Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 1, No. 3, May, 1951.

Über kommutative Ringe, in denen jedes Ideal als Produkt von Primidealen darstellbar ist

Keizo ASANO

Wir verstehen in diesem Note unter dem Ring stets einen kommutativen Ring mit dem Einsement. Ein Integritätsbereich mit dem Teilerkettensatz, in welchem die klassische Dedekind-Noethersche Idealtheorie gilt, heisst Dedekindsch. K. Kubo[1] hat bewiesen, dass ein Ring, in dem jedes von Null- und Einheitsideal verschiedene Ideal als Produkt von Primidealen eindeutig darstellbar ist, ein Dedekindscher Integritätsbereich oder ein primärer einreihiger Ring ist. K. Matusita[2] zeigte, dass im Falle des Integritätsbereiches die Eindeutigkeit entbehrlich ist, also dass ein Integritätsbereich, in dem jedes Ideal sich als Produkt von Primidealen darstellen lässt, Dedekindsch ist. Schliesslich hat Y. Akizuki[3] bewiesen, dass ein Ring, in dem jedes Ideal als Produkt von Primidealen darstellbar ist, eine direkte Summe von endlich vielen Dedekindschen Integritätsbereichen und primären einreihigen Ringen ist. Wir werden in § 1 einen Beweis davon angeben. Ein Dedekindscher Integritätsbereich wird bekanntlich durch die drei Eigenschaften, nämlich die Ganzabgeschlossenheit, den Teilerkettensatz und die Teilerlosigkeit der Primideale charakterisiert. Man kann dabei die Ganzabgeschloseenheit durch die von M. Sono herrührende Bedingung ersetzen, dass kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ existiert. Es gilt sogar nach I.S. Cohen[4], dass ein Integritätsbereich mit dem Teilerkettensatz Dedekindsch ist, wenn man nur verlangt, dass es zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ für jedes teilerlose Primideal $\mathfrak{p}$ kein Ideal gibt. Wir werden allgemein in § 2 beweisen, dass ein Ring mit dem Teilerkettensatz eine direkte Summe von endlich vielen Dedekindschen Integritätsbereichen und primären Ringen ist,

1) K. Kubo, Über die Noetherschen fünf Axiome in kommutativen Ringen, Journ. of Science of Hiroshima Univ. 10(1940), S. 77-84. Vgl. auch M. Moriya u. Y. Kobayasi, Eine notwendige Bedingung für die eindeutige Primfaktorzerlegung der Ideale in einem kommutativen Ring; Eine hinreichende Bedingung für die eindeutige Primfaktorzerlegung der Ideale in einem kommutativen Ring, Proc. of Imp. Akad. Tokyo 17 (1941)

2) K. Matusita, Über ein bewertungstheoretisches Axiomensystem für die Dedekind-Noethersche Idealtheorie, Japanese Journ. of Math. 19(1944), S- 97-110.

3) Er hat seinen Beweis veröffentlicht an der Konferenz der japanischen Algebraiker in 1947, aber noch nicht publiziert. Mein Beweis ist unabhängig von seinem Beweis.

4) I. S. Cohen, Commutative rings with restricted minimum condition, Duke math. Journ. 17 (1950).

wenn es zwisehen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ für jedes teilerlose Primideal $\mathfrak{p}$ kein Ideal gibt. Daran anschliessend werden wir einige Charakterisierungen von solchen Ringen angeben. Als eine unmittelbare Folgerung davon erhalten wir den Krullschen Satz über Hauptidealringe.

§ 1. Es sei $\mathfrak{o}$ ein (kommutativer) Ring mit dem Einselement.

Hilfssatz 1. *Ist $\mathfrak{p}$ ein teilerloses Primideal von $\mathfrak{o}$ uud gibt es zwischen $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{p}^2$ kein Ideal, so gibt es zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^m$ keine Ideale ausser der Potenzen von $\mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^m$ ist ein primärer einreihiger Ring.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{p}^r$ ($\mathfrak{p}^r = \mathfrak{p}^m$, $r \leq m$). Bedeutet p ein in $\mathfrak{p}$, aber nicht in $\mathfrak{p}^2$ enthaltenes Element, so ist $\mathfrak{p} = (p, \mathfrak{p}^2)$ und folglich $\mathfrak{p}^i = (p^i, \mathfrak{p}^{i+1})$. $\mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^{i+1}$ ist als ein zyklischer $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$-Modul mit dem einfachen Modul $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ isomorph. Daraus folgt, dass $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{p} \supset \dots \supset \mathfrak{p}^r$ eine einzige Kompositionsreihe von $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^m$ bildet.

Wir nennen ein Ideal $\mathfrak{a}$ regulär, wenn aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$ $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ folgt. Z.B. ist ein von einem Nichtnullteiler erzeugtes Hauptideal regulär. Ein Produkt von regulären Idealen ist regulär und wenn umgekehrt ein Produkt von Idealen regulär, so sind die einzelnen Faktoren regulär.

Hilfssatz 2. *Ist ein reguläres Ideal $\mathfrak{a}$ als Produkt von Primidealen darstellbar, so ist die Darstellung eindeutig.*

Beweis. $$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 \dots \mathfrak{q}_s$$

seien zwei Zerlegungen von $\mathfrak{a}$. Jedes minimale Ideal unter $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r, \mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$ kommt ersichtlich auf beiden Seiten vor. Es sei $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1$ ein minimales Ideal. Dann ist $\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}_2 \dots \mathfrak{p}_s$. So fortfahrend erhält man den Satz.

Satz 1. *Ein Ring $\mathfrak{o}$, in dem jedes Ideal als Produkt von Primidealen darstellbar ist, ist eine direkte Summe von endlich vielen Dedekindschen Integritätsbereichen und primären einrehigen Ringen, und umgekehrt.*

Beweis, Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Ist $a \not\equiv 0$ ($\mathfrak{p}$), so ist $(a, \mathfrak{p})^2 = (a^2, \mathfrak{p})$. Denn ist $(a, \mathfrak{p}) = \mathfrak{o}$, so ist es klar, sonst ist $(a, \mathfrak{p})^2$ sowie $(a^2, \mathfrak{p})$ ein Produkt von $\mathfrak{p}$ enthaltenden Primidealen:

$$(a, \mathfrak{p})^2 = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r (\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{p}), \quad (a^2, \mathfrak{p}) = \mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_s \quad (\mathfrak{q}_j \supset \mathfrak{p}),$$

in $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ übergehend ist

$$(\bar{a}) = \bar{\mathfrak{p}}_1 \dots \bar{\mathfrak{p}}_r = \bar{\mathfrak{q}}_1 \dots \bar{\mathfrak{q}}_s,$$

wobei $\bar{\mathfrak{m}}$ das Bild von $\mathfrak{m}$ bei dem Homomorphismus von $\mathfrak{o}$ auf $\bar{\mathfrak{o}}$ bedeutet. Da die Primfaktorzerlegung von $(\bar{a})$ in $\bar{\mathfrak{o}}$ nach Hilfssatz 2 eindeutig ist, so sei $r=s$ und $\bar{\mathfrak{p}}_i=\mathfrak{q}_i$, $i=1,\dots,r$. Dann ist $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{q}_i$ und $(a,\ \mathfrak{p})^2=(a^2,\ \mathfrak{p})$. Aus $(a,\ \mathfrak{p})^2=(a^2,\ a\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}^2)\supset\mathfrak{p}$ folgt

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}\cap(a^2,\ a\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}^2)=((a^2)\cap\mathfrak{p},(a,\mathfrak{p})\mathfrak{p})=(a^2\mathfrak{p},\ (a,\mathfrak{p})\ \mathfrak{p})=(a,\ \mathfrak{p})\mathfrak{p}.$$

Es ist demnach $\mathfrak{a}\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{a}\supset\mathfrak{p}$ ist. Ist c ein Nichtnullteiler von $\mathfrak{o}$, so ist die Primfaktorzerlegung $(c)=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r$ eindeutig und jedes $\mathfrak{p}_i$ ist teilerlos; denn aus $\mathfrak{a}\supset\mathfrak{p}_i$ folgt $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_i=\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{a}(c)=(c)$, also $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$. Jeder Primteiler von (c) stimmt daher mit einem $\mathfrak{p}_i$ überein. Mithin ist jedes Primideal teilerlos, wenn es Nichtnullteiler enthält. Ist $\mathfrak{o}$ insbesondere ein Integritätsbereich, so ist jedes Primideal$\neq 0$ teilerlos.

Ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ nicht-teilerlos, so ist $\mathfrak{p}^2=\mathfrak{p}$. Wir nehmen jetzt an, es sei $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}^2$. Zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ gibt es dann kein Ideal. Denn ist $\mathfrak{p}\supseteqq\mathfrak{a}\supseteqq\mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r$, so ist $\mathfrak{p}_i\supseteqq\mathfrak{p}$ für jedes i und $\mathfrak{p}\supseteqq\mathfrak{p}_i$ für ein i. Mindestens ein $\mathfrak{p}_i$, etwa $\mathfrak{p}_1$, ist gleich $\mathfrak{p}$. Ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_i$ für ein $i\neq 1$, so ist ersichtlich $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}^2$, sonst ist $\mathfrak{p}_i\supset\mathfrak{p}$ $(i\neq 1)$ und $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_r=\mathfrak{p}$. Mithin ist $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ ein einfacher $\mathfrak{o}$-Modul. $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ ist also zyklisch und sein annullierendes Ideal $\mathfrak{p}'$ ist ein $\mathfrak{p}$ enthaltendes teilerloses Ideal. Weil aber aus $\mathfrak{p}'\supset\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$ folgt, ist $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}$ gegen die Voraussetzung, dass $\mathfrak{p}$ nicht-teilerlos ist.

Ist $\mathfrak{p}$ ein teilerloses Primideal von $\mathfrak{o}$, so gibt es ersichtlich kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ und der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\rho$ ist nach Hilfssatz 1 ein primärer einreihiger Ring. Ist $\mathfrak{p}$ ein nicht-teilerloses Primideal, so ist $\bar{\mathfrak{o}}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich, in welchem jedes Ideal $\bar{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}/\mathfrak{p}$ als Produkt von Primidealen $\bar{\mathfrak{p}}_i=\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}$ darstellbar ist, also Dedekindsch. Jedes Primideal ist teilerlos oder idempotent. Sind $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ verschiedene Primideale und ist weder $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{q}$ noch $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$, so ist $(\mathfrak{p},\ \mathfrak{q})=\mathfrak{o}$. Denn ist $\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{q}$ teilerlos, so ist es klar, sonst sind $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ idempotent, mithin ist $(\mathfrak{p},\ \mathfrak{q})$ auch idempotent. Weil aber $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ Dedekindsch ist und ausser sich selbst und Null kein idempotentes Ideal besitzt, ist $(\mathfrak{p},\ \mathfrak{q})/\mathfrak{p}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$, also $(\mathfrak{p},\ \mathfrak{q})=\mathfrak{o}$. Es sei

$$(0)=\mathfrak{p}_1^{\rho_1}\cdots\mathfrak{p}_r^{\rho_r}\mathfrak{q}_1\cdots\mathfrak{q}_s$$

eine Darstellung von (0) als Produkt von Primidealen, dessen Primfaktorenanzahl $m=\sum\rho_i+s$ minimal ist, wobei $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r$ bzw. $\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_s$ verschiedene teilerlose bzw. nicht-teilerlose (also idempotente) Primideale bedeuten. Ist $\mathfrak{p}_i\supset\mathfrak{q}_j$, so ist $\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{q}_j=\mathfrak{q}_j$ gegen die Minimaleigenschaft von m. Die Ideale $\mathfrak{p}_1^{\rho_1},\dots,\mathfrak{p}_r^{\rho_r}$, $\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_s$ sind also einander teilerfremd und $\mathfrak{o}$ ist mit der direkten Summe von primären einreihigen Ringen $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i^{\rho_i}$ und Dedekindschen Integritätsbereichen $\mathfrak{o}/\mathfrak{q}_j$ isomorph:

$$\mathfrak{o} \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_1^{\rho_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{o}/\mathfrak{p}_r^{\rho_r} \oplus \mathfrak{o}/\mathfrak{q}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{o}/\mathfrak{q}_s.$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{o}=\mathfrak{o}_1+\dots+\mathfrak{o}_n$ eine direkte Summe von Dedekindschen Integritätsbereichen und primären einreihigen Ringen, so wird jedes Primideal von $\mathfrak{o}$ in der Form

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{o}_1+\dots+\mathfrak{o}_{i-1}+\mathfrak{p}_i+\mathfrak{o}_{i+1}\dots+\mathfrak{o}_n$$

dargestellt, wo $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_i$ ist. Da jedes Ideal $\mathfrak{a}_i$ von $\mathfrak{o}_i$ als Produkt von Primidealen von $\mathfrak{o}_i$ darstellbar ist, ist jedes Ideal $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1+\dots+\mathfrak{a}_n$ von $\mathfrak{o}$ als Produkt von Primidealen von $\mathfrak{o}$ darstellbar.

Korollar. *Dafür, dass jedes von $\mathfrak{o}$ und Null verschiedene Ideal von $\mathfrak{o}$ als Produkt von Primideadelen eindeutig darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass $\mathfrak{o}$ ein Dedekindscher Integritätsbereich oder ein primärer einreihiger Ring ist.*

Ein Integritätsbereich, in dem jedes Primideal $\neq 0$ umkehrbar ist, ist nach N. Nakano[5] Dedekindsch. Als eine Verallgemeinerung gilt der folgende

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{o}$ ein Ring von den folgenden Eigenschaften:*

1. $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}$ *bedeutet für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}\mathfrak{a}'$, *wo* $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ *Ideale sind.*
2. (0) *ist als ein Produkt von Primidealen darstellbar.*

Dann ist $\mathfrak{o}$ eine direkte Summe von endlich vielen Dedekindschen Integriätsbereichen und primären einreihigen Ringen.

Beweis. Ist $\mathfrak{p}$ ein teilerloses Primideal, so gibt es zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ kein Ideal. Denn aus $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{p}^2$ folgt $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}'=(\mathfrak{a}:\mathfrak{p})\supseteq\mathfrak{p}$, also ist $\mathfrak{a}'=\mathfrak{o}$ oder $\mathfrak{a}'=\mathfrak{p}$. Der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^\rho$ ist demnach ein primärer einreihiger Ring. Ist $\mathfrak{o}$ ein Integritätsbereich, so ist jedes von Null verschiedene Primideal von $\mathfrak{o}$ umkehrbar und $\mathfrak{o}$ ist Dedekindsch. Jetzt sei $\mathfrak{p}$ ein nichtteilerloses Primideal. $\bar{\mathfrak{o}}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ist dann ein Dedekindscher Integritätsbereich. Jedes Primideal $\mathfrak{p}'$ mit $\mathfrak{o}\supset\mathfrak{p}'\supset\mathfrak{p}$ ist teilerlos und gilt $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$, denn es ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}'\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}\equiv 0\ (\mathfrak{q})$, andererseits ist $\mathfrak{p}$ prim und $\mathfrak{p}'\not\equiv 0(\mathfrak{p})$, folglich $\mathfrak{q}\equiv 0(\mathfrak{p})$, also $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$. Weil für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{o}\supset\mathfrak{a}\supset\mathfrak{p}$

$$\bar{\mathfrak{a}}=\bar{\mathfrak{p}}_1^{\rho_1}\dots\bar{\mathfrak{p}}_r^{\rho_r}, \quad \bar{\mathfrak{p}}_i=\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p},$$

ist, so ist $\mathfrak{a}=(\mathfrak{p}_1^{\rho_1}\dots\mathfrak{p}_r^{\rho_r}, \mathfrak{p})$ und wegen $\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$ $(i=1,\dots,r)$ gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$. Aus $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{p}^2$ folgt $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}\mathfrak{a}'$ $(\mathfrak{a}'\supseteq\mathfrak{p})$, also entweder $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}^2$. Wäre $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}^2$, so wäre $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ wie beim Beweis von Satz 1 ein einfacher $\mathfrak{o}$-Modul,

5) N. Nakano, Über die Umkehrbarkeit der Ideale im Integritätsbereihe, Proc. of Imp. Acad. Tokyo, 19(1943), S. 230–234.

und $\mathfrak{p}$ wäre teilerlos. Es muss also $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ sein. Jedes Primideal von $\mathfrak{o}$ ist teilerlos oder idempotent. Man kann also wie bei Satz 1 den Satz beweisen.

§ 2. Zunächst schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 3. *Ist ein idempotentes Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{o}$ *von endlich vielen Elementen erzeugt, so ist* $\mathfrak{a}$ *von einem Idempotent erzeugt.*[6]

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}=(u_1,\dots,u_n)$, dann ist $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^2=(\mathfrak{a}u_1,\dots,\mathfrak{a}u_n)$, also

$$u_i=a_{i1}u_1+a_{i2}u_2+\dots+a_{in}u_n \quad (a_{ik}\in\mathfrak{a}),$$

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12}\dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2}\dots & 1-a_{nn} \end{vmatrix} = 1-e \qquad (e\in\mathfrak{a})$$

und $(1-e)u_i=0$, $u_i=eu_i$, $i=1,\dots,n$. Da $\mathfrak{a}$ von $u_1,\dots, u_n$ erzeugt ist, so ist e das Einselement von $\mathfrak{a}$ (als Ring betrachtet). e ist ein Idempotent und $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}e$.

Dieser Satz gilt auch ohne die Existenz des Einselements von $\mathfrak{o}$ vorauszusetzen. Denkt man nämlich die Paare (m, a), m ganz rational, $a\in\mathfrak{o}$, und definiert man

$$(m, a)+(n, b)=(m+n, a+b),$$
$$(m, a)(n, b)=(mn, na+mb+ab),$$

so bildet die Gesamtheit von (m, a) einen Ring $\mathfrak{o}'$ mit Einselment, der ein Erweiterungsring von $\mathfrak{o}$ ist, wenn man a und $(0, a)$ identifiziert, und jedes Ideal von $\mathfrak{o}$ ist ein Ideal von $\mathfrak{o}'$.

Hilfssatz 4. *Es sei* $\mathfrak{o}$ *ein Ring mit dem Teilerkettensatz und* $\mathfrak{p}$ *sei ein teilerloses Primideal, so dass zwischen* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}^2$ *kein Ideal existiert. Dann und nur dann enthält* $\mathfrak{p}$ *ein anderes Primideal, wenn* $\mathfrak{o}\supset\mathfrak{p}\supset\mathfrak{p}^2\supset\dots(\mathfrak{p}^i\neq\mathfrak{p}^{i+1})$ *ist. Ist dies der Fall, so ist* $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{p}^n$ *nur ein einziges in* $\mathfrak{p}$ *enthaltenes Primideal.*

Beweis. $\mathfrak{p}'$ sei ein Primideal mit. $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{p}'$, dann ist $\mathfrak{p}^n\supset\mathfrak{p}'$ $(n=1,2,\dots)$. Denn ist $\mathfrak{p}^m\supset\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}^{m+1}\not\supset\mathfrak{p}'$, so ist $(\mathfrak{p}^{m+1}, \mathfrak{p}')=\mathfrak{p}^m$, da $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{m+1}$ einreihig und $\mathfrak{p}^{m+1}\neq\mathfrak{p}'$ ist; in $\bar{\mathfrak{o}}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}'$ betrachtet ist also $\bar{\mathfrak{p}}^m=\bar{\mathfrak{p}}^{m+1}=\bar{\mathfrak{p}}^{2m}$ und $\bar{\mathfrak{p}}^m$ ist nach Hilfssatz 2 von einem Idempotent erzeugt, was der Tatsache widerspricht, dass $\bar{\mathfrak{o}}$ nullteilerfrei ist. Wie oben kann man auch beweisen, dass $\mathfrak{p}^n\neq\mathfrak{p}^{n+1}$

6) Vgl. S. Mori, Über Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind. Journ. of Science of Hiroshima Univ. 1, S. 174–175.

$(n=1,2,\ldots)$. Wir behaupten nun $\cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{p}^n=\mathfrak{p}'$. In $\bar{\mathfrak{o}}=\mathfrak{o}/\mathfrak{p}'$ übergehend kann man dabei als $\mathfrak{p}'=0$ annehmen. Es sei p ein in $\mathfrak{p}$, aber nicht in $\mathfrak{p}^2$ enthaltenes Element und sei

$$(p)=\mathfrak{q}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{q}_r$$

eine unverkürzbare Darstellung von (p) durch grösste Primärkomponenten. Mindestens ein $\mathfrak{q}_i$, etwa $\mathfrak{q}_1$, ist durch $\mathfrak{p}$ teilbar: $\mathfrak{q}_1\subseteq\mathfrak{p}$; das zugehörige Primideal $\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{q}_1$ ist dann durch $\mathfrak{p}$ teilbar: $\mathfrak{p}_1\subseteq\mathfrak{p}$. Ist $\mathfrak{p}_1\neq\mathfrak{p}$, so ist nach dem voraufgehenden $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}^2$, $(p)\subseteq\mathfrak{q}_1\subseteq\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}^2$ gegen die Voraussetzung von p, mithin $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}$. Es ist $\mathfrak{p}^\rho\subseteq\mathfrak{q}_1\subseteq\mathfrak{p}$ und wegen $p\in\mathfrak{q}_1$ ist $\mathfrak{q}_1\nsubseteq\mathfrak{p}^2$, also $\mathfrak{q}_1=\mathfrak{p}$. Die zugehörigen Primimideale $\mathfrak{p}_2,\ldots,\mathfrak{p}_r$ sind mit $\mathfrak{p}$ teilerfremd, da aus $\mathfrak{p}_i\subset\mathfrak{p}$ $p\in\mathfrak{p}_i\subset\mathfrak{p}^2$ folgt. $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_2\cap\ldots\cap\mathfrak{q}_r$ ist also mit $\mathfrak{p}$ teilerfremd. Man erhält demnach $(p)=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}=\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, d.h. $\mathfrak{p}$ ist (im Quotientenkörper von $\mathfrak{o}$ betrachtet) umkehrbar. Wäre $\cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{p}^n\neq 0$, so gäbe es ein Element $c\neq 0$ aus $\cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{p}^n$, also

$$(c)=\mathfrak{p}\mathfrak{a}_1=\mathfrak{p}^2\mathfrak{a}_2=\ldots,\quad \mathfrak{a}_1\subset\mathfrak{a}_2\subset\ldots$$

gegen den Teilerkettensatz. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Ist schliesslich $\mathfrak{o}\supset\mathfrak{p}\supset\mathfrak{p}^2\ldots$, so ist $\mathfrak{c}=\cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{p}^n$ ein Primideal. Denn aus $a\not\equiv 0\ (\mathfrak{c})$, $b\not\equiv 0\ (\mathfrak{c})$, d.h. $a\equiv 0\ (\mathfrak{p}^l)$, $a\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l+1})$, $b\equiv 0\ (\mathfrak{p}^m)$, $b\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{m+1})$ folgt

$$(a,\ \mathfrak{p}^n)=\mathfrak{p}^l\ (n>l),\ (b,\ \mathfrak{p}^n)=\mathfrak{p}^m\ (n>m),$$

also $ab\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l+m+1})$, d.h. $ab\not\equiv 0\ (\mathfrak{c})$.

Satz 3. *Gilt im Ring $\mathfrak{o}$ der Teilerkettensatz und gibt es zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ für jedes teilerlose Primideal $\mathfrak{p}$ kein Ideal, so ist $\mathfrak{o}$ eine direkte Summe von endlich vielen Dedekindschen Integritätsbereichen und primären einreihigen Ringen.*

Beweis. Ist (0) ein Primideal, d.h. ist $\mathfrak{o}$ ein Integritätsbereich, so ist jedes von Null verschiedene Primideal teilerlos und $\mathfrak{o}$ ist Dedekindsch oder ein Körper. Ist (0) ein primäres Ideal, aber nicht ein Primideal, so ist $\mathfrak{o}$ ein primärer Ring, d.h. das zugehörige Primideal $\mathfrak{p}$ von (0) nilpotent: $\mathfrak{p}^\rho=0$ $(\rho>1)$, und der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ist ein Körper. Wir nehmen jetzt an, es gebe ein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{o}\supset\mathfrak{a}\supset\mathfrak{p}$. Für ein Element $c\neq 0$ aus $\mathfrak{p}$ ist

$$\mathfrak{q}=\mathfrak{a}c\subset(c)\subseteq\mathfrak{p},\qquad c\not\equiv 0\ (\mathfrak{q}),$$

Denn wäre $c=ac$ $(a \in \mathfrak{a})$, so wäre $(1-a)c=0$, also $1-a \in \mathfrak{p}$, mithin

$$a=1-p,\ p \in \mathfrak{p},\quad a(1+p+\dots+p^{\rho-1})=1 \in \mathfrak{a},$$

also wäre $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$. Wir behaupten, dass $\mathfrak{q}$ ein primäres Ideal ist.

$$\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r \tag{1}$$

sei eine unverkürzbare Darstellung von $\mathfrak{q}$ durch grösste Primärkomponenten, dessen zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r$ sind. Mindestens ein $\mathfrak{p}_i$, etwa $\mathfrak{p}_1$, ist durch $\mathfrak{p}$ teilbar: $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}$. Da aber $0=\mathfrak{p}^{\rho} \subset \mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_i$, $i=1,\dots,r$, ist, gilt $\mathfrak{p} =\mathfrak{p}_1$. Wäre $r>1$, so wäre $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{p}$ $(i \neq 1)$, also $\mathfrak{q}_i \supseteq \mathfrak{p}_i^{\rho_i} \supset \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}_1$[7] und die Darstellung (1) würde verkürzbar sein. Damit ist $r=1$ und $\mathfrak{q}$ ist ein primäres Ideal mit dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}$. Aus

$$\mathfrak{a}(c) \equiv 0(\mathfrak{q}), \qquad (c) \not\equiv 0(\mathfrak{q})$$

folgt somit $\mathfrak{a} \equiv 0(\mathfrak{p})$. Es ergibt sich also ein Widerspruch.

Sind $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ verschiedene Primideale, von denen eines das andere nicht enthält, so ist $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})=\mathfrak{o}$. Denn ist $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \neq \mathfrak{o}$, so gibt es ein teilerloses Primideal $\mathfrak{p}_0$ mit $\mathfrak{o} \supset \mathfrak{p}_0 \supseteq (\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$. Da $\mathfrak{p}_0$ nach Hilfssatz 3 nur ein einziges Primideal enthält, so ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ gegen die Voraussetzung. Bedeutet

$$(0)=\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$$

eine unverkürbare Darstellung von (0) durch grösste Primärkomponenten, so sind die zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_r$ einander teilerfremd. Denn wäre $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_j$, so wäre $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_j^{\rho} \subseteq \mathfrak{q}_j$. $\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_r$ sind also einander teilerfremd und es ist

$$\mathfrak{o} \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{q}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{o}/\mathfrak{q}_r.$$

Der Ring $\mathfrak{o}/\mathfrak{q}_i$ genügt der Voraussetzung des Satzes und sein Nullideal ist primär. Er ist also ein primärer Ring oder ein Integritätsbereich. Damit ist der Satz bewiesen.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein teilerloses Primideal mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$. Wie leicht gezeigt wird, sind die folgenden Bedingungen einander äquivalent:[8]

---

7) Bedeutet $\mathfrak{p}'$ ein maximales $\mathfrak{p}_i$ enthaltendes Ideal, so enthält $\mathfrak{p}'$ nach Hilfssatz 4 nur ein einziges Primideal, also $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}^{n}{}_i \supset \mathfrak{p}$ $(n=1,2,\cdots)$.

8) Vgl. die in 4) zitierte Arbeit von Cohen.

1. Es gibt zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ kein Ideal.
2. $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ ist ein zyklischer $\mathfrak{o}$-Modul.
3. Aus $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{p}^2$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{a}'$.
4. Die Ideale zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ ($\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}^2$ eingeschlossen) sind total geordnet (in Bezug auf $\supseteq$).
5. Für drei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{p}^2$,

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$$

6. Für drei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{p}^2$,

$$\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}, \mathfrak{a} : \mathfrak{c})$$

Satz 4. *Ein Ring mit dem Teilerkettensatz ist eine direkte Summe von endlich vielen Dedekindschen Integritätsbereichen und primären einreihigen Ringen, wenn für jedes teilerlose Primideal $\mathfrak{p}$ eine der oben erwähnten Bedingungen gilt.*

Man erhält ohne Mühe:

Satz 5. *Gilt im Ring $\mathfrak{o}$ der Teilerkettensatz, so sind die folgenden Bedingungen einander äquivalent:*

1. *$\mathfrak{o}$ ist eine direkte Summe von endlich vielen Dedekindschen Integritätsbereichen und primären einreihigen Ringen.*
2. *Es gibt zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ für jedes teilerlose Primideal $\mathfrak{p}$ kein Ideal.*
3. *Für jedes teilerlose Primideal $\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ ein zyklischer $\mathfrak{o}$-Modul.*
4. *Jeder Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ ist ein Hauptidealring, wenn in ihm der Vielfachenkettensatz gilt.*
5. *Aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ Ideale bedeuten.*
6. *Die zu einem teilerlosen Primideal gehörigen primären Ideale sind total geordnet.*
7. *Für drei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$*

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$$

8. *Für drei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$*

$$\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}, \mathfrak{a} : \mathfrak{c})$$

Im Hauptidealring gilt natürlich der Teilerkettensatz. Man erhält nach Satz 5 (Bedingung 3) sofort den Krullschen Satz.[9]

Korollar 1. *Ein Hauptidealring ist eine direkte Summe von endlich vielen*

---

9) W. Krull, Die verschiedenen Arten der Hauptidealringe, Sitzungsberichte der Heiderberg. Akad. 6(1924).

Hauptidealintegritätsbereichen und primären einreihigen Ringen.

Korollar 2. *Gilt im Ring* $\mathfrak{o}$ *der Teilerkettensatz und ist jedes maximale Ideal ein Hauptideal, so ist* $\mathfrak{o}$ *ein Hauptidealring.*[10]

Beweis. Nach Satz 5 ist $\mathfrak{o}$ eine direkte Summe von endlich vielen Dedekindschen Integritätsbereichen und primären einreihigen Ringen: $\mathfrak{o}=\mathfrak{o}_1+\dots+\mathfrak{o}_n$. Jedes von Null verschiedene Primideal $\mathfrak{p}_i$ von $\mathfrak{o}_i$ ist teilerlos, also ein Hauptideal. Da jedes Ideal $\mathfrak{a}_i \neq 0$ von $\mathfrak{o}_i$ ein Produkt von Primidealen ist, ist $\mathfrak{a}_i$ ein Hauptideal. Demnach ist $\mathfrak{o}$ ein Hauptidealring.

---

10) I. Kaplansky, Elementary divisors and modules, Transactions of the Amer. math. Soc. 66(1949), S. 486.