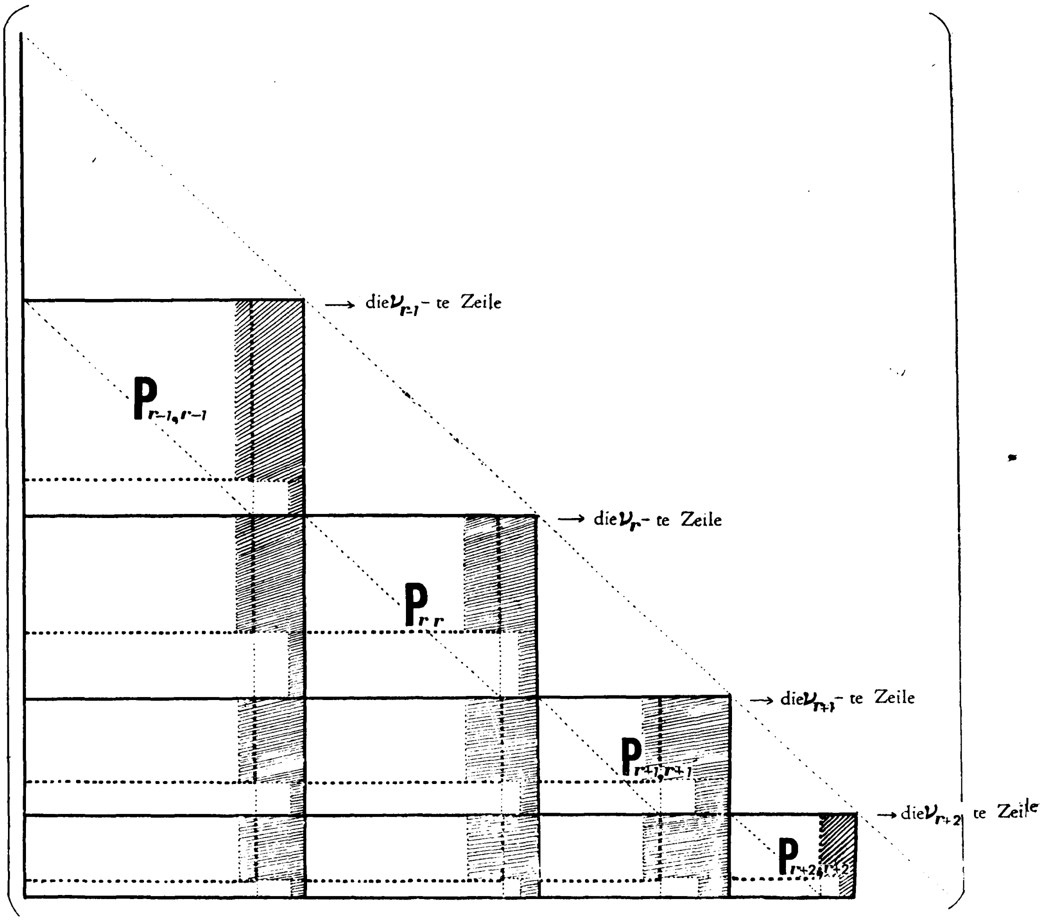
$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}'_{jj} \\ \mathbf{P}'_{j+1,j} \\ \mathbf{P}'_{j+2,j} \\ \vdots \\ \mathbf{P}'_{\kappa-1,j} \\ \mathbf{P}^{*\prime}_{\kappa,j} \end{pmatrix} ; \qquad j = 3, 4, \cdots, \kappa, \tag{300}$$

mit t_j, und nimmt nach dem Verfahren 4 o. B. d. A. an, daß die ersteren t_j Spalten von (300) nicht verschwinden, während die anderen Spalten gleich Null werden.[1]

Dann verschwinden wegen (296) die letzteren $s_{j-1} - s_j + t_j$ Koeffizienten jeder der ersteren s_{i+1} Zeilen von $\mathbf{P}_{i,j-1}$; $i = j-1, j, \cdots, \kappa-2$, und diejenigen der ersteren $r(A_{\kappa\kappa}^{(\sigma_1)*'})$ Zeilen von $\mathbf{P}_{\kappa-1,j-1}$ sämtlich, mithin geht die Untermatrix (297) in die folgende Gestalt über:

1) Unter geeigneter Wahl der transformierenden Matrix, bleibt die Form (290) dabei unverändert. Diese $\sum_{j=3}^{\kappa} t_j$ Spalten können angenommen auch voneinander linear unabhängig sein.

(301)



Nimmt man die folgenden $\sum_{i=3}^{\kappa-1} s_i + r(A_{\kappa\kappa}^{(\sigma_1)^*}) = s_*$ Basiselemente

(302) $$A_i\,; \qquad i = \nu_2,\ \nu_2+1,\ \nu_2+2, \cdots, \nu_2+s_*-1\,,$$

unter (238) heraus, und vergleicht je die λ-ten; $\lambda = \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$, Zeilen der beiden Seiten der folgenden Gleichungen

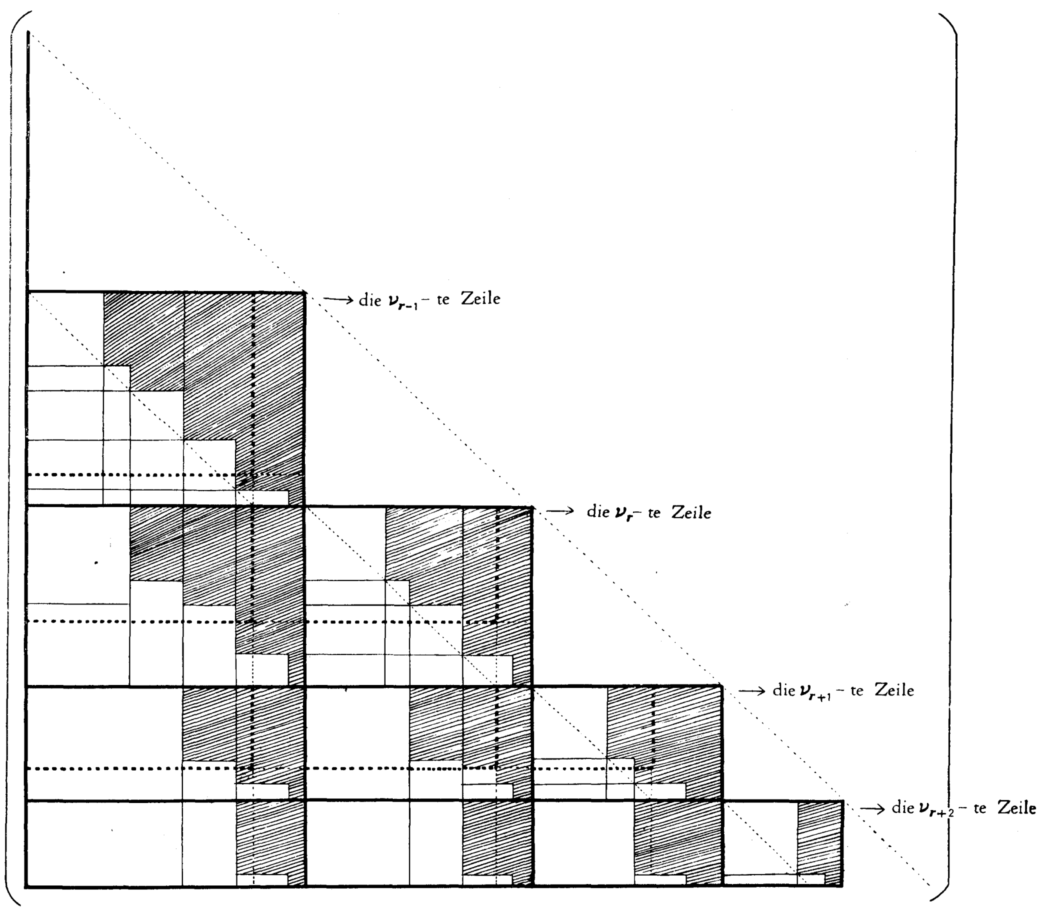
(303) $$A_i\mathbf{P} = \mathbf{P}A_i\,; \quad \nu_{j-1} \leqq i < \nu_{j-1}+s_{j+1}\,; \quad j = 2, 3, \cdots, \kappa-1\,,$$

während man den schraffierten Teil von (301) in Betracht zieht, dann erfährt man analog wie beim Beweise des Hilfssatzes 6, daß die letzteren $s_{j-1}-s_j+t_j$ Spalten der Untermatrizen

$$
\begin{pmatrix}
A^{(i)}_{j-1,j-1} \\
A^{(i)}_{j,j-1} \\
A^{(i)}_{j+1,j-1} \\
\vdots \\
A^{(i)}_{w-2,j-1}
\end{pmatrix}
\tag{304}
$$

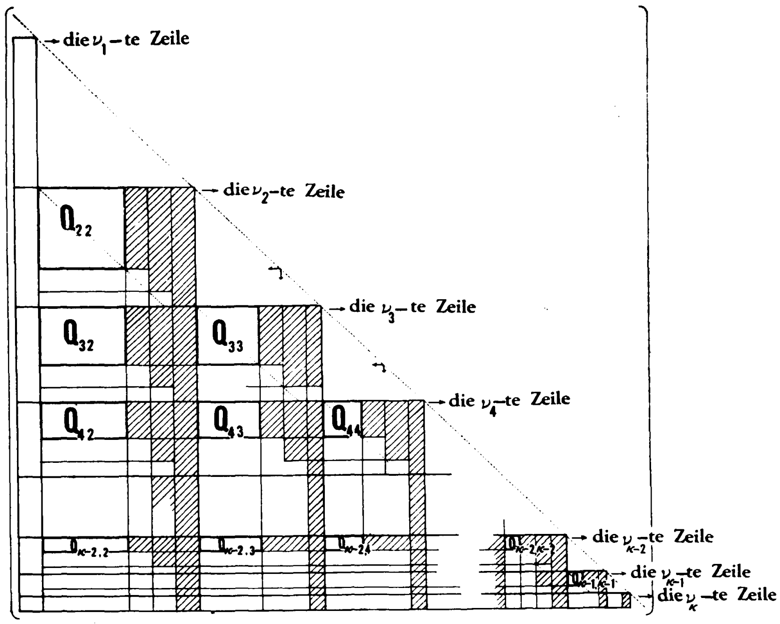
alle gleich Null werden. Also müssen links auch die entsprechenden Spalten von $A_i\mathbf{P}$ verschwinden. Da andererseits aber alle i-ten Zeilen von den Basiselementen (238) in A_i enthalten (I, *S.* 167), und die ersteren t_j Spalten von (300) voneinander linear unabhängig sind, so werden auch die letzteren $s_j-(s_{j+2}+t_{j+1})$ Koeffizienten jeder der ersteren $s_{i+2}+t_{i+1}$ Zeilen von $\mathbf{P}_{ij}$; $i=2, 3,\cdots, \kappa-1$; $j=2, 3,\cdots, i$, gleich Null. Mithin nimmt (297) die folgende Gestalt an:

(305)



und der entsprechende Teil von **P**:

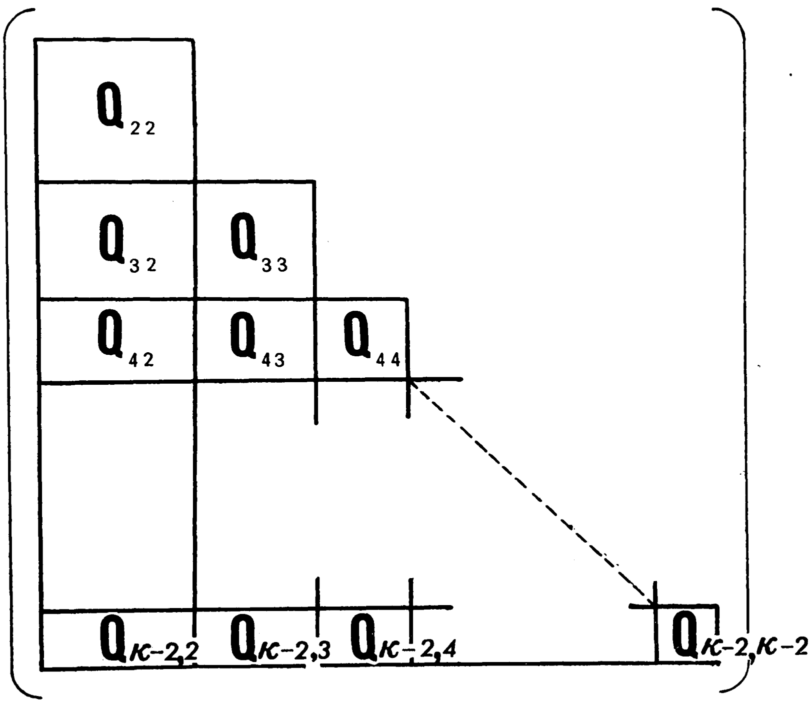
(306)



,

wobei

(307)



$\mathbf{GF}_{(p^\lambda)}$, $\lambda = \sum_{i=2}^{\kappa-2}(s_{i+2}+t_{i+1})$, darstellt.

Folglich, was die Struktur der Gruppenmatrix in bezug auf (306) betrifft, führt unsre Frage zum Falle der Substitutionsgruppe vom niedrigerem Grade zurück.

(Fortsetzung folgt)

Totuka, Yokohama.