Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

Über die Grundlagen der Mathematik*

Zyoiti SUETUNA

Betreffs der Grundlagen der Mathematik gibt es heute bekanntlich zwei Standpunkte, nämlich Formalismus und Intuitionismus. Um mathematische Erkenntnisse systematisch zusammenzufassen, soll man zunächst natürlich die zugrunde liegenden Axiome und die dazu gehörenden Zeichen aufstellen und danach alle Sätze daraus formallogisch herleiten. Wenn aber man radikal formalistisch denkt, so muss die mathematische Wahrheit ganz formal ohne Inhalt sein, so dass ein einziger Widerspruch, der aus dem Axiomensystem hergeleitet wird, die ganze Mathematik als sinnlos verurteilen kann. Die Beweistheorie, die die Widerspruchsfreiheit der Mathematik beweisen will, ist heute bekanntlich noch sehr weit von dem Ziele. Man muss sich überdies darüber klar sein, dass die mathematische Existenz nach diesem Standpunkt das ist, was nur widerspruchsfrei denkbar ist. Aber die Existenz von etwas folgt nicht aus seiner Denkbarkeit. Der Intuitionismus glaubt, dass die Logik die Theorie von der Darstellung der mathematischen Erkenntnisse ist, und will deshalb die Grundtatsachen der Mathematik als Grundlagen der Mathematik anerkennen. In der Tat gibt es nur deswegen Logik, weil man denkt. Das tatsächliche Denken geht der sogenannten Logik voran. Der Intuitionismus legt also grosses Gewicht auf unsere Tat und Anschauung, welche der Mathematik zugrunde liegen. Er will die Gegenstände der Mathematik auf Grund der Urintuition des Prinzips der Struktur von den natürlichen Zahlen schrittweise konstruiert wissen. Es ist ja gewiss ein grosses Verdienst der Intuitionisten, dass sie in der Mathematik grosses Gewicht auf unser Tun, Tat und Konstruktion legen. Aber sie legen darauf leider zuviel Gewicht, so dass der sogenannte Intuitionismus tatsächlich lieber „Konstruktionismus“ genannt werden solle. Trotzdem sind wir Mathematiker uns darüber klar, dass das Unendliche nie mit finiten Schritten erfasst werden kann. Der Begriff der Anschauung und Konstruktion beim Intuitionismus ist in der Tat bis heute nicht ganz klar und wir glauben nicht, dass die klassische Mathematik von diesem Standpunkt aus wohl begründet werden kann.

---

* Die vorliegende Note ist eine kurze Zusammenfassung meiner japanischen Aufsätze über die Grundlagen der Mathematik.

Die mathematischen Erkenntnisse sind natürlich auch unsere menschlichen Erkenntnisse. Ihnen liegen also unsere Taten immer zugrunde. Zum Beispiel kann Mathematik ohne den Begriff der Zuordnung nie aufgebaut werden; und die Zuordnung ist kein formaler Begriff, sondern unsere wirkliche Tat. Die menschliche Erkenntnis hat überhaupt zwei Seiten: die subjektive und die objektive. Es ist gewiss die Einseitigkeit des Formalismus, dass er die subjektive Seite unserer Erkenntnisse gänzlich ausser Acht lässt. Wir sollen klar einsehen, dass unseren wirklichen Erkenntnissen stets unsere Taten zugrunde liegen. Aber die Tat allein kann die Erkenntnisse nicht erzeugen. Damit unsere Taten eine wirkliche Erkenntnis erzeugen, müssen solche Taten gleichzeitig sämtlich auf einmal angeschaut und erfasst werden. Solche positive nicht-fiktive Anschauung soll nun eine *durch Tat bewirkte Anschauung* genannt werden. Es ist ein grosses Verdienst unseres Philosophen Nishida, dass er ganz klar erkannt hat, dass unserer wirklichen Erkenntnis unsere Taten zugrunde liegen und der wahre Grund der Erkenntnis die durch Tat bewirkte, *formende* Anschauung ist.* Wieso aber kann die Erkenntnis, der unsere subjektiven Taten zugrunde liegen, doch gerade objektiv sein? Wir müssen ja wohl anerkennen, dass es tatsächlich allgemeingültige Erkenntnisse gibt. Je mehr wir nachdenken, desto klarer ist es, dass alle tiefen Erkenntnisse aus der Besinnung und Reflexion in uns selbst entspringen. Die wirkliche sinnvolle Besinnung und Reflexion in uns aber sind unsere Besinnung und Reflexion nicht nur in uns, sondern in der ganzen Welt, die zwar wir Individuen alle zusammenbilden. Hierin liegt die Objektivität unserer Erkenntnisse, was ich doch an anderer Gelegenheit noch eingehender erörtern werde. Nun sei daran erinnert, dass auch dem Begriff des Endlichen oder Unendlichen tatsächlich unsere durch Tat bewirkte Anschauung zugrunde liegt. Nach Bolzano und Dedekind ist das Unendliche so definiert: eine Menge heisst unendlich, wenn es eine echte Teilmenge davon derart gibt, dass zwischen der gegebenen Menge und dieser Teilmenge eine ein-eindeutige elementweise Zuordnung existiert. Das Endliche ist natürlich, was nicht unendlich ist. Diese Definition enthält leider einen *circulus vitiosus*. Denn um zu entscheiden, ob eine Menge endlich oder unendlich sei, muss man alle ein-eindeutigen elementweisen Zuordnungen zwischen der gegebenen Menge und einer beliebigen Teilmenge betrachten.

* Vergl. K. Nishida, Gesammelte philosophische Werke (japanisch), Bd. 10.

Aber unter allen Zuordnungen gibt es sicherlich solche, die schon die Begriffe des Endlichen und des Unendlichen in sich enthält. In der Tat ist eine Menge dann endlich, wenn man die Elemente der Menge tatsächlich so weit wie möglich zählt und damit einsieht, dass die Elemente der Menge sämtlich ausgezählt werden.

Nunmehr denken wir an natürliche Zahlen. Die natürlichen Zahlen werden natürlich durch Addieren von 1 erzeugt. Aber aus blosser Hinzufügung von 1 entsteht die neue Zahl nicht. Um die neue Zahl x' direkt nach x zu gewinnen, muss man die Totalität der aus Hinzufügung von 1 entstandenen Gesamtheit räumlich gleichzeitig überschauen. Die natürlichen Zahlen werden in dieser Weise durch die durch Tat bewirkte formende Anschauung erzeugt. Auf Grund dieser Einsicht wird gelöst das alte Problem: welche von beiden ist das Primäre, die Kardinal- oder die Ordinalzahl? Die Ordinalzahl ist ein zeitlicher Begriff. Dagegen ist die Kardinalzahl ein räumlicher. Aber um eine neue Kardinalzahl zu gewinnen, muss man 1 hinzufügen und die daraus entstehende Totalität räumlich gleichzeitig überschauen. Beide sind von einander gänzlich verschieden; aber natürliche Zahlen sind entweder Kardinalzahlen oder Ordinalzahlen, ja sie sind vom räumlichen Standpunkt aus gesehen Kardinalzahlen und vom zeitlichen Standpunkt aus gesehen Ordinalzahlen. Sie sind wirklich von einander verschieden und trotzdem einander gleich. Solche Tatsache soll nun eine *kontradiktorische Selbst-Identität* genannt werden, ein prägnanter, von Nishida eingeführter Grundbegriff seiner Philosophie. Kardinalzahlen und Ordinalzahlen sind korrelative Begriffe; es soll nicht gefragt werden, welche von beiden das Primäre wären.*

Wenn man einer natürlichen Zahl 1 addiert, so entsteht eine neue Zahl. Wenn man dieser neuen Zahl von neuem 1 addiert, so entsteht wieder eine neue Zahl; und wir erkennen an, dass dieser Prozess ohne Ende weiter geht. Wenn wir somit die Gesamtheit dieser Prozesse räumlich gleichzeitig überschauen, so entsteht der Begriff der Totalität von den natürlichen Zahlen in natürlicher Anordnung als mathematischer Gegenstand. Vom finiten Standpunkt aus kann dieser Begriff natürlich nie erfasst werden. Aber es ist eine der Grundtatsachen der Mathematik, dass wir Mathematiker den Begriff der Totalität von den natürlichen Zahlen in natürlicher Anordnung bei uns selbst besitzen. Natürlich gibt es in der

* Vergl. hierzu P. Natorp, Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, S. 105.

naiven Welt solchen Begriff nicht. Alle mathematischen Gegenstände aber existieren im naiven Sinne gar nicht. Zum Beispiel gibt es ein mathematisches Dreieck gar nicht in der naiven Welt. Dieser Begriff wird auch durch unsere durch Tat bewirkte Anschauung geformt. Genau so wird der Begriff der Totalität von den natürlichen Zahlen in natürlicher Anordnung durch unsere durch Tat bewirkte positive Anschauung als mathematischer Gegenstand geformt. Die Menge aller natürlichen Zahlen ist derjenige abstrakte Begriff, der aus dem primären Begriff der Totalität von den natürlichen Zahlen in natürlicher Anordnung hergeleitet ist. Ich weiss leider nicht genau Bescheid darum, ob der Intuitionismus diesen Begriff anerkennt oder nicht. Immerhin führt er auch, wenn für jede beliebige natürliche Zahl n eine ganze Zahl a_n zwischen 0 und 9 nach einem gewissen Gesetz zugeordnet wird, der Dezimalbruch

$$0,\ a_1\, a_2\, a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

als mathematischen Gegenstand ein. Wir müssen unendliche Dezimalbrüche ja natürlich anerkennen; sonst würde auch die klassische Mathematik nie aufgebaut werden. Dass wir uns darüber klar sind, was eine beliebige natürliche Zahl sei, rechtfertigt schon die Einführung des Begriffs der Totalität von den natürlichen Zahlen. Eine beliebige natürliche Zahl *katexochen* ist kein blosses Individuum, sondern ein Konkret-Allgemeines im Hegelschen Sinne, das alle natürlichen Zahlen darstellt und wodurch die Totalität von den natürlichen Zahlen erfasst wird. Wenn eine beliebige Zahl nur ein bestimmtes Individuum ist, so muss sie von einer beliebigen Zahl katexochen, die, wie vorhin erklärt wurde, ein Konkret-Allgemeines ist, streng unterschieden werden. Es ist auch in der ganzen Mathematik sehr wichtig, ein beliebiges bestimmtes Element und ein beliebiges Element katexochen streng zu unterscheiden. Der Intuitionismus führt bekanntlich die sogenannte *freie Wahlfolge* ein: eine Folge von natürlichen Zahlen soll eine freie Wahlfolge genannt werden, wenn man beliebig eine erste Zahl a_1 wählt, darauf auch beliebig eine zweite a_2, dritte a_3, usf. Vermutlich erkennt der Intuitionismus solche Folge als mathematischen Gegenstand deshalb an, weil für eine beliebig bestimmte Zahl n die n-te Zahl a_n wirklich angegeben werden kann. Aber das geschieht nur, wenn n eine tatsächlich bestimmte Zahl ist. Solche Zahl n ist natürlich kein Konkret-Allgemeines, so dass der Sachverhalt bezüglich aller natürlichen Zahlen dadurch gar nicht transparent wird. Die freie Wahlfolge kann nicht, glaube ich, ein mathematischer Gegenstand sein, und ich betone an dieser Gelegenheit, dass das Unendliche durch unsere finite Tat nie erfasst wird und dass eine gewisse Art des Unendlichen durch unsere durch Tat bewirkte Anschauung als mathematischer Gegenstand geformt wird. An dieser Stelle möchte ich noch folgendes bemerken. In der symbolischen Logik stellt man das Axiom auf: wenn eine Aussage $F(x)$ für ein beliebiges x wahr ist, so ist sie wahr für alle x. Um dies Axiom giltig anzuerkennen, muss hierin beliebiges x ein konkret-allgemeines, d.h. beliebiges x katexochen sein. Und um ein beliebiges Element katexochen sinnvoll anzuerkennen, muss die Totalität der in Betracht kommenden Elemente von vornherein uns klar sein. Wenn man das Axiom der vollständigen Induktion so ausspricht: ist irgendeine beliebige Aussage bezüglich x für die Zahl 1 wahr und ist sie, falls sie von irgendeiner (bestimmten) natürlichen Zahl x gilt, auch immer noch für die nächstfolgende x' wahr, so ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen wahr, so bedeutet dies „beliebig" nicht „konkret-allgmein", sondern „beliebig bestimmt". Man soll hierin statt "irgendeine beliebige Aussage" nicht „alle Aussagen" setzen.* Wir wissen ja nicht genug, was die Totalität aller Aussagen bedeutet, so dass unsere „beliebige Aussage" keine konkret-allgemeine sein kann. Das Axiom der vollständigen Induktion ist im gewissen Sinne dasjenige Prinzip, wodurch wir alle natürlichen Zahlen als einen mathematischen Gegenstand erfassen.**

Um die reelen Zahlen einzuführen, denken wir uns einen unendlichen Dezimalbruch

$$a,\ a_1\, a_2\, a_3 \cdots\cdots\cdots$$

wobei $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ eine Folge von zwischen 0 und 9 liegenden ganzen Zahlen ist. Wir denken uns nämlich, dass für ein beliebig gegebenes n katexochen eine zwischen 0 und 9 liegende Zahl a_n nach einem gewissen Gesetz bestimmt wird. Falls wir alsdann

$$s_n = a,\ a_1\, a_2 \cdots\cdots a_n$$

schreiben, so ist sicherlich

$$s_n \leqq s_{n+1} < s_n + \frac{1}{10^n}.$$

* Vergl. z. B. Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, 2. Aufl., S. 101.

** Es ist ein wichtiges Charakteristikum der neuzeitlichen Mathematik, die Totalität von den natürlichen Zahlen als einen mathematischen Gegenstand zu begreifen.

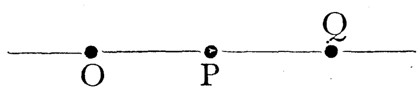
Folglich liegt s_2 auf der zugehörigen Zahlengerade im Intervall I_1 auf der rechten Seite von $s_1 = a, a_1$ von der Länge 10^{-1}, und s_3 im Intervall I_2 auf der rechten Seite von s_2 von der Länge 10^{-2}. Dabei ist I_2 gänzlich in I_1 enthalten. Im allgemeinen liegt s_{n+1} im Intervall I_n auf der rechten Seite von s_n von der Länge 10^{-n}, und I_{n+1} ist gänzlich in I_n enthalten. Wir können also gewiss anerkennen, dass die Intervalle $I_1, I_2, I_3, \cdots\cdots\cdots$ auf der Zahlengerade gegen einen bestimmten Punkt A konvergieren. Wenn wir also ein a_{n+1} hinter dem Dezimalbruch s_n hinzufügen, so wird der daraus entstehende Dezimalbruch s_{n+1} dem Punkt A etwas näher, und wir können durch Vermehrung von n den endlichen Dezimalbruch s_n dem Punkt A so nahe rücken, wie man überhaupt wünschen kann. Falls wir somit alle diese Prozesse gleichzeitig überschauen, so entsteht aus dieser durch Tat bewirkten Anschauung ein unendlicher Dezimalbruch $a, a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots\cdots$ als mathematischer Gegenstand. Dieser Begründung der reellen Zahlen liegt ja das lineare Kontinuum zugrunde. Wieso wird nun dieses Kontinuum begriffen? Das lineare Kontinuum ist ja, glaube ich, ein mathematischer Gegenstand, der aus der durch unsere Bewegung bewirkten Anschauung entsteht. Durch unsere Bewegung von einem Ort bis nach anderem Ort oder durch unsere Augenbewegung von links nach rechts oder durch Einbildung solcher Bewegungen usf. wird unsere formende Anschauung bewirkt, welche das lineare Kontinuum als mathematischen Gegenstand erfasst. Es ist nicht wahr, dass unser Denken das Kontinuum logisch konstruierte und erst durch das so begriffene Kontinuum die Bewegung erklärt würde. Gerade umgekehrt ist das Kontinuum durch unsere Bewegung erfasst. Ja die Stetigkeit muss zunächst erlebt werden, um adäquat erfasst zu werden. Borel hat in diesem Sinne ganz recht mit seiner Behauptung:* Pour avoir tous les points d'un cercle, il suffit de le tracer avec un compas: la pointe du compas passera successivement par tous ces points, sans en excepter un seul. Man denke ferner an die Tatsache, dass selbst die Zenonschen Paradoxien dann nie gelöst werden, wenn das Kontinuum durch Denken logisch aufgebaut werden sollte. Vorhin haben wir die reellen Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche eingeführt. Gestützt auch auf das lineare Kontinuum können wir natürlich die reellen Zahlen einführen durch die Dedekindschen Schnitte oder durch die Cantorschen Fundamentalfolgen oder durch die Bachmannschen Intervallschachtellungen.

* É. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, 3. Aufl., S. 3.

Immer müssen wir einen zeitlich unendlichen Prozess räumlich gleichzeitig überschauen, so dass wir nunmehr anerkennen, dass der zeitlich unendliche Prozess des Formungsprinzips der reellen Zahlen und die räumliche Lokalisierung der zugehörigen Punkte im linearen Kontinuum eine kontradiktorische Selbst-Identität bilden. Der Dedekindsche Schnitt zum Beispiel schneidet das Kontinuum in zwei Teile und zugleich verbindet beide Teile in das eine Kontinuum. Das logische Denken allein kann bloss das Entzweischneiden begreifen, aber nicht das Verbinden beider Teile. Die Begründung der reellen Zahlen gelingt uns dann erst, wenn wir die kontradiktorische Selbst-Identität des linearen Kontinuums und des Kontinuums der reellen Zahlen einsehen und dadurch die Untrennbarkeit beider Begriffe klar begreifen. Vielleicht hat der Intuitionismus deshalb die freie Wahlfolge eingeführt, weil er dadurch den Begriff einer „beliebigen reellen Zahl" zu erfassen beabsichtigte. Ich habe schon erklärt, dass dies ein unmöglicher Begriff ist. Eine beliebige reelle Zahl katexochen ist die durch einen beliebigen Punkt katexochen im linearen Kontinuum dargestellte Zahl; und dabei auch sollen wir die zwei Bedeutungen des Wortes „beliebig" streng voneinander unterscheiden.

Ich behaupte: die Mathematik, welche sich auf Grund der Totalität von den natürlichen Zahlen in natürlicher Anordnung und des linearen Kontinuums konstruieren lässt, ist die Mathematik katexochen. Wenn man darüber hinausgeht, so wird die Mathematik nur formal, d. h. gilt sie nur im Sinne der Widerspruchsfreiheit.

Was aber bedeutet die Konstruktion? Was ist ja der mathematische Gegenstand katexochen? Zunächst fragen wir uns: wieso kann man den Bruch $\frac{a}{b}$ für zwei natürliche Zahlen a, b als eine Zahl derselben Kategorie wie natürliche Zahlen auffassen? Als Begriff sind die natürliche Zahl und der Bruch streng zu unterscheiden. Nunmehr aber denken wir uns eine Zahlengerade mit dem Anfangspunkt O und einem festen Punkt P. Für einen beliebigen Bruch x gibt es natürlich einen und nur einen Punkt Q auf dieser Gerade mit $x = \frac{OQ}{OP}$. Falls x ganz ist, so ist der x darstellende Punkt Q derselbe wie der $\frac{x}{1}$ darstellende. Wenn man zwei Zahlen x und $\frac{x}{1}$ bezüglich der Begriffsbildung zeitlich betrachtet, so sind beide Zahlen gänzlich verschieden.



Wenn man dagegen solche Zahlen gleichzeitig der Grösse nach betrachtet, so sind sie beide identisch. Wir erkennen also, dass beide Zahlen in der Tat eine kontradiktorische Selbst-Identität bilden. Genau so bei reellen Zahlen, wie schon erklärt wurde.

Nunmehr sei

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

irgendeine Reihe reeller Zahlen, welche der Cauchyschen Konvergenzbedingung genügt. Zum Beispiel sei dies $0{,}999\cdots\cdots\cdots$ Schreiben wir dabei

$$s_0=0, \quad s_1=0{,}9, \quad s_2=0{,}99, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

dann ist natürlich

$$s_n=1-\frac{1}{10^n}.$$

Bei unserem Dezimalbruch $0{,}999\cdots\cdots$ ist die Stellenanzahl unendlich und ein endlicher Teil s_n ist immer etwas kleiner als der gegebene Dezimalbruch. Weil aber wir hierbei einsehen, dass bei Hinzufügung von 9 hinter s_n die neu entstehende Zahl s_{n+1} 1 näher als s_n liegt und durch Vermehrung von n s_n 1 so nahe wird, wie man nur wünschen kann, so können wir den ganzen Näherungsprozess klar überschauen. Diese durch Tat bewirkte Anschauung lässt uns aus dem finiten Standpunkt hinausgehen und somit erkennen, dass der gegebene unendliche Dezimalbruch der Zahl 1 gleich ist, und zwar im Sinne, dass beide eine kontradiktorische Selbst-Identität bilden. Dass überhaupt eine unendliche Reihe $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots$ eine Summe a besitzt:

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots=a,$$

bedeutet, dass bei diesem Gleichheitszeichen in der Tat eine kontradiktorische Selbst-Identität besteht. Nun seien wieder

$$s_0=0, \quad s_1=0{,}9, \quad s_2=0{,}99, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wie vorhin erklärt wurde, und wir denken uns die Zuordnung von n und s_n. Alsdann wird die erste transfinite Zahl ω 1 zugeordnet, d.h. ω wird damit durch den Grenzwert 1 dargestellt. Was durch etwas dargestellt wird, muss doch existieren. Wenn wir ferner

$$\begin{array}{cccc}
s_0, & s_1 & s_2, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1, & 1+\varepsilon' s_1, & 1+\varepsilon' s_2, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1+\varepsilon', & 1+\varepsilon'+\varepsilon'' s_1, & 1+\varepsilon'+\varepsilon'' s_2, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

betrachten, wobei $\varepsilon', \varepsilon'', \cdots\cdots\cdots$ positiv sind und

$$\varepsilon'+\varepsilon''+\cdots\cdots\cdots=\varepsilon_1$$

sei, so wird ω^2 durch $1+\varepsilon_1$ dargestellt. Auf ähnliche Weise wird ω^ω, wenn

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)=1+\eta_1$$

ist, durch $1+\eta_1$ dargestellt. Wenn ferner

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\eta_n)=1+\eta$$

ist, so wird die erste ε-Zahl durch $1+\eta$ dargestellt. Die transfiniten Zahlen bis der ersten ε-Zahl können wir uns also sicherlich als existierend denken, weil die Darstellung solcher Zahlen durch die durch Tat bewirkte Anschauung erfasst werden kann. Im allgemeinen behaupte ich, dass was mittels der Totalität von den natürlichen Zahlen in natürlicher Anordnung und des linearen Kontinuums durch die durch Tat bewirkte Anschauung erfasst wird, wenn auch es sich nicht durch finite Konstruktion zustande kommen lässt, ein mathematischer Gegenstand katexochen sei.

Der Intuitionismus verwirft bekanntlich den Satz des ausgeschlossenen Dritten in bezug auf unendliche Mengen, weil er das Bestehen oder das Nicht-Bestehen einer Aussage durch finite Konstruktion bewiesen wissen will. Es gibt aber in der Mathematik mehrere Fälle, wo die Möglichkeit der Entscheidung einer disjunktiven Aussage bezüglich einer unendlichen Menge durch die durch Tat bewirkte Anschauung gewiss eingesehen werden kann. Natürlichen soll dabei die Aussage in bezug auf das beliebige Element katexochen, d.h. das konkret-allgemeine Element betrachtet werden. In solchen und nur in solchen Fällen sollen wir die Gültigkeit des Satzes des ausgeschlossenen Dritten anerkennen. Zum Beispiel denken wir uns das Fermatsche Problem: es gibt zu einer beliebigen (bestimmten) ganzen Zahl $n \geqq 3$ kein System von drei natürlichen Zahlen x, y, z von der Art, dass

$$x^n+y^n=z^n$$

gilt. Ich denke mir, dass alle Mathematiker ausser Intuitionisten diese Behauptung entweder bejaht oder verneint zu werden glauben, wenn nur die Mathematik genügend Fortschritte macht. Ob aber bei einer Aufgabe sich der indirekte Beweis anwenden lässt oder nicht, hängt vom betreffenden tatsächlichen Sachverhalt ab. Wenn unsere durch Tat bewirkte Anschauung dazu ausreicht, den Satz des ausgeschlossenen Dritten dabei giltig anzuerkennen, dann erst können wir den indirekten Beweis anwenden. Dies lässt sich natürlich rein-formal nicht entscheiden.

Zum Schluss sei noch bemerkt: wenn man von einer Variable spricht, dann muss deren Bereich von vornherein klar sein; und die Variable bedeutet ein beliebiges (konkret-allgemeines) Element dieses Bereiches. Die übliche Definition der Variable ist bekanntlich nicht logisch. Eine Funktion $y=f(x)$ muss so sein, dass deren Wert tatsächlich dann bestimmt wird, wenn ein Wert der Variable x angegeben ist.

Meiner Meinung nach ist es eine der wichtigsten Aufgaben über die Grundlagen der Mathematik, uns klar zu machen, wie weit tatsächlich die mittels der Totalität von den natürlichen Zahlen in natürlicher Anordnung und des linearen Kontinuums durch die durch Tat bewirkte Anschauung erfasste Mathematik katexochen umfasst und wo die rein-formale Mathematik ohne anschaulichen Inhalt beginnt.

Tokyo, den 26. Dez., 1950.