

## Über die Quotientenbildung von Schieftringen.

Keizo ASANO.

(Received Nov. 28, 1947)

Es ist bekanntlich ein im allgemeinen noch nicht gelöstes Problem, einen nicht kommutativen Ring in einem Quotientenbereich einzubetten. In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich eine gewisse Quotientenbildung von Schieftringen untersucht. In der vorliegenden Note soll das Hauptresultat jener Arbeit etwas verallgemeinert und mit einem anderen Beweis ergänzt werden.

*Definition 1.* Es sei  $\mathfrak{o}$  ein Nichtnullteiler enthaltender Schieftring und  $\mathfrak{m}$  sei eine Halbgruppe, welche aus gewissen Nichtnullteiler von  $\mathfrak{o}$  besteht. Ein Erweiterungsring  $\mathfrak{S}$  von  $\mathfrak{o}$  heisst ein linksseitiger Quotientenring von  $\mathfrak{o}$  nach  $\mathfrak{m}$ , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\mathfrak{S}$  hat das Einselement 1.
2. Die Elemente von  $\mathfrak{m}$  sind Einheiten von  $\mathfrak{S}$ .
3. Für jedes  $x$  aus  $\mathfrak{S}$  gibt es ein  $\lambda$  aus  $\mathfrak{m}$  mit  $\lambda x \in \mathfrak{o}$ .

Jedes Element  $x$  aus  $\mathfrak{S}$  lässt sich also in der Form  $\lambda^{-1}a$  ( $\lambda \in \mathfrak{m}$ ,  $a \in \mathfrak{o}$ ) darstellen. Hat  $\mathfrak{o}$  ein linksseitiges (rechtsseitiges) Einselement  $e$ , so stimmt es mit dem Einselement 1 von  $\mathfrak{S}$  überein. Ist nämlich  $\lambda$  ein Element von  $\mathfrak{m}$ , so ist

$$e = e \cdot 1 = e \lambda \lambda^{-1} = \lambda \lambda^{-1} = 1. \quad (e = 1 \cdot e = \lambda^{-1} \lambda e = \lambda^{-1} \lambda = 1)$$

*Hilfssatz 1.* Wenn es für jedes  $\lambda \in \mathfrak{m}$  und jedes  $a \in \mathfrak{o}$  ein  $a' \in \mathfrak{o}$  und ein  $\lambda' \in \mathfrak{m}$  mit  $a' \lambda = \lambda' a$  gibt, so gibt es für endlich viele  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  aus  $\mathfrak{m}$  ein  $\mu \in \mathfrak{m}$ , so dass  $\mu = c_1 \lambda_1 = \dots = c_n \lambda_n$  ( $c_i \in \mathfrak{o}$ ).

*Beweis.* Es sei für  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  ein  $\mu'$  mit  $\mu' = c_1' \lambda_1 = \dots = c_{n-1}' \lambda_{n-1}$  gegeben. Für  $\mu'$  und  $\lambda_n$  gibt es dann ein  $\gamma \in \mathfrak{m}$  und ein  $c_n \in \mathfrak{o}$  mit  $c_n \lambda_n = \gamma \mu'$ . Es gilt also  $\mu = \gamma \mu' = c_1 \lambda_1 = \dots = c_n \lambda_n$  ( $c_i = \gamma c_i'$ ,  $i=1, \dots, n-1$ ).

*Satz 1.* Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass es einen linksseitigen Quotientenring  $\mathfrak{S}$  von  $\mathfrak{o}$  nach  $\mathfrak{m}$  gibt, ist, dass es für jedes  $\lambda \in \mathfrak{m}$  und jedes  $a \in \mathfrak{o}$  ein  $a' \in \mathfrak{o}$  und ein  $\lambda' \in \mathfrak{m}$  mit  $a' \lambda = \lambda' a$  gibt.  $\mathfrak{S}$  wird dabei

(1) K. Asano, Arithmetische Idealtheorie in nichtkommutativen Ringen, Jap. Journ. of Math. 16 (1939).

bis auf Isomorphie durch  $\mathfrak{o}$  und  $\mathfrak{m}$  eindeutig bestimmt.

Beweis. Wenn es einen Ring  $\mathfrak{S}$  gibt, so gibt es ein  $\lambda'$ , so dass  $a' = \lambda' a \lambda^{-1} e_{\mathfrak{o}}$ , also  $a' \lambda = \lambda' a$ . Bedingung des Satzes ist somit notwendig. Wir beweisen nun, dass sie auch hinreichend ist.

Ein Linksideal von  $\mathfrak{o}$  heiße regulär, wenn es Elemente von  $\mathfrak{m}$  enthält. Nach Hilfssatz 1 ist der Durchschnitt von endlich vielen regulären Linksidealn ein reguläres Linksideal. Es sei  $\mathfrak{a}$  ein reguläres Linksideal von  $\mathfrak{o}$ . Es gibt für jedes  $c \in \mathfrak{o}$  ein  $\mu \in \mathfrak{m}$ , mit  $\mu c \in \mathfrak{a}$ , da es für ein  $\lambda \in \mathfrak{a} \frown \mathfrak{m}$  ein  $\mu$  mit  $\mu c = c' \lambda$  gibt. Wir betrachten nun denjenigen Operator (d.h. Homomorphismus)  $\theta$ , welcher  $\mathfrak{a}$  in  $\mathfrak{o}$  (als  $\mathfrak{o}$ -Linksmodul)  $\mathfrak{o}$ -homomorph abbildet.  $\mathfrak{a}$  heißt dann der Definitionsbereich von  $\theta$ . Bezeichnet man das Bild von  $x \in \mathfrak{a}$  bei der Abbildung  $\theta$  mit  $x\theta$ , so ist  $(cx)\theta = c(x\theta)$  ( $c \in \mathfrak{o}$ ). Zwei Operatoren  $\theta_1, \theta_2$  mit den Definitionsbereichen  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$  heißen gleich;  $\theta_1 = \theta_2$ , wenn  $x\theta_1 = x\theta_2$  für jedes  $x \in \mathfrak{a}_1 \frown \mathfrak{a}_2$  ist. Gibt es für zwei Operatoren  $\theta_1, \theta_2$  ein  $\lambda$  aus  $\mathfrak{m}$  mit  $\lambda\theta_1 = \lambda\theta_2$ , so ist  $\theta_1 = \theta_2$ ; denn es gibt für jedes  $x \in \mathfrak{a}_1 \frown \mathfrak{a}_2$  ein  $\lambda'$  mit  $\lambda'x = x'\lambda$ , also ist  $\lambda'(x\theta_1) = x'(\lambda\theta_1) = x'(\lambda\theta_2) = \lambda'(x\theta_2)$  und folglich  $x\theta_1 = x\theta_2$ . Die so definierte Gleichheit ist offenbar reflexiv und symmetrisch; sie ist auch transitiv. Sind nämlich  $\theta_1 = \theta_2$  und  $\theta_2 = \theta_3$ , so ist für ein  $\lambda$  aus  $\mathfrak{a}_1 \frown \mathfrak{a}_2 \frown \mathfrak{a}_3 \frown \mathfrak{m}$   $\lambda\theta_1 = \lambda\theta_2 = \lambda\theta_3$ , es ist also  $\theta_1 = \theta_3$ .

Wir definieren jetzt Summe und Produkt von zwei Operatoren  $\theta_1, \theta_2$  mit den Definitionsbereichen  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$  durch

$$x(\theta_1 + \theta_2) = x\theta_1 + x\theta_2 \quad (x \in \mathfrak{a}_1 \frown \mathfrak{a}_2), \quad x(\theta_1 \theta_2) = (x\theta_1)\theta_2 \quad (x \in \mathfrak{a}_1).$$

Dabei bedeutet  $\mathfrak{a}$  das Urbild von  $\mathfrak{a}_1 \theta_1 \frown \mathfrak{a}_2$  bei der Abbildung  $\theta_1$ .  $\mathfrak{a}$  ist natürlich ein reguläres Linksideal von  $\mathfrak{o}$ ; da es für ein  $\lambda \in \mathfrak{a}_1 \frown \mathfrak{m}$  ein  $\mu \in \mathfrak{m}$  mit  $\mu(\lambda\theta_1) \in \mathfrak{a}_2$  gibt, ist  $\mu\lambda$  in  $\mathfrak{a}$  enthalten. Sind  $\theta_1 = \theta_1', \theta_2 = \theta_2'$ , so sind

$$\theta_1 + \theta_2 = \theta_1' + \theta_2', \quad \theta_1 \times \theta_2 = \theta_1' \times \theta_2'$$

Denn es gilt für ein  $\lambda$  aus  $\mathfrak{a}_1 \frown \mathfrak{a}_2 \frown \mathfrak{a}_1' \frown \mathfrak{a}_2' \frown \mathfrak{m}$  bzw. ein  $\mu$  aus  $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{a}' \frown \mathfrak{m}$

$$\lambda\theta_1 + \lambda\theta_2 = \lambda\theta_1' + \lambda\theta_2', \quad (\mu\theta_1)\theta_2 = (\mu\theta_1')\theta_2',$$

wo  $\mathfrak{a}'$  das Urbild von  $\mathfrak{a}_1' \theta_1' \frown \mathfrak{a}_2'$  bei der Abbildung  $\theta_1'$  bedeutet.

Man sieht leicht, dass die sämtlichen Operatoren durch die oben definierten Kompositionsregeln einen Schieferring  $\mathfrak{S}_0$  bilden. Ist  $c$  ein Element aus  $\mathfrak{o}$  und bedeutet  $\varphi_c$  das Element von  $\mathfrak{S}_0$ , derart dass  $x\varphi_c = xc$  ( $x \in \mathfrak{o}$ ) ist, so ist die Zuordnung  $c \rightarrow \varphi_c$  ringisomorph. Identifiziert man  $\varphi_c$  mit  $c$ ;  $\varphi_c = c$ ,

so umfasst unser Ring  $\mathfrak{S}_0$  den Ring  $\mathfrak{o}$ . Und (1)  $\mathfrak{S}_0$  enthält das Einselement 1, nämlich den Einheitsoperator; (2) da die Abbildung  $x \rightarrow x\lambda$  ( $x \in \mathfrak{o}$ ,  $x\lambda \in \mathfrak{o}$ ) für jedes  $\lambda$  aus  $\mathfrak{m}$  eineindeutig ist gibt es eine inverse Abbildung  $\theta: x\lambda \rightarrow x$ , und es gilt  $\lambda \times \theta = \varphi_\lambda \times \theta = \theta \times \varphi_\lambda = \theta \times \lambda = 1$ ; (3) für jedes  $\theta \in \mathfrak{S}_0$  ist  $\lambda \times \theta = \varphi_\lambda \times \theta = \varphi_{\lambda\theta} = \lambda\theta \in \mathfrak{o}$ , wenn  $\lambda$  ein Element aus  $\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{m}$  ist. Damit ist gezeigt, dass  $\mathfrak{S}_0$  ein linksseitiger Quotientenring von  $\mathfrak{o}$  nach  $\mathfrak{m}$  ist.

Jetzt sei  $\mathfrak{S}$  ein beliebiger linksseitiger Quotientenring von  $\mathfrak{o}$  nach  $\mathfrak{m}$  und  $c \in \mathfrak{S}$ . Bedeutet  $\mathfrak{a}$  ein reguläres Linksideal von  $\mathfrak{o}$  mit  $\mathfrak{a}c \subseteq \mathfrak{o}$  (etwa  $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\lambda$ ,  $\lambda \in \mathfrak{m}$ ,  $\lambda c \in \mathfrak{o}$ ), so definiert die Zuordnung  $x \rightarrow xc$  ( $x \in \mathfrak{a}$ ) ein Element  $\theta_c$  aus  $\mathfrak{S}_0$ ; ferner gibt es für jedes  $\theta \in \mathfrak{S}_0$  ein  $c$  aus  $\mathfrak{S}$  mit  $\theta = \theta_c$ . (Sei etwa  $c = \lambda^{-1}(\lambda\theta)$ ,  $\lambda$  ein Element aus  $\mathfrak{m}$ ; dann ist  $\lambda\theta = \lambda c = \lambda\theta_c$ ). Die Zuordnung  $c \rightarrow \theta_c$  ist ein Isomorphismus von  $\mathfrak{S}$  auf  $\mathfrak{S}_0$ .

*Satz 2.*  $\mathfrak{S}$  sei der linksseitige Quotientenring von  $\mathfrak{o}$  nach  $\mathfrak{m}$ . Zu vorgegebenen endlich vielen  $x_1, \dots, x_n$  aus  $\mathfrak{S}$  gibt es ein  $\lambda \in \mathfrak{m}$ , so dass  $\lambda x_i \in \mathfrak{o}$  ( $i=1, \dots, n$ ).

Beweis. Es sei  $\lambda_i x_i \in \mathfrak{o}$  ( $i=1, \dots, n$ ). Nach Hilfssatz 1 gibt es ein  $\lambda \in \mathfrak{m}$ , so dass  $\lambda = c_1 \lambda_1 = \dots = c_n \lambda_n$  ( $c_i \in \mathfrak{o}$ ). Es ist also  $\lambda x_i \in \mathfrak{o}$  ( $i=1, \dots, n$ ).

*Definition 2.* Besteht  $\mathfrak{m}$  in Definition 1 aus den sämtlichen Nichtnullteiler von  $\mathfrak{o}$ , so heisst  $\mathfrak{S}$  ein linksseitiger Quotientenring von  $\mathfrak{o}$ .

Jeder Nichtnullteiler von  $\mathfrak{S}$  hat dann die Form  $\lambda^{-1}\mu$  ( $\lambda, \mu \in \mathfrak{m}$ ), also ist er eine Einheit von  $\mathfrak{S}$ .

*Satz 3.* Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass es einen linksseitigen Quotientenring  $\mathfrak{S}$  von  $\mathfrak{o}$  gibt, ist, dass es für jeder Nichtnullteiler  $\lambda$  und jedes Element  $a$  aus  $\mathfrak{o}$  ein Element  $d$  und einen Nichtnullteiler  $\lambda'$  aus  $\mathfrak{o}$  mit  $d\lambda = \lambda'a$  gibt.  $\mathfrak{S}$  wird dabei bis auf Isomorphie durch  $\mathfrak{o}$  eindeutig bestimmt.

*Satz 4.* Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Schieftring ohne Nullteiler einen linksseitigen Quotientenkörper besitzt, ist, dass es für beliebige Ringelemente  $a, b$  Elemente  $d, b'$  ( $\neq 0$ ) mit  $d'a = b'b$  gibt.

*Satz 5.* Es sei  $\mathfrak{o}$  ein nullteilerfreier Schieftring mit Einselement. Ist jedes Linksideal von  $\mathfrak{o}$  ein Hauptideal, so hat  $\mathfrak{o}$  einen linksseitigen Quotientenkörper.

Beweis. Für beliebige (von Null verschiedene)  $a, b$  aus  $\mathfrak{o}$  gibt es ein Element  $d$  mit  $(\mathfrak{o}a, \mathfrak{o}b) = \mathfrak{o}d$ . Es ist also

$$a = a_1 d, \quad b = b_1 d, \quad d = pa + qb = (pa_1 + qb_1)d, \quad 1 = pa_1 + qb_1.$$

Da  $p$  oder  $q$  von Null verschieden ist, sei  $p \neq 0$ . Es ist dann

$$b_1 p a_1 = b_1 (1 - q b_1) = (1 - b_1 q) b_1, \quad b_1 p a = (1 - b_1 q) b.$$

Demnach gibt es Elemente  $a', b'$  mit  $a'a = b'b$ .

**Bemerkung.** Ebenso wie der linksseitige Quotientenring wird der rechtsseitige Quotientenring definiert. Die Existenz des rechtsseitigen Quotientenrings ist aber unabhängig von der des linksseitigen. Es sei nämlich  $K$  ein Körper, der einen mit sich selbst isomorphen Teilkörper  $K'$  enthält, und  $\sigma$  sei ein Isomorphismus von  $K$  auf  $K'$ . Bedeutet  $x$  eine Unbestimmte und definiert man durch die Relationen  $x a = a^\sigma x$  ( $a \in K, a^\sigma \in K'$ ) einen nichtkommutativen Polynombereich  $\mathfrak{o} = K[x]$ , so ist jedes Linksideal von  $\mathfrak{o}$  ein Hauptideal.  $\mathfrak{o}$  hat also den linksseitigen Quotientenring. Es gibt aber keinen rechtsseitigen Quotientenring von  $\mathfrak{o}$ . Denn es gibt keine Elemente  $y, z$  aus  $\mathfrak{o}$  mit  $(ax)y = xz$ , wenn  $a$  ein in  $K'$  nicht enthaltenes Element von  $K$  ist.

**Satz 6.** Wenn der links- sowie der rechtsseitige Quotientenring von  $\mathfrak{o}$  nach  $\mathfrak{m}$  existiert, so ist der linksseitige Quotientenring gleichzeitig der rechtsseitige.

**Beweis.**  $\mathfrak{S}$  sei der linksseitige Quotientenring von  $\mathfrak{o}$  nach  $\mathfrak{m}$  und  $x = \lambda^{-1} a$  sei ein beliebiges Element von  $\mathfrak{S}$ . Da der rechtsseitige Quotientenring von  $\mathfrak{o}$  nach  $\mathfrak{m}$  existiert, so gibt es ein Element  $a' \in \mathfrak{o}$  und ein Element  $\lambda' \in \mathfrak{m}$  mit  $a\lambda' = \lambda a'$ . Es ist also  $x\lambda' = \lambda^{-1} a\lambda' = \lambda^{-1} \lambda a' = a' \in \mathfrak{o}$ .

**Satz 7.** Es sei  $\mathfrak{o}$  ein Schieferring im Satz 1 und  $\mathfrak{S}$  sei der linksseitige Quotientenring von  $\mathfrak{o}$  nach  $\mathfrak{m}$ . Ist  $\mathfrak{M}$  ein  $\mathfrak{o}$ -Linksmodul derart, dass aus  $\lambda u = 0$  ( $\lambda \in \mathfrak{m}, u \in \mathfrak{M}$ ) stets  $u = 0$  folgt, so lässt sich  $\mathfrak{M}$  in einen  $\mathfrak{S}$ -Linksmodul  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$  einbetten, so dass  $\mathfrak{S}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$  ist.  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$  ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

**Beweis.** Wir definieren für die Elementenpaare  $(x, u)$   $x \in \mathfrak{S}, u \in \mathfrak{M}$ , Gleichheit und Summe folgendermassen:

1.  $(x, u) = (y, v)$  dann und nur dann, wenn für jedes  $\lambda \in \mathfrak{m}$  mit  $\lambda x \in \mathfrak{o}, \lambda y \in \mathfrak{o}$  stets die Gleichung  $\lambda x \cdot u = \lambda y \cdot v$  gilt.

Gibt es ein  $\mu \in \mathfrak{m}$  mit  $\mu x \in \mathfrak{o}, \mu y \in \mathfrak{o}$  und  $\mu x \cdot u = \mu y \cdot v$ , so ist  $(x, u) = (y, v)$ . Denn es gibt für jedes  $\lambda \in \mathfrak{m}$  mit  $\lambda x \in \mathfrak{o}, \lambda y \in \mathfrak{o}$  Elemente  $\mu' \in \mathfrak{m}$  und  $c \in \mathfrak{o}$  mit

$$\mu' \lambda = c \mu, \quad \mu' (\lambda x \cdot u) = c \mu x \cdot u = c \mu y \cdot v = \mu' (\lambda y \cdot v)$$

also  $\lambda x \cdot u = \lambda y \cdot v$ . Dieser Begriff der Gleichheit ist offenbar eine Äquivalenz-

relation. Es ist insbesondere  $(0, u) = (0, v)$ ;  $(0, u)$  werde mit  $0$  bezeichnet. Es gilt ferner

$$(x, u) = (\lambda^{-1}, \lambda x \cdot u) \quad (\lambda \in \mathfrak{m}, \lambda x \in \mathfrak{o});$$

denn es ist  $\lambda^2 x \cdot u = \lambda^2 \lambda^{-1} (\lambda x \cdot u)$ .

2.  $(x, u) + (y, v) = (\lambda^{-1}, \lambda x \cdot u + \lambda y \cdot v)$  ( $\lambda \in \mathfrak{m}, \lambda x \in \mathfrak{o}, \lambda y \in \mathfrak{o}$ ). Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von  $\lambda$ . Ist nämlich  $\mu$  ein Element aus  $\mathfrak{m}$  mit  $\mu x \in \mathfrak{o}, \mu y \in \mathfrak{o}$ , so ist

$$\gamma \lambda^{-1} (\lambda x \cdot u + \lambda y \cdot v) = \gamma \mu^{-1} (\mu x \cdot u + \mu y \cdot v), \quad \gamma = c\lambda = d\mu,$$

d.h. 
$$(\lambda^{-1}, \lambda x \cdot u + \lambda y \cdot v) = (\mu^{-1}, \mu x \cdot u + \mu y \cdot v)$$

Sind  $(x, u) = (x', u')$ ,  $(y, v) = (y', v')$ , so

$$(x, u) + (y, v) = (x', u') + (y', v').$$

Denn es gibt ein  $\lambda \in \mathfrak{m}$  mit  $\lambda x, \lambda x', \lambda y, \lambda y' \in \mathfrak{o}$  und es gilt

$$\lambda x \cdot u = \lambda x' \cdot u', \quad \lambda y \cdot v = \lambda y' \cdot v',$$

$$(x, u) + (y, v) = (\lambda^{-1}, \lambda x \cdot u + \lambda y \cdot v) = (\lambda^{-1}, \lambda x' \cdot u' + \lambda y' \cdot v') = (x', u') + (y', v').$$

Es gilt ferner

$$(x+y, u) = (x, u) + (y, u).$$

Denn es ist für  $\lambda \in \mathfrak{m}$  mit  $\lambda x \in \mathfrak{o}, \lambda y \in \mathfrak{o}$  (also  $\lambda(x+y) \in \mathfrak{o}$ )

$$(x+y, u) = (\lambda^{-1}, \lambda(x+y) \cdot u) = (\lambda^{-1}, \lambda x \cdot u + \lambda y \cdot u) = (x, u) + (y, u).$$

Man sieht leicht, dass die Menge **M** aller Symbolen  $(x, u)$  nach der obigen Addition einen Modul bildet.

3. Wir definieren endlich das Produkt von  $z \in \mathfrak{S}$  und  $(x, u)$  durch

$$z(x, u) = (zx, u).$$

Ist  $(x, u) = (x', u')$ , so ist  $z(x, u) = z(x', u')$ . Es ist nämlich

$$\begin{aligned} (zx, u) &= (\mu^{-1}, \mu zx \cdot u) = (\mu^{-1}, \mu z \lambda^{-1} \lambda x \cdot u) \\ &= (\mu^{-1}, \mu z \lambda^{-1} \lambda x' \cdot u') = (\mu^{-1}, \mu z x' \cdot u') = (zx', u'), \end{aligned}$$

wenn man  $\lambda, \mu$  aus  $\mathfrak{m}$  so annimmt, dass  $\lambda x \in \mathfrak{o}, \lambda y \in \mathfrak{o}$  und  $\mu z \lambda^{-1} \in \mathfrak{o}$  sind. **M** ist dann ein  $\mathfrak{S}$ -Linksmodul. Denn es gilt

$$\begin{aligned}
s((x, u) + (y, v)) &= s(\lambda^{-1}, \lambda x \cdot u + \lambda y \cdot v) = (s\lambda^{-1}, \lambda x \cdot u + \lambda y \cdot v) \\
&= (\mu^{-1}, \mu s\lambda^{-1}(\lambda x \cdot u + \lambda y \cdot v)) = (\mu^{-1}, \mu s x \cdot u + \mu s y \cdot v) \\
&= (sx, u) + (sy, v) = s(x, u) + s(y, v), \\
(s + s')(x, u) &= (sx + s'x, u) = (sx, u) + (s'x, u) = s(x, u) + s'(x, u), \\
s'(s(x, u)) &= (s'sx, u) = (s's)(x, u).
\end{aligned}$$

Es gilt insbesondere

$$a(1, u) = (a, u) = (1, au) \quad (a \in \mathfrak{o}).$$

In  $\mathcal{M}$  bildet also die Gesamtheit aller Element  $(1, u)$  einen mit  $\mathfrak{M}$   $\mathfrak{o}$ -isomorphen  $\mathfrak{o}$ -Linksmodul. Identifiziert man  $(1, u)$  mit  $u$ , so ist  $\mathcal{M}$  ein Erweiterungsmodul von  $\mathfrak{M}$ . Ferner ist  $(x, u) = x(1, u) = xu$ , also  $\mathcal{M} = \mathfrak{S}\mathfrak{M}$ .

Mathematisches Institut  
 Ōsaka Universität.