Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

Sur une Généralisation de la Coupure de Dedekind

Kinjiro KUNUGUI

1. En généralisant la notion de la coupure introduite par R. Dedekind, M. MacNeille[1] a donné une méthode d'obtenir une structure complète[2] à partir d'un ensemble quelconque (partiellement) ordonné.[3] M. MacNeille a opéré comme il suit : étant donné un sous-ensemble A d'un ensemble ordonné R quelconque, on désigne par A^* l'ensemble de tous les éléments de R qui sont des bornes supérieures de A. De même, on désigne par A_* l'ensemble de tous les éléments de R qui sont des bornes inférieures de A. Une paire des deux sous-ensembles A_1, A_2 de R s'appelle une coupure, si l'on a, à la fois,

$$A_1=(A_2)_*, \quad A_2=(A_1)^*$$

et cette coupure au sens de MacNeille sera désignée par $\alpha=[A_1, A_2]$. L'ensemble de toutes les coupures, soit désigné par $\mathfrak{R}$, est ordonné par la définition suivante : on dit que deux coupures $\alpha'=[A_1', A_2']$, $\alpha''=[A_1'', A_2'']$ satisfont à la relation $\alpha'\leq\alpha''$ lorsqu'on a $A_1'\subseteq A_1''$ (et cela revient à dire qu'on a $A_2'\supseteq A_2''$). Avec cette définition de la coupure et de l'ordre des coupures, on voit facilement que l'ensemble $\mathfrak{R}$ est une structure complète. D'autre part, pour tout élément a de R, l'ensemble $A_1(a)$ de tous les éléments x de R qui satisfont à $x\leq a$, et l'ensemble $A_2(a)$ de tous les éléments y de R qui satisfont à $y\geq a$ forment une coupure $[A_1(a), A_2(a)]$. Cette coupure peut être considérée come identique à l'élément a, et ainsi l'ensemble R sera contenu dans $\mathfrak{R}$.

La notion de la coupure ainsi définie est une belle généralisation de la coupure employée par R. Dedekind dans sa fameuse théorie des nombres irrationnels, et lorsqu'on l'applique à l'ensemble de tous les nombres rationnels, on obtient comme $\mathfrak{R}$ l'ensemble de tous les nombres réels avec deux infinis $\pm\infty$.

2. Considérons maintenant la notion de la continuité au sens d'ordre. Pour cela, introduisons d'abord deux notions : la densité et la lacune. Un

---

1) MacNeille: Partially ordered sets, Trans. Am. Math. Soc., **42** (1937), pp. 416-460.

2) Voir p. ex. G. Birkhoff, Lattice theory, Am. Math. Soc. Colloquium publications Vol. XXV, New York City. 1940, p. 27.

3) Pour simplicité, nous appelons *ensemble ordonné* tout ensemble qui est partiellement ordonné.

élément a d'un ensemble ordonné R s'appelle *isolé au sense d'ordre* (ou *o-isolé*) s'il n'est comparable avec aucun élément de R (sauf luimême). Un sous-ensemble A d'un ensemble ordonné R sera appelé *dense* dans R, si A contient tous les éléments o-isolés de R et si, avec tous les deux elements a_1, a_2 de R tels que $a_1 < a_2$,[4] il existe un élément a_3 de A tel qu'on ait $a_1 \leq a_3 \leq a_2$. Si, avec tous les deux elements a_1, a_2 de R tols que $a_1 < a_2$, il existe un element a_3 de R tel qu'on ait $a_1 < a_3 < a_2$, nous disons simplement que R est *dense*. Une coupure sera dite qu'elle forme une *lacune*, lorsque A_1 n'a pas un élément maximum (et cela revient à dire que A_2 n'a pas un élément minimum) et que ni A_1 ni A_2 n'est vide. Un ensemble ordonné R est applelé *continu au sens d'ordre* (ou *o-continu*) si elle est dense et si l'ensemble $\mathfrak{R}$ de toues ses coupures n'a aucune lacune.

La question se pose alors si, pour tout ensemble ordonné R qui est dense, l'ensemble $\mathfrak{R}$ des coupures de R, est-il un o-continu? Mais, la réponse y est négative, comme nous pouvons en donner des exemples très simples. En effet, prenons comme R l'ensemble des deux éléments a, b et supposons que a, b ne sont pas comparables. Alors l'ensemble $\mathfrak{R}$ des coupures de R se compose des quatre éléments O, a, b, 1 tels qu'on ait $0=[O, R]$, $1=[R, O]$, $0<a$, $0<b$, $a<1$, $b<1$. On voit bien que R est dense. Mais $\mathfrak{R}$ ne l'est pas, puisqu'entre 0 et a on n'a aucun élément de $\mathfrak{R}$.

Voici encore un autre exemple. Considérons deux ensembles de points A_1 et A_2 situés dans le plan, et définis comme il suit: A_1 est l'ensemble de tous les points (x, y) qui satisfont à la relation: $x=0$, $y<0$. A_2 est celui de tous les points (x, y) satisfaisant à $y \geq 0$, $x=1$ ou -1. Posons $R=A_1+A_2$. Deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) de R sont ordonné comme $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ lorsqu'on a $y_1 < y_2$. On voit bien que R est dense. Or, l'ensemble $\mathfrak{R}$ de toutes les coupures de R se compose de R et d'un élément a qui est la borne inférieure de A_2 et qui est la borne supérieure de A_1 en même temps. On a donc $a<(1, 0)$, mais il n'existe aucune coupure de R qui serait située entre ces deux. Donc, $\mathfrak{R}$ n'est pas dense.

Disons qu'*une définition de la coupure admet la proposition de Dedekind*, si la définition nous permet de dire que l'ensemble $\mathfrak{R}$ de toues les coupures de R est o-continu dès que R soit dense.

3. Maintenant, nous allons donner une définition de coupure d'un ensemble ordonné quelconque telle qu'elle admet la proposition de Dedekind.

---

4) Nous désignoss par $a_1 < a_2$, lorsqu'on a, à la fois, $a_1 \leq a_2$ et $a_1 \neq a_2$.

Soit R un ensemble ordonné quelconque. Considérons deux parties A_1, A_2 de R qui satisfont aux quatre conditions suivantes:

1°) On a $A_1 \neq O$, $A_2 \neq O$.

2°) Si $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ et $a_1 \neq a_2$, on a $a_1 < a_2$

3°) Pour deux éléments quelconques a_1, b_1 de A_1, il existe au moins un élément c_1 de A_1 tel que $a_1 \leq c_1$, $b_1 \leq c_1$. Pour deux éléments quelconques a_2, b_2 de A_2, il existe au moins un élément c_2 de A_2 tel que $a_2 \geq c_2$, $b_2 \geq c_2$.

4°) A_1, A_2 sont des ensembles maxima parmi ceux qui satisfont aux conditions 1°), 2°), 3°). En d'autres termes, si $A_1' \supseteq A_1$, $A_2' \supseteq A_2$ et si A_1', A_2' satisfont à 1°), 2°), 3°) (en remplaçant A_1, A_2 par A_1', A_2' respectivement) on a les identités: $A_1' = A_1$, $A_2' = A_2$.

Nous appelons cette paire A_1, A_2 *une coupure de* R et la désignons par $\alpha = (A_1, A_2)$. La définition de l'ordre entre les coupures sera comme suivant: soient $\alpha = (A_1, A_2)$, $\beta = (B_1, B_2)$ deux coupures. Nous posons par définition $\alpha = \beta$ lorsque nous avons à la fois $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$. Nous posons $\alpha < \beta$ par définition lorsqu'il existe deux éléments a_2, b_1 tels que $a_2 \in A_2$, $b_1 \in B_1$ et $a_2 < b_1$. Nous mettons enfin $\alpha \leq \beta$ au lieu d'avoir $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$. Maintenant il est facile de voir que l'ordre des coupures ainsi défini satisfait à deux axiomes d'ordre:

1) *Si* $\alpha \leq \beta$ *et* $\beta \leq \alpha$, *on a toujours* $\alpha = \beta$.

2) *Si* $\alpha \leq \beta$ *ei si* $\beta \leq \gamma$, *on a toujours* $\alpha \leq \gamma$.

Donc, l'ensemble $\mathfrak{R}$ de toutes les coupures de R est ordonné.

Soit, maintenant, a un élément quelconque de R. Deux ensembles $A_1(a)$, $A_2(a)$ définis plus haut satisfont aux conditions 1°), 2°), 3°) et 4°). Donc, nous pouvons identifier la coupure $(A_1(a), A_2(a))$ avec a. On a alors $R \subseteq \mathfrak{R}$. De plus, avec cette définition d'identification et d'ordre de la coupure, nous pouvons établir facilement la proposition suivante:

3) *Soit* $\alpha = (A_1, A_2)$ *une coupure. Si* $a_1 \in A_1$ *on a toujours* $a_1 \leq \alpha$. *De même, si* $a_2 \in A_2$ *on a toujaurs* $\alpha \leq a_2$.

4. Maintenant, nous allons montrer que notre coupure admet la proposition de Dedekind. Pour cela, montrons d'abord

4) *Pour tout ensemble ordonné* R, R *est dense dans l'ensemble* $\mathfrak{R}$ *de toutes ses coupures. Si* R *est dense,* $\mathfrak{R}$ *est également dense.*

En effet, soit α une coupure de R qui est o-isolé dans $\mathfrak{R}$. Posons $\alpha = (A_1, A_2)$. Or, d'après la condition 1°), on a $A_1 \neq O$. Il existe donc au moins un élément a_1 de A_1. Alors, en vertu de 3), on a $a_1 \leq \alpha$, et puisque α est o-isolé, ceci veut dire $a_1 = \alpha$. Donc, $\alpha \in R$.

Soient ensuite α, β deux éléments de $\mathfrak{R}$ tels que $\alpha<\beta$ et posons $\alpha=(A_1, A_2)$, $\beta=(B_1, B_2)$. Nous avons alors, d'après la définition de l'ordre des coupures, deux éléments a_2, b_1 tels que $a_2\epsilon A_2$, $b_1\epsilon B_1$ et $a_2<b_1$. Or, en vertu du 3), nous avons $\alpha\leq a_2<b_1\leq\beta$. Donc, R est dense dans $\mathfrak{R}$.

Si R est dense, nous avons, pour telles coupures α, β et pour tels éléments a_2, b_1, un élément c de R tel que $a_2<c<b_1$. Par suite, d'après la définition de l'ordre, nous avons $\alpha<c<\beta$. Donc, $\mathfrak{R}$ est également dense.

Enfin, nous pouvons démontrer la proposition suivante:

5) *Pour tout ensemble ordonné R, l'ensemble $\mathfrak{R}$ de toutes ses coupures n'a aucune lacune.*

Démonstration. Supposons, par impossible, qu'il existe une coupure $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ de $\mathfrak{R}$ telle que $\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2=O$. Désignons par $\alpha_1=(A_1^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_2})$ une coupure de R qui appartient à $\mathfrak{a}_1$ et $\alpha_2=(A_1^{\alpha_2}, A_2^{\alpha_2})$ celle qui appartient à $\mathfrak{a}_2$. Posons

$$A_1=\bigcup_{\alpha_1\epsilon\mathfrak{a}_1} A_1^{\alpha_1},\quad A_2=\bigcup_{\alpha_2\epsilon\mathfrak{a}_2} A_2^{\alpha_2}$$

Puisque $\mathfrak{a}_1\neq O$, $\mathfrak{a}_2\neq O$, $A_1^{\alpha_1}\neq O$, $A_2^{\alpha_2}\neq O$, on a $A_1\neq O$ et $A_2\neq O$. Donc A_1, A_2 satisfont à la condition 1°).

Prenons ensuite deux éléments quelconques a_1, a_2 tels que $\mathfrak{a}_1\epsilon A_1$, $\mathfrak{a}_2\epsilon A_2$. Il existe alors α_1, α_2 de sorte qu'on ait $a_1\epsilon A_1^{\alpha_1}$, $a_2\epsilon A_2^{\alpha_2}$. Puisque $\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2=O$, nous avons $\alpha_1<\alpha_2$ et par suite il existe a_2', a_1' tels que $a_2'\epsilon A_2^{\alpha_2}$, $a_1'\epsilon A_1^{\alpha_2}$ et $a_2'<a_1'$. Alors, les inégalités $a_1\leq a_2'$, $a_1'\leq a_2$ entrainent $a_1<a_2$. Donc, A_1, A_2 satisfont à la condition 2°).

Pour montrer que A_1, A_2 satisfont à la condition 3°), remarquons d'abord que $\mathfrak{a}_1$ *n'a pas un élément maximum.*[5] En effect élément maximum de $\mathfrak{a}_1$ est, d'après la condition 3°), l'élément de $\mathfrak{a}_1$ qui est le plus grand. Désignons-le par α et posons $\mathfrak{a}_2'=\alpha\cup\mathfrak{a}_2$. La paire $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2'$ satisfont aux conditions 1°), 2°), 3°). Donc, d'après 4°), on a $\mathfrak{a}_2=\mathfrak{a}_2'$. Par suite α appartientrait à $\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2$. Ceci est contradictoire à la supposition: $\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2=O$.

Remarquons ensuite que, *pour tout a_1 de $\mathfrak{a}_1$, il existe un élément a_1' de A_1 tel que $a_1<a_1'$.* En effet, comme α_1 n'est pas un élément maximum, il existe un élément α_1' de $\mathfrak{a}_1$ tel que $\alpha_1<\alpha_1'$. Posons $\alpha_1=(A_1^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_1})$, $\alpha_1'=(A_1^{\alpha_1'}, A_2^{\alpha_1'})$. Puisque $\alpha_1<\alpha_2'$, il existe deux éléments a_2, a_1' tels que $a_2\epsilon A_2^{\alpha_1}$, $a_1'\epsilon A_1^{\alpha_1'}$, $a_2<a_1'$. D'autre part, nous avons, d'après 3), $a_1\leq a_2$. Donc, on a $a_1<a_1'$. Or, $a_1'\epsilon A_1^{\alpha_1'}$ entraîne $a_1'\epsilon A_1$ et notre remarque est

5) Un element e d'un ensemble ordonné E s'appelle maximum si l'inégalité $e<x$ n'a lieu pour aucun x de E.

démontrée.

Revenons à la condition 3°). Soient a_1, a_1' deux éléments quelconques de A_1. Il existe alors a_1, a_1' tels que $a_1 \in A_1^{a_1}$, $a_1' \in A_1^{a_1}$, $a_1 \in \mathfrak{a}_1$, $a_1' \in \mathfrak{a}_1$. Or, d'après la condition 3°) pour $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$, il existe un a_1'' de $\mathfrak{a}_1$ tel que $a_1 \leq a_1''$, $a_1' \leq a_1''$. Comme nous avons remarqué plus haut, il existe un élément a_1''' de A_1 tel que $a_1'' < a_1'''$. Donc, nous avons $a_1 \leq a_1 \leq a_1'' < a_1'''$ et $a_1' \leq a \leq a_1'' < a_1'''$. Par conséquent, A_1 satisfait à la condiiion 3°). De même, A_2 satisfait à la même condition.

Ainsi, nous avons vu que A_1, A_2 satisfont à trois conditions 1°), 2°) et 3°). Alors, d'après le principe de Zorn, il existe deux ensembles $\bar{A}_1$, $\bar{A}_1$ tels que $\bar{A}_1 \supseteq A_1$, $\bar{A}_2 \supseteq A_2$ et qu'ils remplissent non seulement à trois conditions 1°), 2°), 3°) mais encore à 4°). $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ forme donc une coupure de R. Posons $a = (\bar{A}_1, \bar{A}_2)$. En vertu de l'inclusion $\bar{A}_1 \supseteq A_1$ et de la proposition 3), nous pouvons dire que l'inégalité $a_1 \leq a$ a lieu pour tout a_1 de A_1. Donc, d'après la remarque donnée plus haut (qui donne l'existence d'un élément a_1 tel que $a_1 < a_1$), on a $a_1 < a$ pour tout a_1 de $\mathfrak{a}_1$. De même $a < a_2$ a lieu pour tout a_2 de $\mathfrak{a}_2$. Ceci contredit évidemment à la condition 4°) de $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$. La proposition 5) est donc démontrée.