Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

Sur les Fonctions Analytiques de Plusieurs Variables, VIII—Lemme Fondamental

Kiyoshi OKA

Introduction.—Les problèmes principaux depuis le Mémoire I sont : problèmes de Cousin, problème de developpement et problème des convexités[(1)]. Dans les Memoires I—VI[(2)], nous avons vu, disant un mot, que ces problèmes sont résolubles affirmativement pour les domaines univalents finis[(3)]. Et l'auteur a encore constaté quoique sans l'exposer, que ces résultats restent subsister au moins jusqu' aux domaines finis sans point critiques[(4)].

Il s'agit donc : ou bien d'introduire l'infini convenable, ou bien de permettre des points critiques ; or, on retrouvera que l'on ne sais presque

---

(1) Ces problèmes sont fondés sur H. Behnke et P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer Komplexer Veränderlichen, 1934. Nous allons les expliquer en formes précises. Soient $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_0$ deux domaines connexes ou non sur l'espace de n variables complexes tels que $\mathfrak{D}_0 \subseteqq \mathfrak{D}$ (c'est-à-dire que $\mathfrak{D}_0$ soit un «Teilbereich» de $\mathfrak{D}$); nous appellerons que $\mathfrak{D}_0$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}$, si $\mathfrak{D}_0 \subseteqq H$, H' étant la «Regularitätshulle» de $\mathfrak{D}_0$, et encore si, pour tout domaine connexe ou non Δ_0 tel que $\Delta_0 \Subset \mathfrak{D}_0$ (c'est-à.dire que $\Delta_0 \subset \mathfrak{D}_0$ et $\Delta_0 \ll \mathfrak{D}_0$), on peut trouver un domaine connexe ou non Δ tel que $\Delta_0 \subset \Delta \Subset \mathfrak{D}_0$ de façon qu à tout point P de $\mathfrak{D}_0 - \Delta$, il corresponde une fonction f holomorphe dans $\mathfrak{D}$ telle que $|f(P_0)| > \max |f(\Delta_0)|$. Spécialement, si $\mathfrak{D}_0$ est ainsi par rapport à lui-même, nous l'appelons avec H. Behnke d'être holomorphe-convexe (regulär-konvex). Les problémes sont alors : Problèmes de Cousin. Trouver une fonction meromorphe (ou holomorphe) admettant les pôles (ou les zéros satisfaisant à une certaine condition) donnés dans un domaine holomorphe-convexe. Problème de développement. Soit $\mathfrak{D}_0$ un domaine (connexeou non) holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}$; trouver, pour toute fonction holomorphe f_1, une série de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$, convergente uniformément vers f dans tout domaine connexe ou non Δ_0 tel que $\Delta_0 \Subset \mathfrak{D}_0$. Porblème des convexités. Tout domaine psseudoconvexe est il holomorphe-convexe ? Pour les domaines univalents, on peut remplacer «holomorphe-convexe» par «domaine d'holomorphie», grâce au théorème de H. Cartan et P. Thullen.

(2) Les Mémoirs précédents sont : I—Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936 ; II—Domaines d'holomorphie, 1937 ; III—Deuxièmes problèmes de Cousin, 1939 (Journal of Science of the Hiroshima Univarsity) ; IV—Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941 ; V—L'intégral de Cauchy, 1941 (Japanese Journal of Mathematics); Domaines pseudoconvexes, 1942 (Tohoku Mathematical Journal); VII—Sur quelques notions arithmetiques, 1950 (Bulletin de la Société Mathématique de France).

(3) Précisément dit, pour le deuxième problème de Cousin, nous avons montrer une condition nécessaire et suffisante pour les zéros ; et pour le problème des convexites, nous l'avons explique pour les deux variables complexes, pour dimenuer la répitation ultérieure inévitable.

(4) L'auteur l'a écrit aux détails en japonais à Prof. T. Takagi en 1943.

rien sur les domaines intérieurement ramifiés ; par exemple, qu'arrive-t-il pour le développement locale ? Nous nous occuperons donc, d'abord au deuxième problème.

Or, l'idèe fondamentale pour les recherches actuelles s'exprime symboliquement par le théorème II du Mémoire I. Nous venons de l'utiliser en forme du théorème I du Mémoire II[5], à cause que nous n'avons pas pu résoudre le problème (E). Mois, pour les domaines intérieurement ramifiés, la forme originale est indispensable ; c'est le lemme fondamental du titre et c'est pour l'établir, que nous avons préparé le Mémoire VIII.

Pour établir le lemme fondamental, les domaines (finis) sans points critiques, il est visiblement suffisant de résoudre les problèmes (C_2) et (E) et de trouver les pseudobases locales des idéaux géométriques de domaines indéterminés ; dont nous avons résolu les problèmes (C_2) et (E) dans le Mémoires VII, et plus récemment H. Cartan a résolu le dernier problème d'après le théorème 4 du Mémoire VII que le problème (K) est toujours résoluble[6]. Mais, quand on permet des points critiques, on rencontre la nouvelle difficulté que une fonction holomorphe sur une variété caractéristique n'est pas nécessairement la trace d'une fonction holomorphe à l'espace. Ce qui engendre, comme conséquence, une espèce des problèmes (J), qui contient le problème des idéaux géométriques dans un certain sens, et est plus étendu.

Dans le Mémoire actuel, nous résoudrons ce problème à partir encore du théorème 4 du Mémoire VII (théorèmé 2), établirons le lemme fon-

---

(5) H. Behnke et K. Stein ont souvent indiqué que ce théorème est applicable aux domaines multivalents sans point critique.

(6) Nous allons expliquer brièvement sur le cours des recherches des idéaux holomorphes. C'est W. Rückert qui a transplanté la noton " idéal " du champ de fonctions algebriques au champ de fonctions analytiques (1933, Math. Annalen, Vol 107, pp 259—281); et c'est H. Cartan qui a premièrement remarqué la différence essentielle, avec un résultat important (1940, cité dans le Mémoire VII). Cartan a encore exposé: Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, (3), LXI—); Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes (1950, Bulletin de la Sociéte Mathématique de France).

Or l'auteur a exposé le Mémoire VII, sans connaitre l'existence du premier de ces deux Memoires de Cartan et du Memoire du Rückert ; nous allons donc examiner le Mémoire-là en comparant avec les Mémoires-ici : Le Mémoire VII consiste des deux parties, dont la première montre que les problèmes (C_1), (C_2) et (E) se réduissent au seul problème (K); ce qui est déjà indiqué par Cartan, sans démonstration, mais avec toutes les préparations. Dans la deuxième partie, l'auteur a d'abord préparé le théorème du réste pour résoudre le problème (K); ce théorème est déjà exposé et utilisé par Rückert.

damental et montrons brièvement comment on l'applique aux problèmes principaux. Et comme appendice, nous exposerons, d'après le même théorème, une condition nécessaire et suffisante pour que le problème (J) d'un idéal donné soit résoluble.

«Comme nous ne traiterons que l'espace fini de variables complexes dans le présent Mémoire, nous supprimerons généralement d'expliquer ces conditions de l'espace.»

I. Idéaux holomorphes de domaines indéterminés et pseudobases locales

1. Notions généralles.——«Les domaines considérés dans la présente etant *univalents* sans exceptions, nous supprimerons encore, généralement d'expliquer cette condition.»

Pour les idéaux holomorphes de domaines indétérminés, nous avons expliqué dans No 2 du Mémoire VII, que nous répéterons tout brièvement. Considérons dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, une couple ordonnée (f, δ), dont δ est un domaine *connexe ou non*, et f, une fonction holomorphe dans δ. Soit (I) un ensemble de couples (toujonrs ordonnées) (f, δ) ; au lieu de dire que $(f, \delta) \in (I)$, nous dirons aussi que $f \in (I)$ pour δ. (I) est appelé idéal holomorphe de domaines indéterminés, s'il satisfait aux conditions suivantes ; 1^0 si $(f, \delta) \in (I)$ et si a est une fonction holomorphe dans un domaine (connexe ou non) δ', alors $af \in (I)$ pour $\delta \cap \delta'$; 2^0 si $(f, \delta) \in (I)$, $(f', \delta') \in (I)$, alors $f+f' \in (I)$ pour $\delta \cap \delta'$. Nous l'appellerons simplement *idéal*, en générale dans le Mémoire actuel. De la définitions, il s'ensuit immédiatement la propriété topologique que : si (I) est un ideal et si $(f, \delta) \in (I)$ et $\delta' \subset \delta$, alors $(f, \delta') \in (I)$; nous pouvons donc dire que $f \in (I)$ en un point P, ou non.

Un point P de l'espace (x) sera appelé *point-lacunaire* de l'idéal (I), si aucune fonction f n'appartient à (I) en P. L'ensemble des points lacunaires de (I) est évidemment fermé. Un point P de l'espace (x) sera appelé *zéro* de l'déal (I), si toute fonction appartenant à (I) en P s'annule à P. L'ensemble des zéros de (I) est évidemment fermé sur le complémentaire de l'ensemble des points lacunaires de (I). Réciproquement, tout ensemble fermé de points de l'espace (x) est evidemment l'ensemble des zéros d'un idéal convenable à cet éspace.

Un système fini de fonctions holomorphes F $(i=1, 2, \ldots\ldots, p)$ dans un domaine $\mathfrak{D}$ de l'espace (x) sera appelé pseudobase (fini) de l'idéal (I), s'il jouit des propriétés que : 1° Toutes les F_i appartinent à (I) en tout point de $\mathfrak{D}$; 2° pour toute fonction appartenant à (I) en un point quelconque P de $\mathfrak{D}$, on ait $f\equiv 0$ mod (F) en P. Un système (F) est appelé pseudobase de l'ideal (I) en un point P, s'il en est ainsi pour un certain voisinage de P; toute pseudobase de ce caractère est appelé pseudobase locale. Le problème principal à notre point de vue pour les idéaux holomorphes de domaines indéterminés, consiste à trouver les pseudobases locales, que nous appelons problème (J). D'après ce que nous venons de voir pour les ensemble des zéros des idéaux, nous trouvons immédiatement que ce problème n'a toujours pas de solution. Pour ce problème, nous conviendrous un terme ; étant donnés deux idéaux (I_1), (I_2) à l'espace (x), s'ils se relient de façon que, en tout point P d'un domaine $\mathfrak{D}$, toute fonction f appartenant à l'un, appartienne nécessairement à l'autre, nous appellerons que ces idéaux sont équivalents dans $\mathfrak{D}$, et le dénoterons par $(I_1) \sim (I_2)$. Nous diront que $(I_1) \sim (I_2)$ en un point P, s'il en est ainsi pour un certain voisinage de P.

Pour les problèmes (J), nous avons vu dans le Mémoire VII que le problème (K) est toujours résoluble (théorème 4). Nous allons partir de ce résultat.

2. Principes généraux.——Considérons à l'espace (x) un système des équations fonctionnelles linéaires simultanées de la forme

$$A_{i\,1}F_{i\,1}+A_{i\,2}F_{i\,2}+\ldots\ldots+A_{i\,p}F_{i\,p}=0 \quad (i=1, 2, \ldots\ldots, q),$$

avec quelques identités des formes $A_{ij}=A_{k\,l}$ $(i, k=1, 2, \ldots\ldots, q\,; j, l=1, 2, \ldots\ldots, p)$, où F_{ij} sont des fonctions données, holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}$, et A_{ij} sont des fonctions inconnues. Soit $(A_{11}, A_{12}, \ldots\ldots, A_{qp})$ un système de fonctions holomorphes dans un domaine connexe ou non δ contenu dans $\mathfrak{D}$; s'il satisfait identiquement à la relation idniquée, nous l'appelons solution pour δ. Considérons l'ensemble (I) de tous les (A_{11}, δ) tels que, à chaque (A_{11}, δ), il corresponde une solution de l'équation donnée, de la forme $(A_{11}, A_{12}, \ldots\ldots, A_{qp})$ pour δ ; (I) forme évidemment un idéal ; que nous appellerons en général *idéal* (L). *Le théorème* 4 *du Mémoire VII* est alors, équivalent a dire que :

Tout ideal (L) *dans un domaine* $\mathfrak{D}$ *possède une pseudobase en tout point* *de* $\mathfrak{D}$.

Commençons par rechercher des principes généraux qui seront immédiatement issus de ce théorème.

1° Corollaire de H. Cartan. *Soient* (I_1), (I_2) *deux idéaux holomorphes de domaines indtérminés a l'espace* (x), *et soit* $(I)=(I_1)\cap(I_2)$; (I) *est évidemment un idéal de la même nature. Pour que* (I) *ait une pseudobase en un point* (x^0), *il suffit qu'il en est ainsi pour* (I_1) *et pour* (I_2). (La démonstration est immédiate).

2° Corollaire 1.—*Etant donnés à l'espace* (x) *un ideal holomorphe de domaines indéteminés* $(I)=\{(f,\ \delta)\}$ *et un point* (x^0) ; *on transforme* (I) *à l'aide des fonctions* $F(x)$, $\Phi_1(x)$, ..., $\Phi_p(x)$ *holomorphes au voisinage* V *de* (x^0), *et forme* $(J)=\{\varphi,\ \delta')\}$, *comme ce qui suit*:

$$\varphi=fF+A_1\Phi_1+\cdots\cdots+A_p\Phi_p,\quad \delta'=V\cap\delta\cap\alpha_1\cap\cdots\cdots\cap\alpha_p,$$

dont $A_i(i=1,\ \ldots\ldots,\ p)$ *est une fonction holomorphe quelconque dans* α_i. (J) *forme évidemment un ideal. Supposons que* (J) *ait une pseudobase en le point* (x_0), *et encore que l'equation fonctionnelle*

$$A_0F+A_1\Phi_1+\cdots\cdots+A_p\Phi_p=0.$$

jouisse de la propriété que, si $(A_0,\ A_1,\ \ldots\ldots,\ A_p)$ *est une solution en un point de* V, A_0 *appartienne nécessairement à* (I) *en ce point*; (I) *possède alors, une pseudobase en* (x^0).

En effet, $\Psi_i(i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ q)$ étant une pseudobase de (J) au voisinage V' du point (x^0) $(V'\subseteqq V)$, considérons l'équation fonctionnelle

$$B_1\Psi_1+\cdots\cdots+B_q\Psi_q=A_0F+A_1\Phi_1+\cdots\cdots+A_p\Phi_p$$

dont l'idéal (L): $\{(A_0,\ \delta)\}=(K)$ sera comparé avec (I) dans V': d'après la définition de (J), toute fonction appartenant à (I) en un point, appartient nécessairement à (K); réciproquement, d'après la deuxième hypothèse, toute fonction appartenant à (K) en un point, appartient nécessairement à (I) en ce point; donc, $(K)\sim(I)$. (I) possède donc, une pseudobase en (x^0), d'après le théorème. C. Q. F. D.

3° Soit $(I)=\{(f,\delta)\}$ un idéal à l'espace (x), et soit $\Phi(x)$ une fonction holomorphe dans un domaine V; considérons $(J)=\{(\varphi,\ \delta')\}$ tels que $\varphi=f+A\Phi$, $\delta'=V\cap\delta\cap\alpha$, dont A est une fonction holomorphe quelconque dans le domaine quelconque (connexe ou non) α, et l'appelons *adjoint* ;

considérons un autre (J) tel que $\varphi\Phi=f$, et l'appelons *quotient*.

Si l'idéal (I) *possède une pseudobase en un point* (x^0) *de* V, *il en est de même pour l'adjoint et pour le quotient.*

Pour l'adjoint, il est clair, et pour le quotient, on peut le constater immédiatement, d'après le théorème. Qu'arrive-t-il pour la réciproque ?

Exemple.—Considérons à l'espace de deux variables complexes (x, y), l'idéal (I) engendré par les 2 eléments (xy, Δ), $(1, \Delta')$, dont Δ signifie l'espace (x, y) et Δ' est donné par $|y|>0$. (I) n'a pas de pseudobase en l'origine. Au contraire, l'adjoint de (I) par (y, Δ) possède la pseudobase (y) pour Δ, et il en est de même pour le quotient de (I) par (x, Δ). Ainsi, la réciproque n'est pas vraie, ni pour l'adjoint, ni pour le quotient. Mais, si l'on les observe comme ensemble, on trouvera que : pour (y, Δ), le quotient n'a pas de pseudobase en l'orgine, et pour (x, Δ), l'adjoint ne l'est pas.—Où, il y a un fait que voici :

Corollaire 2. *Etant donnés un idéal holomorphe* (I) *de domaines indéterminés à l'espace* (x) *et une fonction holomorphe* $\Phi(x)$ *au voisinage* V *d'un point* (x^0), *si l'adjoint et le quotient* (I) *par* (Φ, V) *possèdent ses pseudobases en* (x^0), *l'idéal original* (I) *l'est aussi.*

En effet, soit $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots\ldots, \Phi_p)$ une pseudobase de l'adjoint au voisinage V' du point (x^0) $(V'\subseteq V)$. Si l'on choisi V' suffisamment petit, on a identiquement $\Phi_i=F_i+A_i\Phi(i=1, 2, \ldots\ldots, p)$, où $F_i\in(I)$ pour V' et A_i sont des fonctions holomorphes dans V'. Soit f une fonction appartenant à (I) en un point (x') de V', mais d'ailleurs quelconque. On a identiquement en (x'),

$$f=a_1F_1+\ldots\ldots+a_pF_p+(a_1A_1+\ldots\ldots+a_pA_p)\,\Phi,$$

a_i étant des fonctions holomorphes. Désignons le quotient de (I) par (J) et $(a_1A_1+\ldots\ldots+a_pA_p)$ par B, il faut alors que $B\Phi\in(I)$, c'est-à-dire que $B\in(J)$ en (x'). Réciproquement, si une fonction holomorphe f satisfait en (x') à ces deux conditions, on a nécessairement $f\in(I)$ en (x'). Or, soit $(\Psi_1, \Psi_2, \ldots\ldots, \Psi_q)$ une pseudobase de (J) pour V' (repris suffisament petit) ; la deuxième de la condition nécessaire et suffisante s'exprime par

$$a_1A_1+\ldots\ldots+a_pA_p=\beta_1\Psi_1+\ldots\ldots+\beta_q\Psi_q,$$

$\beta_i(i=1, 2, \ldots\ldots, q)$ étant des fonctions holomorphes. L'idéal (I), étant ainsi équivalent à un idéal (L), possède une pseudobase en (x^0). C. Q. F. D.

3. Idéaux géométriques.——Etant donnés à l'espace (x) un domaine

$\mathfrak{D}$ et une variété caractéristique (ou analytique) Σ dans $\mathfrak{D}$[7], considérons l'ensemble (I) des (f, δ) tels que $\delta \subseteq \mathfrak{D}$ et f soit identiquement nulle sur $\Sigma \cap \delta$; (I) forme évidement un idéal; nous l'appelons idéal géométrique de domaines indéterminés (attaché à Σ et defini dans le domaine $\mathfrak{D}$).

Théorème de H. Cartan.—*Tout idéal géometrique de domaines indéterminés possède les pseudobases locales.*

Nous allons le reprouver d'après *le corollaire* 1. Soit (x^0) un point quelconque de Σ; il suffit de montrer que (I) ait une pseudobase en (x^0). D'après *Weierstrass*, nous savons que la partie de Σ au voisinage de (x^0) consiste d'un nombre fini d'éléments. Sans appeler à la connaissance que ces éléments sont aussi des variétés caractéristiques, on peut definir pour chaque élément un idéal comme ci-dessus et convenir de l'appeler pour le moment par le même mot. (I) étant au voisinage de (x^0) l'intersection de ces idéaux, d'après *le corollaire de Cartan*, il suffit de dire que chacun d'eux ait une pseudobase en (x^0). Ceci est évident, quand Σ est un point ou une surface.

Considérons donc, à nouveau à l'espace $(x_1, \ldots\ldots, x_n, y_1, \ldots\ldots, y_m)$ tel que $n>0$, $m>1$, un élément Σ à n dimensions (toujours *complexes* dans ce Mémoire) d'une variété caractéristique, au voisinage d'un point (x^0, y^0) de Σ, et l'idéal géométrique (I) correspondant; nous allons montrer que (I) ait une pseudobase en (x^0, y^0). Grace à *Weierstrass*, on peut choisir les coordonnées (x, y), tracer un polycylindre $[(\gamma), (\gamma')]$ de la forme, (γ): $|x_i - x_i^0| < r$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$, (γ'): $|y_j - y_j^0| < \rho$ $(j=1, 2, \ldots\ldots, m)$, et definir Σ et (I) dans $[(\gamma), (\gamma')]$ de façon que la projection[8] de Σ sur l'espace (y) soit (γ'), et que (I) ait pour $[(\gamma), (\gamma')]$ les fonctions holomorphes comme suivantes:

$$F_i(x, y_i),\ \Psi_j(x, y_1, y_j) = y_j \frac{\partial F_1(x, y_1)}{\partial y_1} - \Phi_j(x, y_1) \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, m \\ j=\ 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

où $F_i(x, y_i)$ est un polynome de y_i tel que le coefficient de la plus haute puissance soit 1, Φ_j (x, y_1) est un polynome de y_1, et spécialement $F_1(x, y_1)$ jouit de la propriété que la projection de Σ sur l'espace (x, y_1) coïncide à $F_1(x, y_1)=0$, et que l'intersection de Σ et $\dfrac{\partial F_1(x, y_1)}{\partial y_1}=0$, si elle existe,

(7) Une variété caractéristique est un ensemble de points qui s'exprime localement par l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions holomorphes.

(8) La projection de l'ensemble des points (x', y') sur l'espace (x) est l'ensemble des points (x').

soit à $n-1$ dimensions. (Par suite F_1 n'a pas de facteur multiple.)

Soit (x', y') un point quelconque de $[(\gamma), (\gamma')]$, et soit $f(x, y)$ une fonction appartenant à (I) en (x', y'), mais d'ailleurs quelconque. D'après *le théorème du reste* expliqué au Mémoire VII, on peut trouver une fonction holomorphe $\varphi(x, y)$ telle que $f \equiv \varphi$ mod $(F_2, F_3, \ldots\ldots, F_m)$ en (x', y'), et que φ soit un polynome en $y_2, y_3, \ldots\ldots, y_m$, admettant une borne supérieure de degrés indépendant de f et de (x', y'). On peut donc choisir un entier positif λ indépendant de f et de (x', y'), de façon que $\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^\lambda f \equiv \psi$ mod $(F_2, \ldots\ldots F_m, \Psi)$ en (x', y'), ψ étant une fonction holomorphe de (x, y_1), $\psi(x, y_1)$, appartenant à (I), est évidemment divisible par $F_1(x, y_1)$ en (x', y'). Donc, $\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^\lambda f \equiv 0$ mod (F, Ψ) en $(x' \; y')$.

Maintenant, selon du corollaire 1, formons $(J) = \{(\varphi, \delta')\}$ en transformant $(I) = \{(f, \delta)\}$ comme ce qui suit:

$$\varphi = f\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^\lambda + A_1 F_1 + \ldots\ldots + A_{2m-1}\Psi_m, \quad \delta' = \delta \cap \alpha_1 \cap \ldots\ldots \cap \alpha_{2m-1}$$

(J) possèdant une pseudobase en (x^0, y^0), il ne reste qu'à examiner la deuxième condition. Considérons l'équation fonctionnelle

$$A_0\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)^\lambda + A_1 F_1 + \ldots\ldots + A_{2m-1}\Psi_m = 0\,;$$

soit $(A_0, A_1, \ldots\ldots, A_{2m-1})$ une solution quelconque en un point quelconque $(x' \; y')$ de $[(\gamma), (\gamma')]$; A_0 est alors, nécessairement nulle sur $\sum$, puisqu'il l'est pour $F_1, \ldots\ldots, \Psi_m$, sans l'être pour $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}$; donc $A_0 \in (I)$ en (x', y').

C. Q. F. D.

Il est maintenant clair que l'élément $\sum$ est une variété caractéristique, car l'ensemble des zéros communs des fonctions de la pseudobase doit coïncide à $\sum$ au voisinage de (x^0, y^0), puisque l'idéal actuel est celui de domaines indéterminés.

4. Projections.——Etant donné à l'espace $(x_1, \ldots\ldots, x_n, y_1, \ldots\ldots, y_m)$ un ensemble des points (x', y'), l'ensemble des points (x') est appelé la projection de l'ensemble donné, sur l'espace (x). Soit $\mathfrak{D}$ un domaine de l'espace (x), soit $\mathfrak{D}'$ un domaine connexe ou non de l'espace (y) et soit

(I) un idéal holomorphe de domaines indéterminés à l'espace (x, y), sans point lacunaire dans $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$, dont l'ensemble de zéros dans le domaine $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ est Σ. Supposons que pour tout (x) dans $\mathfrak{D}$, la projection de Σ sur l'espace (y) soit $\subseteqq \mathfrak{D}'$, et considérons à l'espace (x) l'ensemble $(J) = \{(f, \delta)\}$ tel que $\delta \subseteqq \mathfrak{D}$ et f appartienne à (I) en tout point de $(\delta, \mathfrak{D}')$; (J) forme évidemment un idéal, nous l'appellerons *la projection de l'idéal* (I) sur l'espace (x) par rapport à $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$.

Théorème 1.—*Si l'idéal* (I) *a une pseudobase en tout point de* $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$, *sa projection* (J) *l'est pour* $\mathfrak{D}$.

En effet, soit (x^0) un point quelconque de $\mathfrak{D}$, il suffit de montrer que (J) possède une pseudobase en (x^0). Grace à *Weierstrass*, l'intersection de Σ et la variété $x_i = x_i^0$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ est évidemment un nombre fini de points ; soit (x^0, y^0) un quelconque de ces points (s'ils existent). Traçons autour de (y^0) un polycylindre $\varDelta' \Subset \mathfrak{D}'$, et autour de (x^0) un polycylindre $\varDelta$ suffisamment petit pour que $\varDelta \Subset \mathfrak{D}$ et la porjection de $\Sigma \cap (\varDelta, \varDelta')$ sur l'espace (y) soit $\Subset \varDelta'$, et considérons la projection (K) de (I) sur l'espace (x) par raport à $(\varDelta, \varDelta')$. Dans $\varDelta$ (suffisamment petit) (J) étant évidemment l'intersection d'un nombre fini des idéaux comme (K), en vertu du *corollaire de Cartan*, il suffit de légitimer la proposition pour (K).

Soit (K_1) la projection de (I) sur l'espace $(x, y_1, \ldots\ldots, y_{m-1})$ par rapport à $(\varDelta, \varDelta')$. Si la proposition est vraie pour ce cas, elle est évidemment, aussi vraie pour (K). Supposons donc, que $m=1$, et désignons y_1 par y, $\varDelta'$ est alors un cercle. Nous allons constater dans ces circonstance que (K) ait une pseudobase en (x^0).

L'idéal (I), ayant une pseudobase en tout point au voisinage de $(\varDelta, \varDelta')$, possède une pseudobase globale au voisinage de $(\varDelta, \varDelta')$, *d'après le théorèms* 3 *du Memoire* VII, que nous désignerons par $(F, \Phi_1, \ldots\ldots, \Phi_p)$. L'ensemble des zéros communs de ces fonctions holomorphes coïncide nécessairement à Σ. Nous pouvons supposer donc, que $F(x^0, y) \not\equiv 0$, puisque, si non, l'une des $\Phi_i (i=1, 2, \ldots\ldots, p)$ doit l'être. Nous pouvons encore supposer que l'équation $F(x^0, y)=0$ n'ait pas de racine sur la frontière de $\varDelta'$, puisqu'il en est ainsi pour Σ ; diminuons la mesure de $\varDelta$ pour que l'on ait $F = \omega F_1$ au voisinage de $(\varDelta, \varDelta')$, dont ω signifie une fonction holomorphe non nulle et F_1 un polynome de y tel que les coefficients soient des fonctions holomorphes de (x) au voisinage de $\varDelta$, et que celui de la plus haute puissance soit 1, et encore que pour tout (x) au voisinage de $\varDelta$ l'équation $F_1=0$ n'ait de racines que dans $\varDelta'$. Supposons qu'il le soit pour F même. Soit λ le degré du polynome F; d'après *le théorème du reste*, nous pouvons supposer que $\Phi_i(i=1, 2, \ldots\ldots, p)$ soient des polynomes de $y_1<\lambda$ en degrés.

Soit (x') un point quelconque de Δ, soit $\varphi(x, y)$ un polynome de y, $\leqq 2\lambda-2$ en degrés et appartenant a (I) en tout point au voisinage de $[(x'), \Delta']$, mais d'ailleurs quelconque. Si l'on trace un polycylindre δ suffisamment petit autour de (x'), on a $\varphi\equiv 0$ mod (F, Φ) en tout point au voisinage de (δ, Δ'), par suite, d'après *le théorème* 1 *du Mémoire* VII, φ s'exprime de la forme,

$$\varphi=C_0F+C_1F_1+\ldots\ldots+C_pF_p,$$

$C_i(i=0, 1, \ldots\ldots, p)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de (δ, Δ'). D'après le théorème du reste, on peut choisir pour $C_i(j=1, 2, \ldots\ldots, p)$ des polynomes de y de degrés $\leqq\lambda-1$. Nous disons que C_0 est alors, aussi un polnome de y. En effet, on a $C_0=\Psi/F$, Ψ étant un polynome de y dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de (x) au voisinage de δ pour tout (x') au voisinage de δ, l'équation $F=0$ n'a de racine que dans Δ' ; et C_0 est holomorphe au voisinage de (δ, Δ'). D'un autre côté, soit $a(x)$ le coefficient de la plus haute puissance de y de Ψ et soit $\eta(x)$ une quelconque des racines de l'équation $\Psi=0$ par rapport à y, la fonction analytique $a(x)\cdot\eta(x)$ n'admet de point singulier que des points critiques au voisinage de δ. De là, il s'ensuit que C_0 est un polynome de y, par suite, de degrés $\leqq\lambda-2$.

Nous avons ainsi vu que toute fonction $\varphi(x, y)$ qui est un polynome de y de degrés $\leqq 2\lambda-2$ et qui appartenant à (I) en tout point au voisinage de $[(x'), \Delta']$, peut être représente de la forme cidessus, dont C_0, $C_1, \ldots\ldots, C_p$ jouissent des propriétés indiqués. La réciproque est évidemment, aussi vraie. Posons

$$F=y^\lambda+A_1y^{\lambda-1}+\ldots+A_\lambda,\quad \Phi_i=A_{i1}y^{\lambda-1}+\ldots+A_{i\lambda}\quad (i=1, 2, \ldots, p),$$
$$C_0=u_2y^{\lambda-2}+\ldots\ldots+u_\lambda,\qquad C_i=u_{i1}y^{\lambda-1}+\ldots\ldots+u_{i\lambda}$$
$$\varphi=B_0y^{2\lambda-2}+\ldots\ldots+B_{2\lambda-2};$$

la condition nécessaire et suffisante est alors, équivalente à dire que

$$B_0=u_2+\sum A_{i1}u_{i1},\ \ldots\ldots,\ B_{2\lambda-2}=u_\lambda A_\lambda+\sum u_{i\lambda}A_{i\lambda}\quad (i=1, 2, \ldots\ldots, p)$$

Comme cas spécial, la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $f(x) \in (K')$ en (x') est que f satisfasse en (x') avec (u) le système d'équations fonctionnelles simultanées

$$u_2 + \sum u_{i1} A_{i1} = 0, \ \ldots\ldots, \ f = u_\lambda A_\lambda + \sum u_{i\lambda} A_{i\lambda} \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, p)$$

dont (x') est un point quelconque de Δ, et A_j, A_{ij} $(j = 1, 2, \ldots\ldots, \lambda)$ sont des fonctions holomorphes données dans Δ. L'idéal (K'), étant ainsi équivalent à un idéal (L), possède une pseudobase en (x^0). C. Q. F. D.

(À suivre)