Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May. 1951.

Quelques Principes dans la Théorie Descriptive des Ensembles

Motokiti KONDÔ

Comme on sait bien, la plnpart des résultats dans la théorie descriptive des ensembles s'étend toujours sur les deux directions distinctes. L'une de celles-ci est dans la théorie relative des ensembles et l'autre est dans la théorie abstraite des ensembles.

Or, la plupart de ceux-ci n'est pas essentiellement neuve, et nous pouvons donner quelpues principes qui conduisent telle relativisation et telle abstraction. Le but de cette note est de discuter quelques principes sur telle abstraction. Les principes considérés ici sont très simple, mais très utile et nous pouvons déduire aisément plusieurs résultats sur l'abstraction de la théorie descriptive des ensembles.

§ 1. L'effectivité dénombrable.

1. Nous commençons par quelques définitions. Soient R un ensemble de quelques éléments et $\mathfrak{F}$ une famille des sous-ensembles de R. Alors, nous dirons qu'un sous-ensemble E de R est *effectif dénombrablement* par rapport a $\mathfrak{F}$, s'il existe une opération analytique[1] $\Phi(X_n)$ des ensembles et une suite $\{E_n\}$ $(n=1,2,\dots)$ des éléments de $\mathfrak{F}$ tels qu'on ait

$$E=\Phi(E_n),$$

et de plus, si nous pouvons choisir $\Phi(X_n)$ de manière qu'elle est positive[2] nous dirons que E est *effectif positivement.* Puis, nous désignons par $\bar{\mathfrak{F}}$ la famille des ensembles effectifs dénombralement par rapport à $\mathfrak{F}$. Nous avons alors

$$\mathfrak{F}\subseteqq\bar{\mathfrak{F}}, \tag{1.2}$$

$$\mathfrak{F}\subseteqq\mathfrak{G} \text{ entraîne } \bar{\mathfrak{F}}\subseteqq\bar{\mathfrak{G}} \tag{1.3}$$

$$\bar{\bar{\mathfrak{F}}}=\bar{\mathfrak{F}}, \tag{1.4}$$

$$\mathfrak{F}_A\subseteqq\bar{\mathfrak{F}}^{3)}. \tag{1.5}$$

1) L. Kantrovitch et E. Livenson, Memoir on the analytical opérations and projective sets, I. Fund. Math., t XVIII, 1932.

2) L. Kantrovitch et E, Livenson, loc. cit., (1).

3) $\mathfrak{F}_A$ désigne la famille des ensembles obtenus en effectuant l'opération (A) sur les éléments de $\mathfrak{F}$.

En effet, nous avons sans peine (1.2),(1.3) et (1.5) d'après la définition. Puis, soit E un élément de $\mathfrak{F}$. Il existe alors une opération analytique $\Phi_0(X_n)$ des ensembles et les éléments $E_n(n=1,2,\ldots)$ de $\bar{\mathfrak{F}}$ tels que $E=\Phi_0(E_n)$, et par suite les opérations analytiques $\Phi_n(X_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ des ensembles et les éléments E_n $(n, m=1,2,\ldots)$ de $\mathfrak{F}$ tels que $E_n=\Phi_n(F_{nm})$ $(n=1,2,\ldots)$. Or, d'après un théorème[4] de MM. L. Kantorovitch et E. Livenson, l'opération

$$\Phi(X_n)=\Phi_0(\Phi_n(X_{nm})), \tag{1.6}$$

où $X_{nm}=X_{2^n(2m+1)}$ $(n, m=1,2,\ldots)$, est analytique et $E=\Phi(E_n)$, où $E_{nm}=E_{2^n(2m+1)}$ $(n, m=1,2,\ldots)$. Donc, nous avons $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}\subseteq\overline{\mathfrak{F}}$. En autre part, nous avons $\overline{\mathfrak{F}}\subseteq\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ d'après (1.2) et d'oú, nous avons (1.4).

2. Maintenant, nous supposons que $\mathfrak{F}$ couvrirait R, c'est-à-dire, $R=\sum_{U\in\mathfrak{F}} U$. Alors, si nous entendrons par un *voisinage* d'un élément x de R une partie commune d'un nombre fini des éléments de $\mathfrak{F}$ qui contient x, R est un espace topologique et quasi-accessible[5] par rapport aux voisinages ainsi obtenus. Nous appelons cette topologie celle par rapport à $\mathfrak{F}$, et nous dirons qu'un sous-ensemble de R est *effctif dénombrablement* par rapport à cette topologie, s'il est ainsi par rapport à $\mathfrak{F}$.

Or, quand un sous-ensemble E de R est obtenu en effectuant itérativement $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ et $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ sur les éléments de $\mathfrak{F}$, nous appelons E un ensemble *mesurable* (B). Alors, il est effectif dénombroblement par rapport à $\mathfrak{F}$.

3. Puis, nous considérons une fonction $F(x)$ univoque et réelle sur un sous-ensemble D de R. S'il existe une suite $\{r_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ des nombres réels qui remplit:

Elle est partout dense dans l'ensemble des nombres réels, (3.1)

$$Ens\ (F(x)>r_n)\in\overline{\mathfrak{F}}\ (n=1,2,\ldots), \tag{3.2}$$

nous dirons que $F(x)$ est *effective dénombrablement au sens faible* par rapport à $\mathfrak{F}$, et si, au lieu de (4.2), elle remplit

$$Ens\ (F(x)>r_n)\in\mathfrak{F}\ (n=1,2,\ldots), \tag{3,3}$$

---

4) L. Kantrovitch et F. Livenson, loc. cit., 1).

5) Nous entendron par un espace quasi-accessible celui que chaque voisinage d'un élément est toûjours ouvert.

nous dirons que $F(x)$ est *effective dénombrablement au sens fort par rapport à* $\mathfrak{F}$.

4. Or, quand une proposition P est équivalente à celle qui concerne du nombre fini ou dénombrable des ensembles effectifs dénombrablement par rapport à $\mathfrak{F}$, nous dirons que P est *effective dénombrablement* par rapport à $\mathfrak{F}$. Par exemple, la

Proposition P: $\mathfrak{F}_{AA}=\mathfrak{F}_A$,

est équivalente à la

Proposition P'. Pour une famille $G=\{E^{m_1\, m_2 \cdots m_k}_{n_1\, n_2 \cdots n_j}\}$ $(k, j, n_j, m_k=1,2,\ldots)$ des éléments de $\mathfrak{F}$, il existe un système $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ $(k, n=1,2,\ldots)$ de M. Souslin tel que $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \in \mathfrak{G}$ $(k, n={}_k1,2,\ldots)$ et que

$$\sum_{\nu}^{\infty} \prod_{k=1} E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \sum_{\nu}^{\infty} \prod_{j=1} \Big(\sum_{\mu}^{\infty} \prod_{k=1} E^{m_1, m_2, \ldots, m_k}_{n_1, n_2, \ldots, n_j} \Big),$$

et donc, la proposition P est effective dénombralement par rapport à $\mathfrak{F}$.

Or, nous avons le

Théorème 1. *Quand une proposition P est équivalente à celle qui concerne du nombre fini ou dénombrable des fonctions effectives dénombrablement au sens faible par rapprt à $\mathfrak{F}$, la proposition P est effective dénombrablement par rapport à $\mathfrak{F}$.*

En effet, quand la proposition P est équivalente à celle Q qui concerne des fonctions $F_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ effectives dénombrablement au sens faible par rapport à $\mathfrak{F}$, il existe les suites $\{r_{nm}\}$ $(n, m=1,2,\ldots)$ de nombres réels qui remplissent (3.1) et

$$Ens\ (F_n(x)>r_{nm}) \in \mathfrak{F} \qquad (n, m=1,2,\ldots), \tag{4.2}$$

et donc, Q concerne des éléments $Ens\ (F_n(x)>r_{nm})$ $(n, m=1, 2,\ldots)$ de $\mathfrak{F}$. Par suite, la proposition P est effective dénombrablement par rapport á $\mathfrak{F}$. C. Q. F. D.

2. La fonction caractéristique.

5. Or, pour obtenir notre principe, nous employons la fonction caractéristique[6] de M. E. Szpilrajn sur la suite des ensembles. Etant donnée une suite $\mathfrak{E}=\{E_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ des éléments de $\mathfrak{F}$, nous définisons la fonction $\sigma(E, x)$ sur R comme il suit, c'est-à-dire,

---

6) E. Szpilrajn, The characteristic function of a sequence of sets and some of its applications. Fund. Math., t. XXXI, 1938.

$$\sigma(E,\ x)=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_k}+\ldots, \tag{5.1}$$

oú

$$n_k=\begin{cases} 1, & si\ x \in E_k, \\ 2, & si\ x \in E_k, \end{cases}$$

et nous l'appelons la fonction caratéristique de $\mathfrak{E}$. Nous avons alors le

Lemme 1. *$\sigma(\mathfrak{E},\ E)$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ sont fermés et ouverts en même temps par rapport à $\sigma(\mathfrak{E},\ R)$.*

En effet, $\sigma(\mathfrak{G},\ E_k)$ est l'ensemble des nombres reels (5.1) tels que $n_k=2$, et donc il est fermé et ouvert par rappoıt à $\sigma(\mathfrak{E},\ R)$. C.Q.F.D.

Théorème 2. *Quand un ensemble E appartient à $\mathfrak{E}^{\alpha}$ (ou bien $\mathfrak{E}_{\alpha}$), $\sigma(\mathfrak{E},\ E)$ est un ensemble F^{α} (ou bien G_{α}) par rapport à $\sigma(\mathfrak{E},\ R)$.*[7]

C'est une conseqıence directe du lemme 1 et de la définition.

6. Puis, quand $\mathfrak{F}$ remplit la condition

$$\mathfrak{F}_C \subseteqq \mathfrak{F}_A,^{8)} \tag{6.1}$$

nous dirons qu'elle est *kunuguienne*.[9] No:s avons alors le

Théorème 3. *Soient $\mathfrak{E}$ une famille kunuguienre et $\mathfrak{E}$ une sous-famille dénombrable de $\mathfrak{F}$. Il existe alors une sous-famille de $\tilde{\mathfrak{E}}$ qui remplit les conditions*

$$\tilde{\mathfrak{E}} \textit{ est au plus dénombrable}, \tag{6.2}$$

$$\mathfrak{E} \subseteqq \tilde{\mathfrak{E}}, \tag{6.3}$$

$$\tilde{\mathfrak{E}}_C \subseteqq \tilde{\mathfrak{E}}_A. \tag{6.4}$$

En effet, nous défiairons les sous-familles $\mathfrak{E}_n$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ de $\mathfrak{F}$ comme il suit. Nous posons d'abord $\mathfrak{E}_1=\mathfrak{E}$. Puis, nous supposons que $\mathfrak{E}_n$ soit defini et qu'elle soit au plus dénombrable. Quand nous désignons par $E^{r,k}$ $(k=1,2,\ldots)$ les éléments de $\mathfrak{E}_n$, il existe d'après la supposition les systèmes $\{E^{n,\ k}_{n_1,\ n_2,\ldots,n_j}\}$ $(j,\ n=1,\ 2,\ldots;\ k=1,\ 2,\ \ldots)$ de M. Souslin tels que $E^{n,\ k}_{n_1,\ n_2,\ldots,n_j}$ $\in \mathfrak{F}$ $(j,\ n,\ k=1,\ 2,\ldots)$ et que $R-E^{n\,k}=\sum\limits_{\nu}\prod\limits_{j=1}^{\infty} E^{n\,k}_{n_1,\ n_2,\ldots,n_i}$ $(k=1,2,\ldots)$. D'où

---

7) Pour les notations $\mathfrak{E}^{\alpha}$, $\mathfrak{E}_{\alpha}$, F^{α} et G_{α}, voir H. Hahn, Reelle Funktionen. Leipzig. 1932.

8) $\mathfrak{F}_C$ désigne la famille des complémentaires d'éléments de $\mathfrak{F}$.

nous désignons par $\mathfrak{E}_{n+1}$ la famille des éléments $E^{n,\, k}_{n_1,\, n_2, \ldots, n_j}$ $(j,\ n,\ k=1,2,\ldots)$ de $\mathfrak{F}$, et donce, d'arès l'induction mathématique, nous avons $\mathfrak{E}_n(n=1,2,\ldots)$. Or, si nous posons $\tilde{\mathfrak{E}}=\sum^{\infty}\mathfrak{E}_n$, elle remplit les conditions (6.2), (6.3) et (6.4). C. Q. F. D.

Donc, si nous désignons par $\tilde{\mathfrak{E}}_B$ la famille de éléments obtenus et effectuant itérativement $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ et $R-X$ sur les éléments de $\tilde{\mathfrak{E}}$, nous avons

$$\tilde{\mathfrak{E}}_B \subseteqq \tilde{\mathfrak{E}}_A, \tag{6.5}$$

c'est-à-dire,

Corollaire. *Pour chaque ensemble E de $\tilde{\mathfrak{E}}_B$, E et $R-E$ appartiennent à $\mathfrak{E}_A$ en même temps, et donc $\sigma(\tilde{\mathfrak{E}}, E)$ et $\sigma(\tilde{\mathfrak{E}}, R-E)$ sont analytique par rapport à $\sigma(\tilde{\mathfrak{E}}, R)$.*

7. Or, nous avons pour les opérations analytiques des ensembles le

Théorème 4. *Quand $\Phi(X_n)$ est une opération analytique et positive, nous avons*

$$\Phi(E_n)=\sigma^{-1}(\mathfrak{E},\ \Phi(\sigma(\mathfrak{E},\ E)), \tag{7.1}$$

où $\mathfrak{E}=\{E_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ *et* $E \in \mathfrak{F}(n=1,2,\ldots)$.

En effet, quand $\mathfrak{N}$ est une base de $\Phi(X_n)$, nous avons

$$\sum_{\mathfrak{B}}\prod_{k=1}^{\infty}\sigma(\mathfrak{E},\ E_{n_k})=\sum_{\mathfrak{B}}\sigma(\mathfrak{E},\ \prod_{k=1}^{\infty}E_{n_k})=\sigma(\mathfrak{E},\sum_{\mathfrak{B}}\ \prod_{k=1}^{\infty}E_{n_k}),$$

et donc, nous avons (7.1).

8. Puis, soit $f(x)$ une fonction effective dénombrablement au sens fort par rapport à $\mathfrak{F}$. Il existe alors une suite $\{r_n\}(n=1,2,\ldots)$ des nombres réels qui remplit (3.1) et (3.3). Donc, si nous posns

$$f^{\delta}(\mathfrak{E},\ x))=f(x), \tag{8.1}$$

oú $\mathfrak{E}=\{Ens\ (f(x)>r_n)\}$ $(n=1,2,\ldots)$, $f^{\delta}(x)$ est continue sur $\sigma(\mathfrak{E},\ R)$, et d'où, nous avons le

Théorème 5. *Pour une fonction $f(x)$ de $\mathfrak{S}(\mathfrak{F}^{\alpha},\ *)$ (ou bien $\mathfrak{S}(*,\ \mathfrak{F}_{\alpha})$), il existe une suite $\mathfrak{E}=\{E_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ des éléments de $\mathfrak{F}$ telle que $f^{\delta}(x)$ soit une fonction de $\mathfrak{E}$ (ou bien $\mathfrak{E}$) par rapport à $\sigma(\mathfrak{E},\ R)$.*[10]

---

9) K. Kunugui. La théorie des ensembles analytiques et les especes abstraits. Jour. Fac. Sc., Hok. Imp. Univ., ser. 1, vol. IV, 1935.

10) Pour les notations $\mathfrak{S}(\mathfrak{F}^{\alpha},\ *)$, $\mathfrak{S}(*,\ \mathfrak{F}^{\alpha})$, $\mathfrak{G}^{\alpha}$ et $\mathfrak{G}_{\alpha}$, voir H. Hahn, loc. cit., 7).

3. Les principes de l'abstraction.

9. Maintenant, nous donnons nos principes sur l'abstraction de la théorie descriptive des ensembles. Quand une proposition P est effective dénombrablement par rapport à $\mathfrak{F}$, il existe une proposition $Q=Q(E_1, E_2,...)$ qui est équivalente à P et qui concerne des éléments $E_n (n=1,2,...)$ de $\mathfrak{F}$. Or, si nous posons $E_n^\delta=\sigma(\mathfrak{E}, E_n)$ $(n=1,2,...)$, où $\mathfrak{E}=\{E_n\}(n=1,2,...)$, ils sont fermés et ouverts en même temps par rapport à $\sigma(\mathfrak{E}, R)$, et

$$Q^\delta=Q(E_1^\delta,E_2^\delta,...) \tag{9.1}$$

est une proposition obtenue en effectuant l'opération $\sigma(E, x)$ sur Q.

Ici, si Q^δ est démontrée en employant seulement les ensembles $E_n^\delta(n=1,2,...)$, nous pouvons transformer telle démonstration en celle de Q par l'opération $\sigma(\mathfrak{E}' x)$. Donc, si nous appelons telle démonstration de Q^δ une *démonstration analytique* de celle-ci, nous avons le

Principe I sur l'abstraction. *Une démonstration analytique de Q^δ conduit celle de P.*

Or, quand Q concerne des fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ qui sont effective dénombrablement au sens fort par rapport à $\mathfrak{F}$, la proposition

$$Q^\delta=Q(f_1^\delta, f_2^\delta,...) \tag{9.2}$$

est obtenue en effectuant l'opération $\sigma(\mathfrak{E}, x)$ sur Q, et sa démonstration, qui est donnée en employant seulement les fonctions $f_n^\delta(n=1,2,...)$ ou bien quelques ensembles obtenus de telles fonctions, est transformer en celle de Q par l'operation $\sigma(\mathfrak{E}, x)$. Donc, si nous appelons telle démonstration celle analytique de Q, nous avons le

Principe II sur l'abstraction. *Une démonstration analytique de Q^δ conduit celle de P.*

4. Les application des principes.

10. Nous envisageons d'abord quelques théorèmes sur la projection des ensembles. Soient S un espace métrique, discontinu et separable, et $\mathfrak{F}$ une famille des sous-ensembles de R telle que $R=\sum F$. Alors, en désignant par F la famille des sommes directes $E\oplus U$, oú E est un élément de $\mathfrak{F}_\sigma$ et U est un ensemble ouvert et fermé de S, nous prenons la somme directe topologique $S\oplus R$ par rapport à $\mathfrak{F}$. Pour un ensemble fermé E de $S\oplus R$, la projection de E sur R appartient *à* $\Phi(\mathfrak{F})$, oú $\Phi(X_n)$ est une opération généralisée de Souslin dont la base est homéomorphique à S. En effet, nous avons

$$\sigma(\mathfrak{E},E)=F(S\oplus\sigma(\mathfrak{E},R)), \qquad (10.1)$$

où F est un sous-ensemble fermé de $S\oplus L$ et $\mathfrak{E}$ est une suite infine des éléments de $\mathfrak{F}$ telle que $E \in \mathfrak{E}$ et donc, nous avons $\mathrm{Proj}_R\ (E) \in \Phi(\mathfrak{F})$. Inversement, il est evident que tout ensemble de $\Phi(\mathfrak{F})$ est donné par telle manière. Nous avons donc le

Théorème 6. *Soient $\mathfrak{F}$ une famille des sous-ensembles de R telle que $\mathfrak{F}_\delta=\mathfrak{F}$ et S un espace métrique, discontinu et séparable. Alors, la projection d'un ensemble fermé et effectif dénombrablement de $S\oplus R$ sur R appartient à $\Phi(\mathfrak{F})$, où $\Phi(X_n)$ est une opération généralisée de Souslin dont la base est homéomorphique à S, et tout ensemble de $\Phi(\mathfrak{F})$ est obtinu aussi par telle manière.*

Corollaire. *Pour un espace S métrique, complet et séparable, la projection d'un ensemble mesurable (B) et effectif dénombrablement de $S\oplus R$ sur R est un ensemble analytique par rapport à $\mathfrak{F}$.*[11]

11. Puis, nous considérons quelques théorèmes sur la séparation des ensembles. Soit $\mathfrak{F}$ une famille kunugienne des sous-ensembles de R. Alors, pour deux éléments E et F de $\mathfrak{F}_A$ les ensembles

$$E^o=\sigma(\mathfrak{E},\ E) \text{ et } F^o=\sigma(\mathfrak{E},\ \mathfrak{F}), \qquad (11.1)$$

où $\mathfrak{E}$ est ene suite infine des éléments de $\mathfrak{F}$ telle que E et F appartiennent à $\mathfrak{E}_A$, sont analytixues par rapport à $\sigma(\mathfrak{E},\ R)$ et donc, il existe les ensembles analytiques E et F tels qu'on ait $E=E^0\ \sigma(\mathfrak{E},\ R)$ et $F=F^0\ \sigma(\mathfrak{E},R)$. Or, il existe les ensembles mesurables (B) G^0 et H^0 tels qu'on ait

$$E^0-F^0\subseteqq G^0,\ F^0-E^0\subseteqq H^0 \text{ et } G^0H^0=0. \qquad (11.2)$$

D'où, si nous posons $G=\sigma^{-1}(\mathfrak{E},\ G^0\sigma(\mathfrak{E},\ R))$ et $H=\sigma^{-1}(\mathfrak{E},\ H^0\ \sigma(\mathfrak{E},\ R))$, nous avons

$$E-F\subseteqq G,\ F-E\subseteqq H \text{ et } GH=0. \qquad (11.3)$$

Or, puisque G et H sont mesurable (B) et que $\mathfrak{F}$ est kunuguienne G et H appartiennent à $\mathfrak{F}_A$ et $\mathfrak{F}_{AC}$ en même temps d'après le théorème 3. Donc, nous avons le

Théorème 7. *Soit $\mathfrak{F}$ une famille kunuguienne des sous-ensembles de R,*

11) K. Kunugui, loc. cit., 9).

Alors, pour deux éléments E et F de $\mathfrak{F}_A$, il existe les ensembles G et H tels qu'on ait (11.3) *et que G et H appartiennent à $\mathfrak{F}_A$ et $\mathfrak{F}_{AC}$ en meme temps.*[12]

De même, au grâce d'un théorème[13] de M. C. Kuratowski sur la reduction, nous avons le

Théorème 8. *Soit $\mathfrak{F}$ une famille kunuguienne des sous-ensembles de R. Alors, pour deux éléments E et F de $\mathfrak{F}_A$ tels qu'on ait $EF=0$, il existe les ensembles G et H tels qu'on ait*

$$E \subseteqq G, \ F \subseteqq H \text{ et } GH=0, \tag{11.4}$$

et qu'ils appartiennent à $\mathfrak{F}_A$ et $\mathfrak{F}_{AC}$ en même temps.

12. De même, au grâce des théorèmes 2 et 5, nous pouvons discuter la structure des fonctions de R. Baire sur une famille des ensembles. Par exemple, nous avons le

Théorème 9. *Soit $\mathfrak{F}$ un anneau des sous-ensembles de R tel que* 0 *et R appartiennent à $\mathfrak{F}$ en même temps. Alors, pour qu'une fonction $f(x)$ sur R appartient à $\mathfrak{S}(\mathfrak{F}, *)^\alpha$ (ou bien $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{F})_\alpha$), il faut et il suffit que Ens $(f(x) > r)$ (ou bien Ens $(f(x) < r)$) appartient à $\mathfrak{F}^\alpha$ (ou bien $\mathfrak{F}_\alpha$) pour tout nombre réel r.*

---

12) K. Kunugui, loc. cit., 9).

13) C. Kuratowski, Sur les théoremes de séparation dans la théorie des ensembles. Fund. Math., t. XXVI, 1936.