Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 5, No. 2, July, 1953.

Sur l'equation intégrale

$$x\,u(x)=f(x)+\int_0^x K\big(x,t,u(t)\big)\,dt\,.$$

Par Tokui SATŌ

(Reçu le 19 mai, 1952)

1. Le théorème d'existence de Cauchy relatif aux équations différentielles peut s'étendre immédiatement à l'équation intégrale de Volterra

$$u(x)=f(x)+\int_0^x K\big(x,t,u(t)\big)\,dt\,,$$

où $f(x)$ et $K(x,t,u)$ sont régulières respectivement dans $|x|<r$ et dans $|x|<r$, $|t|<r$, $|u-f(x)|<\rho$. Nous voulons étudier ici, par une méthode analogue à celle de M. le Prof. Hukuhara pour les équations différentielles ordinaires,[1] le cas où $K(x,t,u)$ admet $x=0$ comme un pôle d'ordre 1. Dans ce cas nous pouvons écrire l'équation sous la forme

$$xu(x)=f(x)+\int_0^x K\big(x,t,u(t)\big)\,dt \tag{1}$$

où $f(x)$ $\big(f(0)=0\big)$ et $K(x,t,u)$ désignent des fonctions régulières respectivement dans $|x|<r$ et dans $|x|<r$, $|t|<r$, $|u-c_0|<\rho$.

THÉORÈME 1. *S'il existe une série*

$$u(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots \tag{2}$$

qui satisfait formellement à l'équation intégrale (1), *cette série a un rayon de convergence positif et représente une solution, qui est caractérisée par la propriété:* $u(x)-P_n(x)=0\,(x^n)$, *où* $P_n(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$, $n=[|\lambda|]+1$, $K'_u(0,0,c_0)=\lambda$.

Démontrons d'abord un

LEMME 1. *Si l'inéquation intégrale*

1) M. Hukuhara, Equations différentielles ordinaires, (1950), Iwanami, (en japonais).

$$x\,u(x) \leq \nu \int_0^x u(t)\,dt\,, \qquad 0<\nu\,,\quad 0<x\,,$$

admet une solution continue dans l'intervalle I: $0<x\leq r$ *telle que* $0\leq u(x)=o(x^{\nu-1})$, *elle est nécessairement* $u(x)\equiv 0$.

En effet, si l'on pose

$$u(x)=x^{\nu-1}\,w(x)\,,$$

l'inéquation devient

$$x^{\nu}\,w(x) \leq \nu \int_0^x t^{\nu-1}\,w(t)\,dt\,.$$

$w(x)$ est continue dans I et $w(x)\to 0$ pour $x\to 0$. Si $w(x)\neq 0$, $w(x)$ atteint son maximum $W=w(x_0)>0$, $0<x_0\leq r$. On a donc

$$x_0^{\nu}\,W=x_0^{\nu}\,w(x_0)\leq \nu\int_0^{x_0} t^{\nu-1}\,w(t)\,dt < \nu\, W\int_0^{x_0} t^{\nu-1}\,dt=x_0^{\nu}\,W\,,$$

ce qui est absurde, C. Q. F. D.

Pour démontrer le théorème 1, nous posons

$$u(x)=w(x)+P_n(x)\,.$$

L'équation intégrale en $w(x)$ devient

$$x\,w(x)=g(x)+\int_0^x L\big(x,t,w(t)\big)\,dt\,, \tag{3}$$

où

$$g(x)=\int_0^x K\big(x,t,P_n(t)\big)\,dt+f(x)-x\,P_n(x)\,,$$

$$L(x,t,w)=K\big(x,t,w+P_n(t)\big)-K\big(x,t,P_n(t)\big)\,.$$

L'équation (3) admet une solution formelle

$$w(x)=c_n\,x^n+c_{n+1}\,x^{n+1}+\cdots$$

et $g(x)$ a x^{n+1} comme facteur.

Si n est un entier tel que l'on ait $n-|\lambda|>0$, on a alors

$$|g(x)|\leq G_n\,|x|^{n+1} \qquad \text{dans} \qquad |x|<r'\,,$$

$$|L(x,t,w)|\leq \nu\,|w| \quad \text{dans} \quad |x|<r'\,,\quad |t|<r'\,,\quad |w|<\rho'\,,$$

en désignant par r', ρ' des nombres positifs assez petits, et par ν un nombre tel que $|\lambda|<\nu<[|\lambda|]+1$.

Soient n un entier tel que $n > |\lambda|$ et r'' un nombre positif tel que $r'' \leq r'$ et $L\, r''^n < \rho'$, où $L = (n+1)\, G_n$.

Considérons une famille $\mathfrak{F}$ formée des fonctions régulières dans $|x| < r''$ et telles que $|w(x)| \leq L\,|x|^n$. Nous faisons correspondre à $w(x) \in \mathfrak{F}$ la fonction $\overline{w}(x)$ définie par

$$\overline{w}(x) = \frac{1}{x}\left\{ g(x) + \int_0^x K\big(x, t, w(t)\big)\, dt \right\}.$$

$\overline{w}(x)$ est alors régulière dans $|x| < r''$, et satisfait à

$$|\overline{w}(x)| \leq \left(G_n + \frac{n}{n+1}\, L\right) |x|^n = L\,|x|^n.$$

$\overline{w}(x)$ appartient donc à $\mathfrak{F}$.

Si une suite $\{w_n(x)\}$ de fonctions régulières de $\mathfrak{F}$ converge uniformément à l'intérieur de $|x| < r''$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \overline{w}_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x}\left\{ g(x) + \int_0^x L\big(x, t, w_n(t)\big)\, dt \right\}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left\{ g(x) + \int_0^x L\big(x, t, \lim_{n\to\infty} w_n(t)\big)\, dt \right\}.$$

D'après le théorème d'existence il existe une fonction $w(x)$ telle que l'on ait

$$w(x) = \frac{1}{x}\left\{ g(x) + \int_0^x L\big(x, t, w(t)\big)\, dt \right\}, \qquad w(x) \in \mathfrak{F}.$$

La fonction $u(x) = P_n(x) + w(x)$ est donc une solution de l'équation (1) qui est régulière dans $|x| < r''$.

Nous allons montrer que l'équation (3) n'admet qu'une solution $w(x)$ régulière au voisinage de $x=0$ et telle que $w(x) = 0(x^\nu)$.

Supposons qu'il existe deux telles solutions $w_1(x)$ et $w_2(x)$. $W(s) = |w_1(s\,e^{i\theta}) - w_2(s\,e^{i\theta})|$ est donc continue dans $0 < s \leq r'''$ et satisfait à l'inéquation suivante

$$s\, W(s) \leq \nu \int_0^s W(t)\, dt,$$

où r''' est un nombre assez petit. D'après le lemme 1 on a

$$w_1(x)-w_2(x)\equiv 0\,.$$

On en conclut que l'équation intégrale (1) n'admet qu'une solution $u(x)$ régulière dans $|x|<r''$ et telle que

$$u(x)-P_n(x)=0\,(x^\nu)\,.$$

Elle peut s'écrire

$$u(x)=P_n(x)+w(x)\,, \qquad (n\geqq\nu)\,,$$

où $w(x)$ est la solution régulière de l'équation (3).

$n\,(\geqq\nu)$ étant arbitraire, le développement de $u(x)$ est (2), C. Q. F. D.

Soient

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots\,,$$

$$K(x,t,u)=\sum b_{ijk}\,x^i\,t^j\,u^k \tag{4}$$

les développements en séries de puissances entières de $f(x)$ et de $K(x,t,u)$.

Si (2) est une solution formelle, on a

$$c_0=a_1+K(0,0,c_0)\,,$$

$(2-\lambda)\,c_1=2a_2+2b_{100}+b_{010}$, et en général

$$(n+1-\lambda)\,c_n=\mathfrak{P}_n(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}) \quad (n=1,2,\cdots)\,, \tag{5}$$

où $\mathfrak{P}_n(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$ est un polynome en $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$. Supposons qu'on a défini $c_0,c_1,\cdots,c_{m-1}$ de manière que (5) soient satisfaites pour $n=1,2,\cdots,m-1$. Si $\lambda-1\neq m$, on peut déterminer c_m d'une seule manière par (5). Si $\lambda-1=m$, $\mathfrak{P}_m(c_0,c_1,\cdots,c_{m-1})\neq 0$, la relation (5) ne peut être satisfaite pour $n=m$. Mais si l'on a $\lambda-1=m$, $\mathfrak{P}_m(c_0,c_1,\cdots,c_{m-1})=0$, on peut donner à c_m une valeur quelconque. Les coefficients $c_{m+1},\cdots$ se determinent d'une seule manière à l'aide des relations (5). On a donc le

THÉORÈME 2. *Soit* $c_0=a_1+K(0,0,c_0)$. *Si* λ *n'est pas un entier positif, l'équation* (1) *admet une solution formelle et une seulle* (2). *Si* λ *est un entier, il n'existe en général aucune solution formelle* (2), *mais s'il en existe une, elle dépend d'une constante arbitraire.*

2. Considérons maintenant le cas où l'équation (1) admet une solution régulière (2) et désignons-la par $\varphi(x)$.

Si l'on pose

$$u(x) = w(x) + \varphi(x),$$

on a pour $w(x)$ l'équation

$$x\,w(x) = \int_0^x \Big\{ K\big(x, t, w(t) + \varphi(t)\big) - K\big(x, t, \varphi(t)\big) \Big\}\, dt.$$

On peut donc prendre sans perdre la généralité l'équation

$$x\,u(x) = \int_0^x K\big(x, t, u(t)\big)\, dt, \tag{6}$$

où $K(x, t, u)$ est régulière dans $|x| < r$, $|t| < r$, $|u| < \rho$, et

$$K(x, t, 0) \equiv 0, \qquad K'_u(0, 0, 0) = \lambda.$$

THÉORÈME 3. *Si $\lambda - 1$ n'est pas 0, ni un entier positif ni un nombre rationnel négatif, l'équation* (6) *admet une solution formelle et une seule*

$$u(x) = \sum_{j,k} p_{jk}\, x^j\, z(x)^{k+1}, \qquad (p_{00} = 1), \tag{7}$$

où $z(x) = C\, x^{\lambda - 1}$, C désignant une constante arbitraire.

En effet, soit (4) le développement en série entière de $K(x, t, u)$. On a alors $b_{ij0} = 0$, $b_{001} = \lambda$, et

$$\sum_{j,k} p_{jk}\, x^{j+1}\, z(x)^{k+1} = \int \sum_{i,j,k} b_{ijk}\, x^i\, t^j \Big(\sum_{l,m} p_{lm}\, t^l\, z(t)^{m+1} \Big)^k dt$$

dont le second membre est constitué des termes de la forme

$$\int x^i\, t^j\, z(t)^k\, dt = x^{i+j+1}\, z(x)^k / \big(1 + j + (\lambda - 1)\, k\big), \qquad (k \geq 1).$$

On en déduit pour $j + k > 0$ les relations

$$\frac{j + (\lambda - 1)(k - 1)}{j + 1 + (\lambda - 1)\, k}\, p_{jk} = \mathfrak{P}_{jk}(p_{lm}),$$

où $\mathfrak{P}_{jk}(p_{lm})$ est un polynome en p_{lm} $(l + m < j + k)$. A l'aide de ces relations on peut déterminer les p_{jk} d'une seule manière, ce qui établit le théorème.

Dans le cas où $\lambda - 1$ est un entier positif, il n'existe pas en général une solution formelle (7). Mais si $\mathfrak{P}_{\lambda-1,0}(p_{lm})$ devient nul, il existe certainement une solution formelle (7).

Nous allons montrer par la méthode de M. le Prof. Hukuhara[2] la convergence de la série (7), en supposant l'existence de la solution formelle (7), pourvu que $\lambda-1$ ne soit pas nul ni nombre négatif.

Posons pour cela

$$P_N(x,z)=\sum_{1+j+k<N} p_{jk}\, x^j z^{k+1},$$

$$w(x)=u(x)-P_N\big(x, z(x)\big), \qquad \big(z(x)=C\, x^{\lambda-1}\big).$$

L'équation intégrale en $w(x)$ peut s'écrire

$$x\, w(x)=\int_0^x L\big(x,t,z(t),\ w(t)\big)\, dt, \tag{8}$$

où

$$L(x,t,z,w)=K\big(x,t,w+P_N(t,z)\big)-P_N(t,z)$$

$$-t\,\frac{\partial P_N(t,z)}{\partial t}-(\lambda-1)\, z\,\frac{\partial P_N(t,z)}{\partial z}.$$

$L(x,t,z,w)$ est donc régulière au voisinage de $(0,0,0,0)$ en x,t,z,w et développable en série entière :

$$L(x,t,z,w)=\sum_{i,j,k,l} c_{ijkl}\, x^i t^j z^k w^l, \quad (c_{0000}=0,\quad c_{0001}=\lambda). \tag{10}$$

Par hypothése l'équation (8) admet une solution formelle

$$w(x)=\sum_{1+j+k\geq N} p_{jk}\, x^j (C\, x^{\lambda-1})^{k+1}.$$

On peut en conclure

$$c_{ijk0}=0 \qquad (i+j+k<N).$$

Si donc $|\lambda|<A$, on peut prendre une constante B_N de manière que l'on ait

$$|L(x,t,z,w)|\leq A\,|w|+B_N(|x|^N+|t|^N+|z|^N)$$

---

2) Loc. cit. 180-187.

pour $|x|<r'$, $|t|<r'$, $|z|<r'$, $|w|<\rho'$, r' et ρ' désignant des nombres positifs assez petits.

Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille des fonctions $\psi(x,z)$ régulières dans $|x|<r''$, $|z|<r''$ et satisfaisant à l'inégalité

$$|\psi(x,z)|\leq K(|x|^N+|z|^N),$$

K désignant une constante dont la valeur sera déterminée plus tard.

Soit Γ_ξ un chemin joignant 0 et $\xi=\sigma e^{i\omega}$ et dont l'équation est $\theta=\omega+\alpha\log(s/\sigma)$ $(0<s\leq\sigma)$ où $x=s\,e^{i\theta}$. Si $\lambda-1=\mu+i\nu$, on a

$$|x^{\lambda-1}|=s^{\mu-\nu\alpha}\sigma^{\nu\alpha}e^{-\nu\omega}.$$

Pour que $|x^{\lambda-1}|\to 0$ lorsque $s\to 0$, il suffit que $\mu-\nu\alpha>0$. Sous l'hypothèse où nous nous plaçons, on peut toujours déterminer α de sorte que $\mu-\nu\alpha>0$.

Sur le chemin Γ_ξ, $|x^{\lambda-1}|$ est une fonction croisante de s. Les inégalités $|\xi|<r''$, $|C\xi^{\lambda-1}|<r''$, entraînent donc $|x|<r''$, $|Cx^{\lambda-1}|<r''$ pour $x\in\Gamma_\xi$. Si l'on prend r'' tel que

$$(9)\qquad r''<\min\{1,r'\},\qquad 2K\,r''^N<\rho',$$

on a

$$\begin{aligned}|L(x,t,z,\psi(t,z))|&\leq A\,|\psi(t,z)|+B_N(|x|^N+|t|^N+|z|^N)\\&\leq(A\,K+B_N)(|t|^N+|z|^N)+B_N|x|^N\end{aligned}$$

pour $x,t\in\Gamma_\xi$, $z=C\,t^{\lambda-1}$.

Posons

$$\overline{\Psi}(x,C)=\int_{\Gamma_x}L\left(x,t,C\,t^{\lambda-1},\ \psi(t,C\,t^{\lambda-1})\right)dt$$

et

$$x\,\overline{\psi}(x,z)=\overline{\Psi}(x,z\,x^{-\lambda+1}).$$

On a alors

$$\begin{aligned}|\overline{\Psi}(\xi,C)|&\leq\int_0^\sigma|1+i\alpha|\left\{(A\,K+B_N)(s^N+D\,s^{N(\mu-\nu\alpha)})+B_N\sigma^N\right\}ds\\&=|1+i\alpha|\left\{(A\,K+B_N)\left(\frac{\sigma^{N+1}}{N+1}+D\frac{\sigma^{N(\mu-\nu\alpha)}}{N(\mu-\nu\alpha)+1}\right)+B_N\sigma^{N+1}\right\}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{|1+i\alpha|}{N\gamma+1}\big(AK+(N+2)B_N\big)\Big\{|\xi|^N+|C\xi^{\lambda-1}|^N\Big\}|\xi|,$$

où $D=(|C|\sigma^{\nu\alpha}e^{-\nu\omega})^N$, $\gamma=\min\{1, \mu-\nu\alpha\}$. Par suite si

$$(10)\qquad |1+i\alpha|\big(AK+(N+2)B_N\big)\leq(N\gamma+1)K,$$

on a

$$(11)\qquad |\bar{\psi}(\xi,\zeta)|\leq K(|\xi|^N+|\zeta|^N)\qquad(\zeta=C\xi^{\lambda-1})$$

pour $0<|\xi|<r''$, $|\zeta|<r''$.

Pour montrer la régularité de $\bar{\psi}(x,z)$ pour $|x|<r''$, $|z|<r''$, nous considérons la fonction $L\big(x,t,z,\psi(t,z)\big)$ qui est régulière pour $|x|<r''$, $|t|<r''$, $|z|<r''$. Désignons par $L_m(x,t,z)$ le polynome formé de tous les termes de degrés moindres que m dans le développement en série entière de cette fonction et posons

$$L\big(x,t,z,\psi(t,z)\big)=L_m(x,t,z)+M_m(x,t,z).$$

On peut faire correspondre à un nombre quelconque r''' $(0<r'''<r'')$ un nombre M tel que l'on ait

$$|M_m(x,t,z)|\leq M(|x|^m+|t|^m+|z|^m),\qquad(m=1,2,\cdots)$$

pour $|x|<r'''$, $|t|<r'''$, $|z|<r'''$. On a alors

$$\Big|\int_{\Gamma_\xi}M_m(\xi,t,Ct^{\lambda-1})\,dt\Big|$$
$$\leq M|1+i\alpha|\Big(|\zeta|^{m+1}+\frac{1}{m\gamma+1}(|\xi|^m+|C\xi^{\lambda-1}|^m)\Big).$$

On en conclut que l'intégral $\int_{\Gamma_\xi}L_m(\xi,t,Ct^{\lambda-1})\,dt$ converge uniformément vers $\bar{\psi}(\xi,C\xi^{\lambda-1})$ pour $|\xi|<r''$, $|C\xi^{\lambda-1}|<r''$ lorsque $m\to\infty$. Or cette intégral est un polynome en ξ et $C\xi^{\lambda-1}$. $\bar{\psi}(x,z)$ est donc régulière pour $|x|<r''$, $|z|<r''$.

Si l'on prend d'abord N de sorte que $N\gamma+1>|1+i\alpha|A$, l'inégalité (10) est satisfaite par un nombre assez grand K. Puis on prend r'' assez petit de sorte que l'inégalité (9) soit satisfaite. Alors $\bar{\psi}(x,z)$ appartient à $\mathfrak{F}$, car l'inégalité (11) subsiste dans $|\xi|<r''$, $|\zeta|<r''$.

On peut vérifier sans peine que la convergence uniforme de la série $\{\psi_n(x, z)\}$ extraite de $\mathfrak{F}$ entraîne celle de la série correspondante $\{\overline{\psi}_n(x, z)\}$.

D'après le théorème d'existence déjà cité il existe une fonction $\psi(x, z)$ telle que l'on ait

$$\psi(x, z)=\overline{\psi}(x, z), \qquad \psi(x, z) \in \mathfrak{F}.$$

Posons

$$\varphi(x, z)=P_N(x, z)+\psi(x, z),$$

alors

$$u(x)=\varphi(x, C x^{\lambda-1})$$

est une solution de l'équation (6).

Nous arrivons donc au théorème suivant.

THÉORÈME 4. *Si* $\lambda-1$ *n'est pas nul ni un nombre négatif, et si l'équation* (6) *admet une solution formelle* (7), *cette série est convergente lorsque* $|x|$ *et* $|z(x)|$ *sont assez petit, et représente la solution de l'équation* (6), *où l'on prend pour chemin d'intégration la courbe* Γ'_x *définie ci-dessus.*

21 octobre 1951.

L'université de Kōbe.