Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 2, December, 1951.

Sur les Fonctions Analytiques de Plusieurs Variables, VIII—Lemme Fondamental (Suite)

Kiyoshi OKA

(Received March 15, 1951)

II. Domaines intérieurement ramifiés

5. Définitions.—Selon l'Ouvrage de *H. Behnke* et *P. Thullen*, considérons sur l'espace fini de n variables complexes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les domaines qui n'ont pas de point critique comme point intérieur, les points frontières, les points critiques comme points frontières etc. Nous allons d´finir les domaines intérieurement ramifiés.

Soit M un point critique d'un domaine $\mathfrak{D}$, nous l'appellerons *point critique non-transcendant*, s'il satisfait aux conditions que : 1° l'ordre soit fini(1). 2° Soit $\underline{M}$ le base-point (Grundpunkt) de M, il existe un domaine univalent $\underline{\delta}$ contenant $\underline{M}$ tel que, δ étant la composante connexe ayant M comme point frontière, de la portion de $\mathfrak{D}$ sur $\underline{\delta}$, l'ensemble des base-points des points frontières de δ dans $\underline{\delta}$ soit une surface caractéristique.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine quelconque d´fini comme ci-dessus ; considérons un ensemble de points $\mathfrak{D}'$, en adjoignant à $\mathfrak{D}$ une partie de ses points critiques non transcendants qui peut être nulle, ou bien consister de tous de façon que, pour tout point critique M de $\mathfrak{D}$ appartenant à $\mathfrak{D}'$, il existe un domaine univalent $\underline{\delta}$ contenant le base-point $\underline{M}$ de M tel que, δ étant la composante connexe ayant M comme point frontière de la portion de $\mathfrak{D}$ sur $\underline{\delta}$, tout point critique non-transcendant de δ appartienne à $\mathfrak{D}'$; et désormais, nous appellerons $\mathfrak{D}'$ *domaine*. Tout point du domaine $\mathfrak{D}'$ qui n'est pas point critique sera appelé *régulier*. Pour la relation et l'intersection de deux domaines ainsi étendus, il suffit de définir au moyant des domaines consistant des points réguliers des domaines donnés.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine, soit $\mathfrak{D}_0$ l'ensemble des points réguliers de $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{D}$ sera appelé *pseudoconvexe*, si $\mathfrak{D}_0$ est ainsi.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine, soit P un point quelconque de $\mathfrak{D}$ dont les coordonnées seront généralement désignées par (x) dans la suivante ; une fonction $f(P)$ est appelée *holomorphe* dans $\mathfrak{D}$, si elle satisfait aux conditions

(1) Nous appellerons ordre du point critique le nombre $m-1$, au lieu du nombre de feuilles m de la page 13 de l'Ouvrage.

que : 1° à tout point P de $\mathfrak{D}$, il corresponde une valeur finie de f et une seule ; 2° $f(P)$ soit une fonction continue de P; 3° au voisinage de tout point régulier de $\mathfrak{D}$, $f(P)$ soit une fonction holomorphe de (x). Un domaine $\mathfrak{D}$ sera appelé *domaine d'holomororphie*, s'il existe une fonction telle que elle soit holomorphe dans $\mathfrak{D}$ sans l'être pour tout autre domaine contenant $\mathfrak{D}$.

Nous appellerons avec *H. Cartan*,[10] *domaine polyédral* tout ensemble de points Δ qui peut s'exprime de la forme suivante :

$$\Delta \Subset (R), \quad f_i(P) \in A_i \quad (i=1, 2, \ldots, m)$$

dont (R) signifie un domaine partiel (Teilbereich, connexe ou non) d'un domaine d'holomorphie, $f_i(P)$, des fonctions holomorphes dans (R) et A_i, des domaines *fermés* bornés et *simplement connexes* du plan. Les domaines (fermés connexes ou non) de ce type ont été considéres pour la première fois par *A. Weil*[11] ; c'est sur leurs que nous avons établi le lemme fondamental (Théorème II) dans le Mémoire I, et que nous somme en train de la rétablier.

6. Propriété (H).—Traçons à l'espace (x) un domaine univalent et considérons dans $\mathfrak{D}$ une variété caractéristique S; une fonction u sur S sera appelée *holomorphe*, si elle satisfait aux conditions que : 1° pour tout point régulier de S, il corresponde une valeur déterminée de u, de façon que u soit localement la trace d'une fonction holomorphe à l'espace (x) ; 2° u soit bornée pour les points réguliers au voisinage d'un point quelconque de S. u sera appelée holomorphe en un point de S, si elle est holomorphe dans un voisinage de ce point.

Soit M un point de S, et soit u une fonction holomorphe sur S en M; si u est la trace d'une fonction holomorphe a l'espace (x), sauf peut être aux points singuliers, nous appellerons que u jouit de la propriété (H). Si toute u jouit de la propriété (H), nous appellerons que le point M possède la propriété (H).[12] Pour étudier cette propriété, introduisons le lemme suivant :

Lemme de H. Cartan (*Théorème des trois anneaux*) *Considérons à l'espace* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geqq 3)$ *les trois domaines univalents* Δ_1, Δ_2, Δ_3 *des formes suivantes :*

(10) H. Cartan, 1950, No. 21.

(11) A. Weil, 1932 (C. R.) 1935 (Math. Annalen).

(12) Par exemple, pour la surface $y^2=x^3$ à l'espace (x, y), le point (0, 0) n'a pas de la propriété (H).

$$(\Delta_1) \quad \rho_1<|x_1|<r_1,\ |x_2|<r_2,\ |x_3|<r_3,\ (x_4, \ldots, x_n) \in \mathfrak{D}$$
$$(\Delta_2) \quad |x_1|<r_1,\ \rho<|x_2|<r_2,\ |x_3|<r_3, \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$
$$(\Delta_3) \quad |x_1|<r_1,\ |x_2|<r_2,\ \rho<|x_3|<r_3, \quad \text{,,} \quad \text{,,}$$

où $\mathfrak{D}$ *est un damaine univalent,* r_i $(i=1, 2, 3)$ *des nombres positifs et* ρ_i *des nombres positifs ou nuls. Etant données des fonctions* $g_i(x)$ *holomorphes dans* $\Delta_j \cap \Delta_k$, *respectivement,* (i, j, k) *étant un échange circulaire quelconque de* $(1, 2, 3)$, *telles que l'on ait identiquement*

$$g_1+g_2+g_3=0,$$

on peut trouver des fonctions $h_i(x)$ *holomorphes dans* Δ_i, *respectivement, de façon que l'on ait identiquement*

$$g_1=h_2-h_3,\ g_2=h_3-h_1,\ g_3=h_1-h_2$$ [13]

Lemme 1.—*Etant données dans un domaine univalent* $\mathfrak{D}$ *à l'espace fini* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n\geqq 3)$, *une surface caractéristique* S, *une fonction holomorphe* u *sur* S *et une variété caractéristique* S_0 *sur* S, *à* $(n-3)$ *dimensions (complexes), si* u *jouit de la propriété* (H) *en tout point de* $(S-S_0)$, *il en est de même pour* S_0.

En effet, soit (x^0) un point quelconque de S_0 ; il suffit de montrer que u possède la propriété (H) en (x^0) ; nous regarderons (x^0) comme l'origine, et nous ne parlerons dans la suivante que dans un voisinage suffisamment petit de l'origine. S_0 étant à $(n-3)$ dimensions, nous pouvons choisir les coordonnées (x) et les nombres positifs ρ, r, r', et former selon le lemme de Cartan, les domaines Δ_1, Δ_2, Δ_3, dont $\rho_1=\rho_2=\rho_3=p$, $r_1=r_2=r_3=r$ et $\mathfrak{D}$ s'exprime par $|x_i|<r'$ $(i=4, \ldots, n)$, de telle façon qu'il n'y ait pas de point de S_0 au voisinage de chaque Δ_j $(j=1, 2, 3)$.

u possède alors, la propriété (H) en tout point de S au voisinage de Δ_1. D'après *le théorème 2 du Mémoire* VII concernant le problème (C_2), on peut donc, faeilement trouver une fonction holomorphe $F_1(x)$ au voisinage de Δ_1 telle que la trace sur S soit u[14] (toujours, aux points singuliers de S près). Pareillement pour Δ_2 et Δ_3, on peut trouver les fonctions $F_2(x)$ et $F_3(x)$, respectivement.

(13) H. Cartan : Note sur le premier problème de Cousin, 1938, C. R.

(14) Pour appliquer le théorème concernant le polycylindre fermé au cas actuel, il suffit de considérer $y=1/x_1$, d'après l'habitude.

Pour $\Delta_1 \cap \Delta_2$, $F_1 - F_2$ s'annule identiquement sur S. Soit $F(x)=0$ l'équation de S, $F(x)$ étant une fonction holomorphe sans facteur multiple pour (C) : $|x_i|<r$, $|x_j|<r'$ $(i=1, 2, 3\,;\, j=4, \dots, n)$; on a donc, identiquement

$$F_1 - F_2 = g_3 F,$$

g_3 étant une fonction holomorphe pour $\Delta_1 \cap \Delta_2$. Pareillement, pour $\Delta_2 \cap \Delta_3$ et $\Delta_3 \cap \Delta_1$, on a respectivement

$$F_2 - F_3 = g_1 F, \quad F_3 - F_1 = g_2 F$$

Comme

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0,$$

en vertu du *lemme de Cartan*, on peut trouver des fonctions holomorphes $h_i(x)$ $(i=1, 2, 3)$ pour Δ_i, respectivement, de façon que l'on ait identiquement

$$g_1 = h_2 - h_3, \; g_2 = h_3 - h_1, \; g_3 = h_1 - h_2$$

Posons

$$\Phi_i = F_i - h_i F \quad (i=1, 2, 3)\,;$$

chaque Φ_i est alors une fonction holomorphe dans Δ_i, et devient à u sur S ; on a identiquement

$$\Phi_i - \Phi_j = (F_i - F_j) - (h_i - h_j)F = g_k F - g_k F = 0$$

donc, Φ_i ne sont que des parties d'une seule fonction holomorphe $\Phi(x)$ dans $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$.

Grâce à *Hartogs*, $\Phi(x)$ doit alors holomorphe pour le polycylindre (C). Soit v la trace de $\Phi(x)$ sur S ; sur la portion de S dans $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$, on a identiquement $u=v$. Or, chaque composante (irréductible) de S dans (C), pouvant être regarder comme la position des poles d'une fonction meromorphe dans (C), possède nécessairement des points dans $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$, d'après Hartogs. On a donc, $u=v$, identiquement sur S dans (C). u est ainsi la trace de $\Phi(x)$ en l'origine. C. Q. F. D.

7. Fonctions $(\boldsymbol{W})$.—Considérons a l'espace (fini) $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un domaine univalent $\underline{\mathfrak{D}}$ et un domaine multiple (Überlagerungsbereich) $\mathfrak{D}$ de $\underline{\mathfrak{D}}$, dont $\mathfrak{D}$ n'est pas nécessairement connexe. Supposons que $\mathfrak{D}$ soit d'un nombre fini de feuilles ; $\mathfrak{D}$ est alors d'un même nombre, ν de feuilles. Soit

P un point quelconque de $\mathfrak{D}$ ayant les coordonnées (x), soient $\eta_1(P)$, $\eta_2(P)$, ..., $\eta_m(P)$ des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$. Supposons *que, pour toute paires de points réguliers de $\mathfrak{D}$ ayant les mêmes coordonnées, les éléments analytiques de $\eta_1(P)$ soient différents.* Considérons à l'espace $(x_1, x_2, ..., x_n;\ y_1, y_2, ..., y_m)$ la variété caractéristique $\sum$ donnée par

$$y_i = \eta_i(P) \quad (i=1, 2, ..., m)$$

À un point P de $\mathfrak{D}$, il correspond un point M de $\sum$ ayant les coordonnées (x, η) ; et réciproquement, à un point régulier de $\sum$, il correspond un point de $\mathfrak{D}$ et un seul, d'après la propriété de η_1.

Soit Δ un domaine univalent a l'espace (x, y), contenu dans le domaine donné par $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$, et contenant des points de $\sum$; considérons une fonction holomorphe $F(x, y)$ dans Δ jouissant de la propriété que, pour toute fonction holomorphe u sur $\sum$ en un point quelconque M de $\sum \cap \Delta$, uF ait de la propriété (H) ; et nous l'appellerons *fonction* (W). Il est évident que les fonctions (W) par rapport à $\sum$ pour Δ, forment un idéal holomorphe du domaine déterminé Δ.

Soient $P_1, P_2, ..., P_\nu$ les points de $\mathfrak{D}$ sur le point (x) ; formons la fonction

$$F_1(x, y_1) = \Pi\,[y_1 - \eta_1(P_i)] \quad (i=1, 2, ..., \nu)$$

Grâce à *Weierstrass*, on sait bien que : À toute fonction holomorphe $u(P)$ sur $\mathfrak{D}$, il correspond un polynome de y_1, $\Phi(x, y_1)$ dont les coefficient sont des fonctions holomorphes de (x) dans $\underline{\mathfrak{D}}$, de façon que $u = \dfrac{\Phi}{(\partial/\partial y_1)\,F_1}$ sur $F_1 = 0$.》 La démonstration usuelle[15] s'applique, n'importe si $\mathfrak{D}$ est connexe ou non. Autrement dit :

$\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}$ *est une fonction (W) par rapport à $\sum$ dans le domaine $(x) \in \mathfrak{D}$.*

Envisageons la fonction η_1. Soit σ l'ensemble des points critiques du domaine $\mathfrak{D}$; σ est une surface caractéristique sur $\mathfrak{D}$ (c'est-à-dire, l'image d'une variété caractéristique à $(n-1)$ dimensions sur $\sum$) ; σ est donc appelé *surface critique.* Soit σ_0 une composante (irréductible) quelconque de σ dans $\mathfrak{D}$, et soit P' un point de σ_0 tel que l'ensemble $\underline{\sigma_0}$ des base-points des points de σ_0 (que nous appellerons base-ensemble de σ_0), soit régulier en P' et que aucune des autres composantes de σ ne passe par P', mais d'ailleurs quelconque. En appliquent une transformation pseudoconforme

(15) Voir : W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1, 1929, pp. 116, 117.

biunivoque au voisinage de $\underline{P'}$ de l'espace (x), $\underline{P'}$ étant le base-point de P', on peut regarder la surface caractéristique $\underline{\sigma}_0$ comme être donnée par $x_1=0$. Soit $\mu-1$ l'ordre de la surface critique σ_0 ; on a au voisinage de P',

$$\eta_1=a_0+a_1t^2+a_2t^2+\cdots, \quad t=(x_1)^{\frac{1}{\mu}}$$

$a_i(i=0,\ 1,\ \ldots)$ étant des fonctions holomorphes de $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Selon la nature de a_1, deux cas se présentent :

Cas 1 où $a_1\not\equiv 0$ —Soit S la surface caractéristique à l'espace (x, y_1) donnée par $F_1(x, y_1)=0$, soit M' le point sur S correspondant à P', et soit S_0 la composante (irréductible) de S dans un voisinage suffisamment petit de M' correspondant aux feuilles de $\mathfrak{D}$ où se situe P'. Si $a_1\neq 0$ pour P', S_0 est évidemment régulier en M'. Donc, dans ce cas, l'ensemble des points singuliers de S_0 est à $(n-2)$ dimensions au plus ; par suite, d'après *le lemme* 1, tout point de S_0 possède la propriété (H). Toute surface critique ayant cette propriété sera appelée *de première espèce* par rapport à η_1.

Cas 2 où $a_1\equiv 0$ *sur* σ_0—Soit T_0 l'ensemble de points de S_0 correspondant à σ_0. Dans ce cas, la fonction $(x_1)^{\frac{1}{\mu}}$ montre que aucun point de T_0 ne possède la propriété (H) par rapport à S_0. Nous appellerons toute surface critique de cette propriété d'être *de deuxième espèce* par rapport à η_1.

Soit P un point de $\mathfrak{D}$; s'il existe un autre point P' de $\mathfrak{D}$ ayant les mêmes coordonnées que P, telle que $\eta_1(P)=\eta_1(P')$, nous appellerons P *point équivoque* par rapport à η_1. Soit τ l'ensemble des points équivoques de $\mathfrak{D}$ par rapport à η_1 ; τ est évidemment une surface caractéristique sur $\mathfrak{D}$, que nous appellerons *surface équivoque*. Soit M le point de S correspondant à un point équivoque P de $\mathfrak{D}$ par rapport à η_1 ; il existe au moins deux branches de S passant par M. M ne possède pas la propriété (H) par rapport à S. Considérons en effet, une fonction u sur S au voisinage de M, qui est identiquement nulle sur une des branches et 1 sur les autres ; d'après la définition, u est une fonction holomorphe sur S, mais, il n'y a aucune fonction holomorphe de (x, y_1) au voisinage de M devenant à u aux points réguliers de S.

Nous avons ainsi vu que aucun des points de S qui correspondent les points critiques de la deuxième espèce ou les points équivoques de $\mathfrak{D}$ par rapport à η_1, ne possède la propriété (H). Tout autre point de S jouit évidemment de cette propriété. D'où, il en résulte que :

Soit Δ un domaine uivalent borné à l'espace (x, y) contenu avec sa *frontière dans le domaine* $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$, *et soit* $U(x, y)$ *une fonction holomorphe dans* Δ *telle que, si l'on pose* $u_0(P) = U[x_1, \ldots, x_n, \eta_1(P), \ldots, \eta_m(P)]$, *la fonction* u_0 *soit identiquement nulle sur la surface critique de deuxième espèce* σ' *et sur la surface équivoque* τ *de* $\mathfrak{D}$ *par rapport à* η_1. *On peut alors, trouver un entier positif* λ *tel que* U^λ *soit une fonction* (W) *par rapport à* $\sum$ *dans* Δ.

En effet, soit $\mathfrak{D}_0$ le domaine dans $\mathfrak{D}$ correspondant à $\Delta \cap \sum$; en substituant $y_i = \eta_i(P)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ dans $\partial F_1/\partial y_1$, on obtient $v_0(P)$; pour $\mathfrak{D}_0$, on peut trouver un entier positif λ tel que u_0^λ soit divisible par v_0 sur σ' et τ, sauf peut être à une variété caractéristique (sur $\mathfrak{D}$) à moindres dimensions. Soit M un point quelconque de $\sum$ dans Δ, soit u une fonction holomorphe quelconque sur $\sum$ en M. Grâce à *Weierstrass*, uU^λ jouit alors de la propriété (H) en tout point au voisinage de M, sauf peut-être à une variété à $(n-2)$ dimensions sur $\sum$, par suit sans exception, d'après *le lemme 1.*

Soit (x^0) un point quelconque de $\underline{\mathfrak{D}}$, traçons autour de (x^0) un polycylindre $(C) \Subset \underline{\mathfrak{D}}$; soit R un nombre positif tel que pour tout (x) dans (C) on ait $|\eta_i| < R (i=1, 2, \ldots, m)$, traçons avec le rayon R le polycylindre (Γ) autour de l'origine de l'espace (y) et désignons $[(C), (\Gamma)]$ par Δ.

Soit T *l'ensemble des zéros communs des fonctions* (W) *par rapport à* $\sum$ *dans* Δ *et soit* S_0 *l'ensemble des points singuliers de* $\sum$ *dans* Δ, *alors* $T \subseteqq S_0$.

En effet, on a d'abord $T \subseteqq \sum$. Car, l'idéal géométrique (de domaines indéterminés) attaché à $\sum$ pour $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ possède une pseudobase en tout point au voisinage de Δ, d'après *le théorème de Cartan*, par suite, une pseucobase $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p)$ pour Δ, d'après *le théorème 3 du Mémoire VII.* L'ensemble des zéros communs des fonctions $\Phi_i (i=1, 2, \ldots, P)$ est $\sum$ dans Δ; or, toute Φ_i est une fonction (W), puisque elle s'annule identiquement sur $\sum$; donc, $T \subseteqq \sum$.

Considérons une transformation linéaire non-singulière L de l'espace (x, y) de la forme suivante,

$$x_i' = \sum A_{i,k} x_k + \sum A_{i,n+l} y_l, \quad y_j' = \sum A_{n+j,k} x_k + \sum A_{n+j,n+l} y_l,$$
$$(i, k=1, 2, \ldots, n; j, l=1, 2, \ldots, m),$$
$$|A_{pp}-1| < \varepsilon \quad |A_{pq}| < \varepsilon \quad (p \neq q, p, q=1, 2, \ldots, n+m),$$

ε étant un nombre positif dont nous expliquerons plus tard. Les images à l'espace (x', y') de $\sum$, Δ seront désignées par les mêmes lettres. Considérons pour $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ la variété caractéristique $\sum_1$ donnée par $F_i(x, y_i)=0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, dont

$$F_i(x, y_i)=\Pi[y_i-\eta_i(P_j)] \quad (j=1, 2, \ldots, \nu)$$

P_j étant les points de $\mathfrak{D}$ sur le plan (x). $\sum$ consiste des composantes de $\sum_1$. Traçons le polycylindre $|x_i-x_i^0|<r_i$ $(i=1, 2, \ldots, n) \Subset \underline{\mathfrak{D}}$ et $\supset (C)$, et prenons un nombre positif $R'>R$ de façon que pour tout (x) dans le polycylindre on ait $|\eta_i|<\rho<R'$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, ρ étant un nombre déterminé ; alors, il n'y a pas de point de $\sum_1$ au voisinage de chacun des m ensembles de points $|x_i-x_i^0|<r_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $|y_p|=R'$ dont p représente un quelconque de 1, 2, ..., m. Choisissons ε suffisamment petit pour qu'il en soit de même pour (x', y'), précisément dit, que les fonctions $F_j(x', y')=F_j(x, y_j)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ soient définies et holomorphes au voisinage de $|x_i'-x_i'^0|<r_i$ $|y_j'|<R'$ $(i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, m)$, (x'^0) étant l'image de (x^0), et de plus qu'il n'y aura pas de zéros commun de ces fonctions $F_j(x', y')$ au voisinage de chacun des m ensembles de points $|x_i'-x_i'^0|<r_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $|y_p'|=R'$. Dans ces circonstances, grâce à *Weierstrass*, on peut facilement résoudre le système des équations simultanés $F_j=0$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ par rapport à (y') dans $|x_i'-x_i'^0|<r_i$, $(i=1, 2, \ldots, n)$. $\sum$ étant une somme des composantes (irréductibles) de $\sum_1$ dans le polycylindre $|x_i'-x_i'^0|<r_i$, $|y_j|<R'$ $(i=1, 2, \ldots, n$ $j=1, 2, \ldots m)$, il en est évidemment de même pour l'équation représentant $\sum$. Soit $\mathfrak{D}'$ le domaine multivalent (connexe ou non) sur $|x_i'-x_i'^0|<r_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ correspondant à $\sum$, et soit $y_j'=\eta_j'$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ l'équation de $\sum$, η_j' étant des fonctions holomorphes sur $\mathfrak{D}'$. Prenons ε encore petit pour que Δ soit $\Subset$ le polycylindre $|x_i'-x_i'^0|<r_i$ $|y_j'|<R'$ $(i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, m)$.

Considérons $(A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{n+m, n+m})$ comme point du polycylindre de rayon ε indiqué ci-dessus (à l'espace de $(n+m)^2$ variables complexes). Il est évident que η_1' jouit de la même propriété que η_1, sauf peut-être pour des point (A) de première catégorie. Soit M un point régulier de $\sum$ dans Δ, mais d'ailleurs quelconque ; il est facile à voir que le point correspondant est un point régulier de $\mathfrak{D}'$ et n'est pas un point équivoque par rapport à η_1', sauf peut-être pour des points (A) de la première catègorie. On peut donc trouver (x', y') remplissant ces conditions.

Grâce au théorème de Cartan et au théorème 3 du Mémoire VII, on peut trouver une fonction holomorphe $\Psi(x)$ dans Δ telle que l'image sur $\mathfrak{D}'$ de la trace de Ψ sur $\sum$ soit nulle identiquement sur la surface critique de la deuxième espèce et sur la surface équivoque par rapport à η_1', sans s'annuler à M. D'après ce que nous venons de voir, Ψ^λ est une fonction (W) par rapport à $\sum$ pour Δ, λ étant un certain entier positif. Donc, $T \subseteq S_0$.

8. Nullstellensatz.—Il y a un lemme que voici :

Lemme de Hilbert-Rückert.—*Soient* $F_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, p)$, $f(x)$ *des fonctions holomorphes en un point* (x^0) *; si* f *s'annule identiquement sur l'ensemble des zéros communs de toutes les* F_i, *on peut trouver un entier positif* λ *tel que* $f^\lambda \equiv 0$ *mod* (F).[16]

Si $F_i(i=1, 2, \ldots, p)$ et f sont holomorphes et se relient de la manière indiquée dans un polycylindre (C) autour de (x^0), le lemme subsiste en tout point de (C) ; par suite, d'après *le théorème 1 du Mémoire* VII, *le lemme subsiste dans tout polycylindre* $(C_0) \Subset (C)$.

En appliquant ce lemme au résultat précédent, on a :

Lemme 2—*Soit* $F(x, y)$ *une fonction holomorphe dans* Δ *s'annulant identiquement sur l'ensemble des points singuliers* S_0 *de* $\sum$, *soit* Δ' *un domaine* $\Subset \Delta$ *; alors, on peut trouver un entier positif* λ *tel que* F^λ *soit une fonction* (W) *par rapport à* $\sum$ *pour* Δ'.

Or le caractère essentiel de nos recherches consiste à *trouver* des solutions ; donc, pour éclaircir comment on peut trouver le nombre λ dans le Nullstellensatz, nous allons le reprouver directement.

1°. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ *des fonctions holomorphes en un point* (x^0, y^0) *de l'espace* $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ $(n \geq 0,\ m > 0)$, *dont aucune s'annule identiquement, soit* $\sum$ *l'ensemble des zéros communs de ces fonctions. Supposons que les composantes (irréductibles) de* $\sum$ *soient à n dimensions ; alors, pour toute fonction holomorphe* $f(x, y)$ *s'annulant identiquement sur* $\sum$ *au voisinage de* (x^0, y^0), *on peut trouver un entier positif* μ *et une fonction holomorphe* $H(x, y)$ *qui ne s'annule identiquement sur aucune composante de* $\sum$, *de façon que l'on ait* $Hf^\mu \equiv 0$ *mod* (F), *au voisinage de* (x^0, y^0).

Supposons, pour l'effet, que (x^0, y^0) soit un point de $\sum$. Dans le suivante, nous placerons toujours dans un voisinage de (x^0, y^0) ou les circonstances données subsistant. En choisissant les coordonnées et les nombres positifs r, ρ, ρ' $(\rho > \rho')$ traçons le polycylindre $\Delta = [(\gamma), (\gamma')]$ dont (γ) est donné par $|x_i - x_i^0| < r$ $(i=1, \ldots, n)$ et (γ') par $|y_j - y_j^0| < \rho$ $(j=1, \ldots, m)$, de façon que, lorsque (x) se situe dans (γ), $\sum$ n'ait pas de point sur $|y_q - y_q^0| \geq \rho'$, q étant un quelconque de $1, 2, \ldots, m$. D'après

(16) Voir : S. Bochner and W. Martin, Several complex variables, 1948, Chapter X.

Weirstrass, on a alors, m fonctions $\Phi_j(x, y_j)$ comme suivante: $\Phi_j(x, y_j)$ est un polynome de y_j, sans facteur multiple, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de (x) dans (γ) et le coefficient de la plus haute puissance est 1, et telle que la projection de Σ sur l'espace (x, y_j) soit donnée par $\Phi_j=0$ pour $(x) \in (\gamma)$.

Nous allons montrer que $\Phi_j^\nu \equiv 0$ *mod* (F) *en* (x^0, y^0), ν étant un certain entier positif independant de j. Considérons l'idéal (I) de domaines indéterminés engendré par (F_k, Δ) $(k=1, 2, \ldots, p)$, et sa projection (J) sur l'espace (x, y_j) par rapport à Δ. Soit Σ' la projection de Σ sur l'espace (x, y_j), alors pour $(x) \in (\gamma)$, Σ' est une surface caractéristique. Or, d'après *le théorème 1*, (J) possède une pseudobase en tout point de $[(x) \in (\gamma)\ |y_j - y_j^0| < \rho]$; donc, Σ' est nécessairement l'ensemble de zéros de (J). Par suite, Φ_j s'annulant identiquement sur Σ', on peut trouver un nombre entier ν' tel que $\Phi_j^{\nu'} \in (J)$ en (x^0, y^0). Alors $\Phi_j^{\nu'} \in (I)$en (x_0, y_0). Soit ν le plus grand de ν' pour $j=1, 2, \ldots, m$, on a $\Phi_j^\nu \equiv 0$ mod (F) en (x^0, y^0).

Considérons la variété caractéristique T donnée par $\Phi_j=0$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ dans Δ. Σ consiste dans Δ des composantes (irréductibles) de T, soit Σ' la somme des composantes de T qui n'appartiennent pas à Σ. Considérons l'idéal géométrique (K) de domaines indéterminés attaché à T, defini dans Δ; il est facile à voir que $(\Phi_1, \Phi_2 \ldots, \Phi_m)$ *donne une pseudobase de* (K) *pour* Δ (d'après *le théorème du reste*, par exemple).(17) Soit φ une fonction holomorphe dans Δ qui s'annule identiquement sur Σ', sans l'être pour aucune composante de Σ; on a alors, $f\varphi \equiv 0$ mod (Φ) en (x^0, y^0). Or $\Phi_j^\nu \equiv 0$ mod (F) en (x^0, y^0). Donc, $(f\varphi)^\mu \equiv 0$ mod (F) en (x^0, y^0), où $\mu = m(\nu-1)+1$; ce qui legitime la proposition.

2°. Nous allons constater le Nullstellensatz formulé ci-dessus. Supposons que aucune des $F_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, p)$ ne s'annule identiquement.

---

(17) En effet, soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe s'annulant identiquement sur T au voisinage d'un point (a, b) de T. Traçons un polycylindre δ à l'espace (x) autour de (a), et un polycylindre δ' à l'espace (y) autour de (b), dont la composante sur le plan y sera désignee par δ_j, de façon que les circonstances subsistent dans (δ, δ'), et que, pour tout (x) dans δ, $\Phi_j(x, y_j)=0$ ait λ_j racines dans δ_j'. On a alors, identiquement (1) $f=f_0+\varphi\Phi_1$ dans (δ, δ') où f_0, φ sont des fonctions holomorphes et f_0 est un polynome de $y_1 < \lambda_1$ en degré. Choisissons (x') dans δ tel que $\Phi_1(x', y_1)=0$ ait λ_1 racines, $\eta_1, \ldots, \eta_{\lambda_1}$ dans δ_1, et y_k' $(k=2, \ldots, m)$ dans δ_k' tel que $\Phi_k(x', y_k')=0$. En posant ces valeurs dans (1), on a $f'=f_0'+\varphi'\Phi_1'$. Or, si l'on encore pose $y_1=y_l$ $(l=1, \ldots, \lambda_1)$ on a $\Phi_1'=0$, $f'=0$, et par suit $f_0'=0$. f_0' étant un polynome de $y_1 < \lambda_1$ en degré, ce qui veuet dire que $f_0' \equiv 0$. Donc, tous les coefficients de f_0 doivent s'annuler identiquement sur $\Phi_k(x, y_k)=0$ $(k=2, \ldots, m)$.

Nous allons d'abord montrer que, si ce théorème subsiste pour le cas où $\sum$ consiste des composantes à un même nombre de dimensions, il subsiste toujours. Par exemple, soit $\sum = \sum_1 \cup \sum_2$, dont $\sum_1$ est à λ dimensions $(0 < \lambda < m)$ et $\sum_2$ est à $(\lambda - 1)$ dimensions. Supposant que $\sum_2$ est donné comme l'ensemble des zéros communs des fonctions holomorphes $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ..., $\Phi_q(x)$, au voisinage de (x^0), considérons

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_p,\ y\Phi_1(x),\ y\Phi_2(x),\ \ldots,\ y\Phi_q(x),$$

au voisinage du point $(x^0, 0)$ de l'espace $(x_1, \ldots, x_n, y)$; dont l'ensemble des zéros communs consiste évidemment des composantes à λ dimensions. $f(x)$ restant satisfaire à la condition, la proposition est vrai pour le nouveau système de fonctions, d'après l'hypothèse ; par suite, en posant $y=0$, elle est aussi vraie pour (F). Le même mode de raisonnement s'applique sans doute au cas général.

Supposons donc, que les composantes de $\sum$ soient à r dimensions $(r < n)$. D'après la proposition précédente on a $Hf^{\mu} \equiv 0$ mod (F) en (x^0) (H, μ ayant les significations indiquées). Or alors, si $f^{\nu} \equiv 0$ mod (H, F) en (x^0), ν étant un certain entier positif, on a nécessairement $f^{\nu+\mu} \equiv 0$ mod (F) en (x^0). Soit $\sum'$ l'intersection de $\sum$ et $H=0$; d'après la propriété de H, $\sum'$ consiste des composantes à $(r-1)$ dimensions (s'il existe). Par suite, si la proposition est vraie pour $r-1$, elle est aussi vrai pour r. Et, la proposition est évidemment vraie pour $r=0$ (d'après la proposition précédente). Elle est donc, toujours vraie.

9. Idéaux (Z).—Reprenons le domaine $\mathfrak{D}$ à l'espace (x) et la variété $\sum$ correspondante à l'espace (x, y), expliqués au commencement de No. 7. Proposons-nous à définir une *distribution de zéros* (z) sur $\mathfrak{D}$, en étendant la donnée du *deuxième problème de Cousin* pour le domaine univalent et nous rencontrons immédiatement une circonstance nouvelle que voici :

En général, une surface caractéristique sur un domaine intérieurement ramifié ne peut pas se représenter même localement comme l'ensemble des zéros d'une seule fonction holomorphe sur le domaine.

L'exemple que l'auteur a construit, n'étant pas si simple, sera exposé dans un Mémoire ultérieur.

Soit σ une surface caractéristique irréductible dans un domaine $\Delta \subseteq \mathfrak{D}$, soit u une fonction holomorphe dans Δ s'annulant identiquement sur σ ; nous commençons par difinir *l'ordre de zéros* de u sur σ :

Cas 1 où σ n'est pas une surface critique de Δ. Soit P_0 un point de σ différent des points critiques de $\mathfrak{D}$; au voisinage de P_0, $u(P)$ est une fonction holomorphe de (x), (x) étant les coordonnées de P; par suite, on sait l'ordre λ de zéros de u sur σ; λ ne dépend pas de P_0, nous l'appellerons ordre de zéros de u sur σ. (Si $u\equiv 0$, $\lambda=\infty$; si u ne s'annule pas identiquement sur σ, $\lambda=0$).

Cas 2 où σ est une surface critique de Δ. Soit P_0 un point de σ qui n'appartient à aucune autre composante de la surface critique ; au voisinage de P_0, σ peut se représenter par $f(x)=0$, dont f est une fonction holomorphe de (x), sans facteur multiple ; soit $\mu-1$ l'ordre de la surface critique σ ; alors, si $u\not\equiv 0$ on peut trouver un entier positif λ tel que $u/f^{\lambda/\mu}$ soit finie au voisinage de P_0, sans l'être pour $u/f^{\lambda+1/\mu}$; λ ne depend pas pe P_0, nous l'appellerons ordre de zéros de u sur σ. (Si $u\equiv 0$, l'ordre est infini ; si u ne sannule pas identiquement sur σ, l'ordre est nul.)

Soit σ une surface caractéristique dans un domaine $\Delta\subseteqq\mathfrak{D}$, soient σ_1, σ_2,... les composantes (irréductibles) de σ (dans Δ) et soient λ_1, λ_2, ... des entiers positifs ; nous définirous une distribution de zéros $(\mathfrak{z})$ dans Δ par $\{(\sigma_i, \lambda_i)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ comme ce quit suit : soit u une fonction holomorphe dans Δ, nous appellerons que *u prend au moins les zéros* $(\mathfrak{z})$, si l'ordre de zéros de u sur σ_i; est au moins $\lambda_i (i=1, 2, \ldots)$.

Soit P_0 un point sur σ et soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ un système fini de fonctions holomorphes au voisinage de P_0 nous appellerons que (u) *définit les zéros* $(\mathfrak{z})$ en P_0 si l'ensemble des zéros communs de ces fonctions est σ, aux points à moindres dimensions près, et si le plus petit ordre de zeros de ces fonctions sur σ_i est $\lambda_i (i=1, 2, \ldots)$, au voisinage de P_0.

Soit ensuite, u une fonction holomorphe sur $\mathfrak{D}$ en un point P_0 de $\mathfrak{D}$, soit M_0 le point de Σ correspondant à P_0 ; s'il existe une fonction holomorphe $U(x, y)$ a l'espace (x, y) en M_0, telle que l'image (sur $\mathfrak{D}$) de la trace de U (sur Σ) soit u, c'est-à-dire que $U(x, \eta)=u$, nous dirons que u possède *la propriété* (H) par rapport à Σ en P_0.

Considérons maintenant, une distribution de zéros $(\mathfrak{z})$ sur $\mathfrak{D}$; supposons *qne* $(\mathfrak{z})$ *soit partout localement definie par un système fini de fonctions holomorphes snr* $\mathfrak{D}$ *ayant la propriété* (H) *par rapport à* Σ ; et considérons à l'espace (x, y) l'ensemble (I) de (f, δ), tel que $\delta\subseteqq$ le domaine $(x)\in\underline{\mathfrak{D}}$, et (f', δ') étant l'image (sur $\mathfrak{D}$) de la trace de (f, δ) (sur Σ), f' prenne au moins $(\mathfrak{z})$ dans δ' ; (I) forme évidemment un idéal ; que nous appellerons généralement un *ideal* (Z).

Théorème 2—*L'idéal* (Z) (*expliqué ci-dessus*) *possède une pseudobase en tout point de* $[(x)\in\underline{\mathfrak{D}}]$.

1°. Partirons, pour l'effet, d'un *cas spéciale* où il existe une fonction

(W), $W(x, y)$ par rapport à $\sum$ pour $(x) \in \mathfrak{D}$, telle que, T étant l'ensemble des zéros de l'idéal (I), $W(x, y)$ ne soit identiquement nulle sur aucune composante de T.

Soient $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, ..., $F_p(x, y)$ un système de fonctions holomorphes en un point quelconque M_0 de T definissant (z) en l'image P_0 de M_0[18], soit τ l'image de T, il est facile à voir que l'on peut choisir les constantes $c_i(i=1, 2, ..., p)$ de façon que l'image F' de la trace de la fonction $F=\sum c_i F_i$, ait le même ordre de zéros que $(\mathfrak{z})$ sur τ, sans s'annuler identique ment sur toute autre composente de $\underline{\tau}$, $\underline{\tau}$ étant le base-ensemble de τ. Soit τ' la somme des composantes de $F'=0$, n'appartenant pas à τ, et soit $\Phi(x)$ une fonctions holomorphe de (x) telle que elle prenne au moins le même ordre de zéros que F' sur τ', sans s'annuler en dehors de $\underline{\tau}'$.

Avec ces fonctions W, F, Φ, selon *le corollaire 1*, transformons l'idéal $(I)=\{(f, \delta)\}$ et formons $(J)=\{(\varphi, \delta')\}$ comme ce quit suit:

$$\varphi=f\Phi W+A_0F+A_1\Psi_1+\cdots\cdots+A_r\Psi_r,\quad \delta'=V\cap\delta\cap a_0\cap a_1\cap\cdots\cap a_r,$$

dont V est un voisinage (univalent) de M_0 où F, Φ et W sont holomorphe, (Ψ) est une pseudobase pour V de l'idéal géométrique (de domaines indéterminés) attaché à $\sum$ (qui existe d'après *le théorème de Cartan*). Nous désignerons généralement l'image de la trace d'une fonction holomorphe $\psi(x, y)$ par ψ'; la relation ci-dessus devient alors sur $\mathfrak{D}$, comme la suivante,

$$\varphi'=f'\Phi W'+A_0'F'$$

φ'/F' est donc, holomorphe (dans l'image de la trace de δ') et possède la propriété (H) par rapport à $\sum$. On a donc, $\varphi\equiv 0 \bmod (F, \Psi_1, ..., \Psi_r)$ en M_0. (J) possèdant ainsi une pseudobase locale en M_0, il ne reste qu'a examiner la deuxième condition du corollaire 1.

Considérons donc, l'équation fonctionnelle

$$B\Phi W+A_0F+A_1\Psi_1+\cdots\cdots+A_r\Psi_r=0$$

pour V. Soit $(B, A^0, ..., A_r)$ une solution quelconque de l'équation en un point quelconque (x', y') de V, il suffit de constater que $B\in(I)$ en (x', y'). Ceci est clair, si (x', y') n'est pas un point de $\sum$. Supposons donc que (x', y') soit un point de $\sum$, et posons $\Psi_i=0$ $(i=1, 2, ..., r)$, on a alors, l'identité

$$B'\Phi W'+A_0'F'=0.$$

---

(18) C'est-à-dire, un système tel que, F_i' étant l'image de la trace de $F_i(i=1, 2, ..., p)$, (F') définisse $(\mathfrak{z})$ au voisinage de P_0.

Or, l'ordre de zéros sur τ de la fonction $\Phi W'$ est nul. B' prend donc sur τ, au moins le même ordre de zéros que F', par suite, $B \in (I)$ en (x', y'), d'après la définition. La proposition est ainsi vraie pour ce cas spécial.

Le cas général peut se reduire au cas ci-dessus, d'après *le théorème 1*, que nous allons expliquer.

2°. Soit $\underline{\varDelta}$ un polycylindre tel que $\underline{\varDelta} \Subset \underline{\mathfrak{D}}$, mais d'ailleurs quelconque et soit $\varDelta$ une quelconque des composantes connexes de la portion de $\mathfrak{D}$ sur $\bar{\varDelta}$; il est évidemment suffisant de verifier la proposition pour $\varDelta$, d'après *le corollaire de Cartan*. Soit σ la surface critique de $\mathfrak{D}$ et soit $\underline{\sigma}$ son base-ensemble ; parmi les composantes (irréductibles) de $\underline{\sigma}$ dans $\underline{\mathfrak{D}}$, il n'y a qu'un nombre fini qui passent par $\underline{\varDelta}$, que nous désignerons par $\underline{\sigma_1}, \underline{\sigma_2}, \dots, \underline{\sigma_q}$. Grâce a Cousin, pour $\underline{\sigma_1}$, on peut trouver une fonction holomorphe $f(x)$ dans $\underline{\varDelta}$ admettant le premier ordre de zéros sur $\underline{\sigma_1}$, sans s'annuler d'ailleurs. Soit r le plus petit multiple de s_1+1, s_2+1, ..., s_1, s_2, ... étant des ordres des surface critiques de $\varDelta$ situées sur $\underline{\sigma_1}$; considérons

$$S(x) = (f(x))^{\frac{1}{r}}$$

Soit $\varDelta'$ une quelconque des composantes connexes de l'intersection de $\varDelta$ et le domaine d'holomorphie de $S(x)$. Considérons à l'espace $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z)$, la variété caractéristique $\sum'$,

$$y_i = \eta_i(P) \quad z = S(P) \quad (P \in \varDelta' \ \underline{P} = (x) \ i = 1, 2, \dots, m),$$

étant le base-point de P.

Le système de fonctions holomorphes à l'espace (x, y) qui définit une distribution de zéros sur $\varDelta'$, puisque on peut considérer le système pour être à l'espace (x, y, z), nous le désignerons par $(\mathfrak{z}')$; soit (I') l'idéal (Z) à l'espace (x, y, z) défini par ($\sum$, $\varDelta'$ et) $(\mathfrak{z}')$. Il est facile à voir que pour $(x) \in \underline{\varDelta}$, (I) est *la projection* de (I') sur l'espace (x, y) ; donc, d'après *le théorème 1*, il nous suffit de montrer que (I') possède une pseudobase en tout point du domaine $(x) \in \underline{\varDelta}$. Or, si l'on choisi le constante c et forme $\eta_1' = \eta_1 + cS$, cette fonction possède $\varDelta'$ comme une partie de son domaine d'holomorphie, sans posséder de surface critique de la deuxième espèce sur $\underline{\sigma_1}$. Autrement dit, nous pouvons supposer, sans perdre la généralité, que $\varDelta$ n'admette pas de surface critique de la deuxième espèce sur $\underline{\sigma_1}$ par rapport à η_1. En raisonnant pareillement pour $\underline{\sigma_2}, \underline{\sigma_3}, \dots, \underline{\sigma_q}$, successivement, nous pouvons supposer que η_1 n'admette pas de surface critique de la deuxième espèce.

3°. Reprenons la transformation linéaire L de l'espace (x, y) expliquée a la fin de No. 8 ; si l'on choisit ε suffisamment petit, sera transformé à un domaine Δ' sur l'espace (x') ; il est facile à voir que la relation est *biunivoque et pseudoconforme.* Donc, au lieu d'étudier l'idéal (I) au moyen de Δ, on peut le faire au moyen de Δ'. Donc, n'ayant pas de surface critique de la deuxième espèce, nous pouvons supposer *que la surface critique de Δ et la surface équivoque de η_1 n'aient pas de composante commune.*

Soient P_1, P_2 une paire de points réguliers de $\mathfrak{D}$ sur le même base-point (x) tel que sur (x), il n'y ait pas de point de l'intersection des deux surfaces ci-dessus, mais d'ailleurs quelconques ; il s'agit de trouver une fonction holomorphe $S(P)$ sur $\mathfrak{D}$ telle que $S(P_1) \neq S(P_2)$; dont nous entendrons à nouveau par $\underline{\mathfrak{D}}$ un polycylindre $\Subset$ le domaine ancient. Supposons que aux points P_1, P_2, il corresponde un seul et même point M sur Σ, puisque, si non, une des fonctions η_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ remplira la condition ; d'après l'hypothèse, M ne peut pas se situer sur l'image de la surface critique sur Σ. Les derivées de η_1 par rapport à x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ sont holomorphe sur $\mathfrak{D}$, excepté à la surface critique σ ; et pour σ, il est évident que elles n'admettent que des poles.(19) Or, $\mathfrak{D}$ étant une partie du domaine d'holomorphie de η_1, parmi les derivées de η_1, il y a certainement une, soit $\xi(P)$, letle que $\xi(P_1) \neq \xi(P_2)$. Soit (Γ) un polycylindre auteur de l'origine telle que pour $(x) \in \underline{\mathfrak{D}}$ la projection de Σ sur l'espace (y) soit $\Subset (\Gamma)$. D'après *le théorèmc de Cartan* et *le théorème 3 du Mémoire* VII, on peut trouver une fonction $f(x, y)$ holomorphe dans le polycylindre $[\underline{\mathfrak{D}}, (\Gamma)]$ telle que l'image f' de la trace de f soit identiquement nulle sur σ et $f(M) \neq 0$. Chaisissant un entier positif λ suffisamment grand, posons $f'^{\lambda}\xi = S$, S sera alors holomorphe sur $\mathfrak{D}$, et on aura $S(P_1) \neq S(P_2)$.

Comme pour Δ, la surface critique et la surface équivoque de η_1 n'ont pas de composante commune, et que η_1 n'a pas de surface critique de la deuxiéme espède dans Δ, d'après ce qui précéde, on peut facilement choiser une fonction holomorphe $S(P)$ sur Δ et construir à l'espace (x, y, z) la variété caractéristique Σ' donnée par $y_i = \eta_i(P)$ $z = S(P)$ $(P \in \Delta, \underline{P} = (x), i=1, 2, \ldots, m)$ de façon que l'ensemble de points singuliers de Σ' soit à $(n-2)$ dimensions au plus.

D'après le théorème 1, nous pouvons encore supposer que ce soit le cas actuel, précisément dit que la portion de Σ correspondant à Δ n'ait de

---

(19) Un pôle d'une fonction sur $\mathfrak{D}$ et un point de $\mathfrak{D}$ où la fonction n'est pas holomorphe, mais elle se représenter peut localement par un rapport de deux fonctions holomorphes sur $\mathfrak{D}$.

points singuliers qu'à $(n-2)$ dimensions au plus. Alors, d'après *le lemme 2*, on peut trouver une fonction (W) par rapport à $\sum$ telle que elle ne soit identiquement nulle sur aucune composante de T, T étant l'ensemble des zéros de l'idéal (I), au voisinage d'un point quelconque de la portion de $\sum$. Cela étant le cas spécial, (I) possède une pseudobase en tout point de la portion de $\sum$. C. Q. F. D.

III. Lemme fondamental et ses applications

10. Lemme fondamental.—Considérons a l'espace fini de n variables complexes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, un domaine polyédral Δ tel que $\Delta \Subset (R)$, (R) étant une portion (Teilberich, connexe ou non) du domaine d'holomorphie d'une fonction analytique $f_1(x)$; considérons que Δ est de la forme,

$$x_i \in A_i,\ f_j(P) \in B_j,\ P(\in R) \quad (i=1, \ldots, n\,;\ j=1, \ldots, m),$$

où $f_j(P)$ sont des fonctions holomorphes sur (R), A_i, B_j sont des domaines fermés bornés univalents et simplement connxes sur le plan, et P possède les coordonnées (x). Considérons a l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ le domaine cylindrique fermé (A, B) et la veriété caractéristique $\sum$, $y_j=f_j(P)$ $(j=1, \ldots, m)$; Δ correspond alors à la portion de $\sum$ sur (A, B) de façon que les frontières correspondent. Les théorèmes du Memoires VII (que nous dénotons dans la suivante, simplement par VII) pour le polycylindre fermé, s'appliquent à (A, B), puisque le voisinage de chacun de A_i et B_j peut se représenter conformément au voisinage d'un cercle.

Considérons l'ensemble Δ_0 de points de Δ satisfaisant à

$$x_i \in A_i^0\ f_j(P) \in B_j^0 \quad (i=1, \ldots, n\,;\ j=1, \ldots, m),$$

où A_i^0, B_j^0 sont des domaines fermés simplement connexe tels que $A_i \supset A_i^0$, $B_j \supset B_j^0$. Dans la suivante, nous considérons Δ pour être déterminé, et Δ_0, quelconque.

Soit u une fonction holomorphe quelconque sur (R) au voisinage de Δ_0 ; que l'on peut regarder comme une fonction holomorphe sur $\sum$. Soit $U(x, y)$ une fonction holomorphe de (x, y) au voisinage de (A, B) qui s'annule identiquement sur l'ensemble S_0 des points singutiers de $\sum$, sans l'être pour $\sum$; $U(x, y)$ existe d'après *le théorème de Cartan* et *le théorème 3* de VII; par suite, d'après *le lemme 2*, on peut choisir un entier positif λ de façon que U^λ soit une fonction (W) par rapport à $\sum$ dans un certain voisinage de (A, B). Comme l'idéal géométrique de domaines de indéterminés attaché à $\sum$ possède une pseudobase au voisinage de (A, B) (d'après le théorème de Cartan et le théorème 3 de VII), d'après *le théorème 2* de VII, on peut trouver une fonction holomorphe $F(x, y)$ au voisinage de (A^0, B^0) telle que $F=U^\lambda u$ sur Σ.

Soit u_0 l'image (sur (R)) de la trace (sur Σ) de U^λ, et soit $(I)=\{(f, \delta)\}$ l'idéal (Z) definie dans un voisinage de (A, B) de façon que (f', δ') étant l'image de la trace de (f, δ), f' soit divisible par u_0 dans δ'. D'après *le théorème 2* et le théoréme 3 de VII, (I) possède une pseudobase au voisinage de (A, B), nous désignerons par $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu)$; l'image de la trace de chaque Φ_i est divisible par u_0 au voisinage de Δ. Comme $F \in (I)$ au voisinage de (A^0, B^0), on a $F\equiv 0 \mod (\Phi)$ en tout point au voisinage de (A^0, B^0) ; par suite, il en est globalementainsi, d'après *le théorème 1 de* VII. Nous allons formuler brièvement ce que nous avons vu :

Lemme fondamental. *Correspondant à un domaine polyédral Δ donné comme une portion d'un domaine multivalent (connexe ou non) (R) sur l'espace fini (x), de la forme ci-dessus, considérons à l'espace (x, y) le domaine cylindrique fermé (A, B) et la variété caractéristique Σ comme ci-dessus ; on peut trouver alors, une fonction holomorphe u_0 sur (R) au voisinage de Δ et un systeme fini de fonctions holomorphes $\Phi_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots, \mu)$ au voisinage de (A, B), dont l'image sur (R) de la trace sur Σ, de chaque $\Phi_i(x, y)$ est divisible par u_0, qui jouent le rôle que : soit Δ_0 $(\Delta_0 \subset \Delta)$ un domaine polyédral éxplique ci-dessus, mais d'ailleurs quelconque, soit (A_0, B_0) le domaine cylindrique fermé correspondant et soit u une fonction holomorphe quelconque sur (R) au voisinage de Δ_0 ; il y ait alors, une fonction holomorphe $F(x, y)$ au voisinage de (A_0, B_0) telle que $F=uu_0$ sur Σ et que $F\equiv 0$ mod, (Φ), globalement.*

Nous allons montrer brièvement comment on l'applique aux problèmes principaux depuis le Mémoire I.

11. Problèmes de Cousin.—Prenon pour A_1 un cercle fermé ; soit Δ_1 la partie de Δ telle que $X\leqq\varepsilon$, dont X s'équifie la partie réelle de x_1 et ε est un nombre positif suffisamment petit, soit Δ_2 celle de $X\geqq-\varepsilon$; supposons que $\Delta_1 \supset 0$, $\Delta_2 \supset 0$; soit $\Delta_0=\Delta_1 \cap \Delta_2$.

Théorème 3 —*Dans cette configuration, étant donnée une fonction u holomorphe sur (R) au voisinage de Δ_0, on peut trouver des fonctions u_1, u_2 holomorphes sur (R) au voisinage de Δ_1 et au voisinage de Δ_2, respectivement, de façon que l'on ait identiquement $u_1-u_2=u$.*

En effet, la partie de A_1 telle que $-\varepsilon\leqq X\leqq\varepsilon$ est simplement connexe, que nous désignerons par A_1^0 ; soient $A_k^0=A_k$, $B_j^0=B_j$ $(k=2, \ldots, n; j=1, \ldots, m)$; le domain polyédral correspondant à (A^0, B^0) est alors Δ_0 indequé ci-dessus. Le lemme subsiste pour ces Δ_0, u, et on a identiquement

$$F=c_1\Phi_1+c_2\Phi_2+\cdots\cdots+c_\mu\Phi_\mu$$

au voisinage de (A^0, B^0), c_i $(i=1, 2, \ldots, \mu)$ étant des fonctions holomorphes. Soit $\mathfrak{D}'$ la partie de (A, B) telle que $X\leqq\varepsilon$ et soit $\mathfrak{D}''$ celle de $X\geqq-\varepsilon$. Grâce à *Cousin*, on peut trouver des fonctions holomorphes c_i', c_i'' au voisinage de $\mathfrak{D}'$ et au voisinage $\mathfrak{D}''$, respectivement, telle que l'on ait identiquement

$$c_i'-c_i''=c_i \quad (i=1, 2, \ldots, \mu).$$

Posons $$F'=\sum c_i'\Phi_i, \quad F''=\sum c_i''\Phi_i ;$$

F' et F'' sont alors des fonctions holomorphes au voisinage de $\mathfrak{D}'$ et au voisinage de $\mathfrak{D}''$, respectivement, et on a

$$F'-F''=F.$$

Désignons les images sur (R) des traces sur Σ de F' et F'' par f' et f'', respectivement, on a alors,

$$f'-f''=u_0u .$$

Posons $$f'=u_0u_1, \quad f''=u_0u_2 ;$$

d'après la propriété de Φ_i, u_1, u_2 sont alors, des fonctions holomorphes sur (R) au voisinage de Δ_1 et au voisinage de Δ_2, respectivement, et telle que $u_1-u_2=u$. C. Q. F. D.

12. Développement des fonctions holomorphes.

Théorème 4—*Dans les circonstances du lemme fondamental, pour une fonction donnée $u(P)$ holomorphe sur (R) au voisinage de Δ_0 et pour un nombre positif donné ε, on peut trouver une fonction $v(P)$ holomorphe sur (R) au voisinage de Δ, telle que l'on ait $|u(P)-v(P)|<\varepsilon$ au voisinage de Δ_0.*

En effet, la fonction $F(x, y)$ du lemme fondamental s'exprime de la forme $F=\sum c_k\Phi_k (k=1, 2, \ldots, \mu)$ au voisinage de (A^0, B^0), c_k étant des fonctions holomorphes. A_i^0, B_j^0 $(i=1, \ldots, n; j=1, \ldots, m)$ étant simplement connexes, pour tout nombre positif ε', on peut trouver des fonctions entères $c_k'(x, y)$, telle que l'on ait

$$|c_k(x, y)-c_k'(x, y)|<\varepsilon'$$

au voisinage de (A^0, B^0). Posons $G(x, y) = \sum c_k' \Phi_k$, dont l'image sur (R) de la trace sur $\sum$ sera désignée par $g(P)$; $g(P)$ est alors, holomorphe au voisinage de Δ et divisible par u_0. Donc, si l'on pose

$$g = u_0 v ,$$

v est holomorphe au voisinage de Δ. L'image de la trace de F étant $u_0 u$, il est évident que, si l'on choisit ε' suffissamment petit, on a $|u - v| < \varepsilon$ au voisinage de Δ_0. C. Q. F. D.

IV. Appendice

13. Une condition pour le problème (J)—Soit (I) un idéal holomorphe de domaines indéterminés à l'espace (x) et soit $\sum$ son ensemble de zéros ; nous appellerons que (I) possède *la propriété* (R) en point (x^0), si $\sum$ s'exprime par l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions de (I) au voisinage de (x^0).

Un ensemble $(\mathfrak{J})$ d'idéaux holomorphes de domaines indéterminés à l'espace (x) sera appelé de former *une famille* (A) en un point (x^0), s'il jouit des propriétés suivantes :

1°. Si un idéal (I) appartient à $(\mathfrak{J})$, et si $\Phi(x)$ est une fonction holomorphe en (x^0), les adjoint et quotient de (I) par rapport à Φ, pour un voisinage suffisamment petit de (x^0), appartiennent encore à $(\mathfrak{J})$.

2°. Tout idéal (I) de $(\mathfrak{J})$ possède la propriété (R) en (x^0).

Theórème 5—*Pour que un idéal holomorphe (I) de domaines indéterminés à l'espace fini (x) ait une pseudobase en un point (x^0), il faut et il suffit qu'il y ait en (x^0) une famille (A) contenant (I).*

En effet, la condition est nécessaire, puisque l'ensemble des idéaux possèdant des pseudobases en (x^0), forme évidemment une famille (A) en (x^0).

Supposons donc, qu'il y ait en (x^0) une famille (A), $(\mathfrak{J})$ contenant l'idéal (I) ; nous allons montrer que (I) possède une pseudobase en (x^0) ; dont le mot «en (x^0)» sera généralement supprimé dans la suivante. Soit $\sum$ l'ensemble des zéros de (I), dont le nombre de dimensions sera supposé plus petit que n. D'après *le théorème de Cartan*, l'idéal géométrique de domaines indéterminés attaché à $\sum$ possède une pseudobase, que nous désignerons par $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$. Comme $\sum$ est donné par l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions de (I), grâce au *lemme de Hilbert-Rückert*, on peut trouver un entier positif λ tel que $F_1^\lambda \in (I)$.

Selon *le corollaire 2*, considérons les adjoint et quotient de (I) par rapport à F_1 (pour un voisinage suffisamment petit de (x^0)) ; dont, si tous les deux possèdent des pseudobases, (I) l'est aussi. Or, l'adjoint possède F_1 et le quotient possède $F_1^{\lambda-1}$. Si $\lambda-1>1$, nous appliquerous le même procédé au quotient, et ainsi de suite. Nous procéderons pareillement pour $F_2, F_3, \ldots, F_p$, successivement, et nous arriverons à un système d'idéaux $[(J_1), (J_2), \ldots, (J_q)]$ tel que à partir de (I), on puisse atteindre à chaque (J_j) $(j=1, 2, \ldots, q)$ par un nombre fini d'opérations, adjoindre ou diviser au moyen d'une des fonctions $F_i (i=1, 2, \ldots, p)$, et que, lorsque tous les (J_j) possèdent des pseudobases, (I) le soit aussi, et encore que chaque (J_j) ait (F).

Soit (J) un quelconque du systeme et soit $\sum'$ son ensemble de zéros ; il se présente deux cas possibles : Ou bien $\sum'=\sum$, (J) admet alors, (F) comme pseudobase. Ou bien $\sum' \neq \sum$, dans ce cas il est facile à voir que $\sum' \subset \sum$. Considérons le système partiel (S) consistant des (J) tel que $\sum' \subset \sum$.

Considérons généralement une variété caractéristic T passant par le point (x^0) ; d'après *Weierstrass*, la portion de T au voisinage de (x^0) consiste d'un nombre fini d'éléments ; si le nombre des éléments à i dimensions est $\nu_i (i=n-1, n-2, \ldots, 0)$, nous ferons correspondre à T $\alpha=(\nu_{n-1}, \nu_{n-2}, \ldots, \nu_0)$. Considérons l'ensembla A de tous les α (n étant déterminé), et l'ordonnons comme ce qui suit : Soit $\alpha'=(\nu'_{n-1}, \nu'_{n-2}, \ldots, \nu'_0)$ un élément de A différent de α ; nous appellerons $\alpha<\alpha'$, ou bien si $\nu_{n-1}<\nu'_{n-1}$, ou bien si $\nu_{n-1}=\nu'_{n-1}, \ldots, \nu_i=\nu'_i, \nu_{i-1}<\nu'_{i-1}$ $(i=n-1, n-2, \ldots, 1)$.

A l'idéal (I) nous ferons correspondre l'élément α de l'ensemble ordonné A, correspondant à l'ensemble des zéros $\sum$ en (x^0) ; et au système (S), s'il existe, le plus grand β des éléments pareillement attachés aux idéaux de (S). Comme $\sum' \subset \sum$, on a $\beta<\alpha$.

Chaque idéal (J) de (S) appartient à $(\mathfrak{F})$, on peut donc, l'appliquer le même procédé et obtenir un système d'idéaux qui correspond à (S) de (I) ; soit (S_1) la somme de ces systèmes, lorsque (J) parcourt (S). Si (S_1) existe, l'élément γ de A pareillement correspondant à (S_1), satisfait à $\gamma<\beta<\alpha$. Par suite, on ne peut procéder qu'un nombre fini de fois. (I) possède donc, une pseudobase en (x^0). C. Q. F. D.