Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

Über den Kommutator der Matrizen

Kenjiro SHODA

In einer früheren Arbeit[1] haben wir bewiesen: Eine Matrix mit der Determinante 1 in einem Körper K lässt sich als Kommutator zweier Matrizen in K darstellen, wenn K unendlich viele Element enthält und, wenn K die Eigenwerte der Matrix enthält. Eine Matrix mit der Determinante 1 in einem reell-abgeschlossenen Körper K lässt sich als Produkt zweier Kommutatoren in K darstellen. In der vorliegenden Note nehmen wir nur an, daß der Grundkörper K unendlich viele Elemente enthält und wir beweisen den folgenden Satz, der die oben angegebenen beiden Sätze enthält.

Satz 1. *Ist die Determinant einer Matrix A in einem Körper K gleich 1, so lässt sich A als das Produkt von N Kommutatoren darstellen, wo N das Maximum der Grade der Eigenwerte von A bedeutet.*

Ein irreduzibles Polynom heisst *zyklischartig*, wenn es separabel, galoissch ist und, wenn ein Wurzel α als Quotient $\alpha=\beta/\beta'$ zweier konjugierten Elemente β, β' aus $K(\alpha)$ darstellbar ist. Dann ist der Norm von α ersichtlich gleich 1.

Wir beweisen zunächst

Hilfssatz. *Ist die charakteristische Determinante einer Matrix A in K zyklischartig, so lässt sich A als ein Kommutator zweier Matrizen in K darstellen.*

Wir nehmen an, daß A schon die Normalform

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

hat. Man setze

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad A_0=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

1) K. Shoda, Einige Sätze über Matrizen, Jap. Journal of Math. **13** (1937), 361–365.

wo $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ die Eigenwerte von A bedeuten. Dann ersieht man leicht

$$AT = TA_0$$

Es seien $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ die Elemente der galoisschen Gruppe von $K(\alpha)$ und zwar $\alpha_i = \alpha^{\sigma_i}$, $\alpha = \alpha^{\sigma_1}$. Nach der Voraussetzung gibt es Polynome $g(x)$, $h(x)$ und einen Automorphismus σ derart, daß

$$\alpha g(\alpha) = g(\alpha^\sigma), \quad \alpha^\sigma = h(\alpha)$$

Dann sind

$$\alpha^{\sigma_i} g(\alpha^{\sigma_i}) = g(a^{\sigma_i \sigma}), \quad \alpha^{\sigma_i \sigma} = h(\alpha^{\sigma_i})$$

also erhält man eine Permutation von den σ_i, die durch die Matrix P dargestellt werden mag. Ist B_0 die Diagonalmatrix mit den Elementen $g(\alpha^{\sigma_i})$, so ist

$$A_0 B_0 = P B_0 P^{-1}, \quad \text{also} \quad A_0 = P B_0 P^{-1} B_0^{-1}$$

Zum Beweis des Hilfssatzes genügt es nur zu zeigen, daß TPT^{-1} und TBT^{-1} in K liegen. Wenn man die aus den Koeffizienten von

$$1 = 1, \quad \alpha^{\sigma^{-1}} = h_1(\alpha), \quad \alpha^{2\sigma^{-1}} = h_2(\alpha), \quad \cdots, \quad \alpha^{(n-1)\sigma^{-1}} = h_{n-1}(\alpha)$$

gebildete Matrix mit R bezeichnet, so ist ersichtlich $TP = RT$. Daher liegt TPT^{-1} in K. Bezeichnet man die aus den Koeffizienten von

$$g(\alpha), \quad \alpha g(\alpha), \quad \cdots, \quad \alpha^{n-1} g(\alpha)$$

gebildete Matrix mit C, so ersieht man leicht $TB_0 = CT$. Also liegt $TB_0 T^{-1}$ in K. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir betrachten nun eine beliebige Matrix A im Körper K. A ist bekanntlich einer Matrix von der Form

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

ähnlich, wo die charakteristische Determinante von A_i eine Potenz eines irreduziblen Polynoms

$$\varphi(x) = x^n - a_n x^{n-1} - \cdots - a_1 \ (\neq x)$$

ist. Sind $\alpha, \cdots, \alpha_n$ die Wurzeln von $\varphi(x) = 0$, so lässt sich A in der Form

$$A_i = F \times \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

darstellen. Also ist A_i zu

$$F\times A^{(0)}=F\times\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

ähnlich. Setzt man

$$A^{(0)}=C^{(0)}B^{(0)}=\begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} & & & \\ & \frac{1}{c_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{c_n} \end{pmatrix}$$

wobei

$$\prod_{i=1}^{n} c_i=|A^{(0)}|^{-1}$$

ist, so ist $B^{(0)}$, wie man leicht ausrechnen kann, zu

$$B^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1a_1 & d_2a_2 & d_3a_3 & \cdots & d_na_n \end{pmatrix}$$

ähnlich, wobei

$$c_1\cdots c_n=d_1,\quad c_2\cdots c_n=d_2,\quad \cdots,\quad c_n=d_n$$

sind. Daher lässt sich die vorgegebene Matrix A als das Propukt CB darstellen, wo C aus den Bestandteile $F\times C^{(0)}$ besteht, deren Eigenwerte sämtlich in K liegen. Die Determinante von A sei jetzt gleich 1. Da die Determinante von B gleich 1 ist, so gilt dasselbe auch für C. Daher ist C als ein Kommutator darstellbar.

Die Matrix B besteht aus den Bestandteile B^*. Wenn mindestens ein a_i, $1<i\leq n$, von Null verschieden ist, so kann man $c_1, \cdots, c_n$ so annehmen, daß die charakteristische Determinante reduzibel wird. Sind die sämtlichen a_i, $1<i\leq n$, gleich Null und ist die charakteristische Determinante x^n+1 irreduzibel, so sind ρ^{2k-1}, $k=1, \cdots, n$, die Eigenwerte, wo ρ eine primitive $2n$-te Einheitswurzel ist. Dann ist aber $\rho\left(1+\frac{1}{\rho}\right)=1+\rho$, also ist die charakteristische Determinante zyklischartig.

Da die Determinante von B gleich 1 ist, so kann man analog vorgehen. Es handelt sich wesentlich um der Reduktion des irreduziblen Polynoms

$\varphi(x)$. Nach dem Hilfssatz kann man nun ohne Mühe behaupten

Satz 2. *Die Determinant einer Matrix A sei gleich 1. Wenn die nach M-maligen oben genannten Reduktionen der irreduziblen Faktoren der charakteristischen Determinante von A erhaltende Polynome alles entweder linear oder zyklischartig sind, so lässt sich A als Produkt von $M+1$ Kommutatoren darstellen.*

Hieraus folgt Satz 1 unmittelbar, da die charakterische Determinante von B^* für $n=2$ entweder Produkt zweier linearen Faktoren oder zyklischartig ist.

Mathematisches Institut,
Osaka Universität.