

LA VERSION RELATIVE DE LA CONJECTURE DES PÉRIODES DE KONTSEVICH–ZAGIER REVISITÉE

JOSEPH AYOUB

(Received November 16, 2016)

Résumé. Dans cette courte note, on remarque qu’une petite modification dans le calcul effectué dans [5] de l’algèbre du torseur d’isomorphismes entre la réalisation de Betti tangentielle et la réalisation de De Rham résulte en un énoncé du type Kontsevich–Zagier fonctionnel purement algébrique et nettement plus satisfaisant que l’énoncé obtenu dans [5].

Abstract. In this short note, we remark that a small modification in the computation made in [5] of the algebra of the torsor of isomorphisms between the tangential Betti realisation and the De Rham realisation results in a statement of functional Kontsevich–Zagier type which is purely algebraic and much more satisfactory than the statement obtained in [5].

TABLE DES MATIÈRES

1. Préambule	465
1.1. Ce que nous avons démontré dans [5]	466
1.2. Ce que nous démontrons dans cette note	467
1.3. Un complément	469
1.4. Une reformulation	470
2. Démonstration	472
2.1. Un survol de [5]	472
2.2. Une réduction	475
2.3. Un autre résultat de [5]	477
2.4. Fin de la démonstration	478
Références	484

1. Préambule. Dans la suite, k désignera le corps de base ; il sera supposé de caractéristique nulle sauf mention explicite du contraire. On fixe un système d’indéterminées $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots)$ et une autre indéterminée ϖ .

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14C15 ; Secondary 11J91.

Key words and phrases. Séries de périodes, transcendance, motifs, groupe de Galois motivique, géométrie rigide.

L’auteur a bénéficié du soutien partiel du Fond National Suisse de la Recherche Scientifique (NSF), projet no. 200021-124737/1.

1.1. Ce que nous avons démontré dans [5]. On fixe un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Comme dans [5], on note $\mathcal{O}_{k\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ le k -espace vectoriel des séries formelles en \mathbf{z} , ne dépendant que d'un nombre fini des z_i , de polyrayon de convergence strictement plus grand que 1 le long de chaque axe et qui sont algébriques sur le corps des fractions rationnelles $k(\mathbf{z})$. (Bien entendu, la notion de polyrayon de convergence dépend du plongement complexe σ .) On dispose d'un morphisme d'intégration

$$(1) \quad \int_{[0,1]^\infty} : \mathcal{O}_{k\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$

dont l'image est la k -algèbre des périodes des k -motifs (relativement au plongement complexe σ).

Comme dans [5], on note $\mathcal{O}_{k\text{-alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ l'analogue fonctionnel de $\mathcal{O}_{k\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$. C'est le sous- k -espace vectoriel de $\mathcal{O}_{k\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^\infty)[[\varpi]][\varpi^{-1}]$ formé des éléments algébriques sur le corps des fractions rationnelles $k(\mathbf{z}, \varpi)$. Ainsi, un élément $F \in \mathcal{O}_{k\text{-alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ est une série de Laurent $F = \sum_{r \gg -\infty} f_r \cdot \varpi^r$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{k\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ et la condition d'algébricité entraîne en particulier que les coefficients f_r ne dépendent que d'un nombre fini des z_i indépendamment de r . On dispose également d'un morphisme d'intégration terme à terme

$$(2) \quad \int_{[0,1]^\infty} : \mathcal{O}_{k\text{-alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^\infty) \longrightarrow \mathbb{C}((\varpi)).$$

Dans [5], nous avons obtenu la description suivante du noyau de ce morphisme (voir [5, Théorème 4.25]).

THÉORÈME 1.1. *On suppose que $\pi \in \mathbb{C}$ est algébrique sur k . Alors, le noyau de (2) est le sous- k -espace vectoriel de $\mathcal{O}_{k\text{-alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ engendré par les éléments de la forme :*

- (a) $\frac{\partial G}{\partial z_i} - G|_{z_i=1} + G|_{z_i=0}$, avec $G \in \mathcal{O}_{k\text{-alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ et $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- (b) $f \cdot L$, avec $f \in \mathcal{O}_{k\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ telle que $\int_{[0,1]^\infty} f = 0$ et $L \in \mathcal{O}_{k\text{-alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$ telle que L et f ne dépendent pas simultanément d'une même indéterminée.

REMARQUE 1.2. Le Théorème 1.1 est insatisfaisant à cause des générateurs du type (b). D'une part, ces générateurs font apparaître une opération transcendante, à savoir, l'intégrale de $f \in \mathcal{O}_{k\text{-alg}}(\overline{\mathbb{D}}^\infty)$. D'autre part, ce type de générateurs n'apparaît pas dans la conjecture originale de Kontsevich–Zagier, comme reformulée dans [5, Conjecture 1.1].

REMARQUE 1.3. L'hypothèse que $\pi \in \mathbb{C}$ est algébrique sur k n'apparaît pas dans l'énoncé de [5, Théorème 4.25]. Cette omission est le résultat d'une erreur survenue dans la preuve de [5, Théorème 3.27]. En effet, contrairement à ce qui est affirmé dans cette preuve, la platitude de \mathbb{C} sur $\mathcal{P}(k)$ n'entraîne pas que le noyau de la composition de [5, (114)] coïncide avec le noyau du morphisme

$$\mathcal{O}_{k\text{-alg}}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^\infty) \longrightarrow \mathbf{Q}^{\text{eff}, \varpi}(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}^{\text{eff}}(k, \sigma)} \mathcal{P}(k).$$

En fait, on a besoin de savoir plutôt que la $\mathcal{P}(k)$ -algèbre $\mathbf{Q}^{eff, \varpi}(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}^{eff}(k, \sigma)} \mathcal{P}(k)$ est plate. Ceci est le cas si $\pi \in \mathbb{C}$ est algébrique sur k . En effet, cette condition entraîne que l'élément $2\pi i \in \mathcal{P}(k)$ est inversible. On peut alors utiliser le fait que, au-dessus de l'ouvert

$$\text{Spec}(\mathbf{P}(k, \sigma)) = \text{D}(\underline{2\pi i}^{-1}) \subset \text{Spec}(\mathbf{P}^{eff}(k, \sigma)),$$

$\text{Spec}(\mathbf{P}^{eff, \varpi}(F, \sigma))$ est un toreur sous un \mathbb{Q} -schéma en groupes affine pour conclure. (Ici, on note $\underline{2\pi i}$ ce qu'on a noté $\bar{\pi}$ dans [5, page 951]; on renvoie le lecteur à [5, pages 953–956] pour les relations entre $\mathbf{P}^{eff, \varpi}(F, \sigma)$, $\mathbf{P}^{\varpi}(F, \sigma)$ et $\mathbf{Q}^{eff, \varpi}(F, \sigma)$.) Cet argument sera repris juste après le Théorème 2.3 ci-dessous.

On ignore si [5, Théorèmes 3.27 et 4.25] sont vrais sans l'hypothèse que $\pi \in \mathbb{C}$ est algébrique sur k . Cette question est du même tonneau que la question épineuse de la densité du groupe de Galois motivique $\mathbf{G}_{\text{mot}}(k, \sigma)$ dans sa version effective $\text{Spec}(\mathbf{H}_{\text{mot}}^{eff}(k, \sigma))$ qui est un monoïde. Cependant, il n'est pas difficile de réparer l'énoncé de [5, Théorème 4.25] sans imposer de restriction sur le plongement complexe σ ; voir le Théorème 1.11 ci-dessous.

1.2. Ce que nous démontrons dans cette note. En plus du système d'indéterminées \mathbf{z} , on se donne un système d'indéterminées $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$. On fixe les coordonnées à l'aide des identifications

$$\mathbb{A}_k^m = \text{Spec}(k[z_1, \dots, z_m]) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_k^n = \text{Spec}(k[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}]).$$

On pose

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}_k^\infty) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^m) = k[\mathbf{z}] \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(\mathbb{E}_k^\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(\mathbb{E}_k^n) = k[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}].$$

On pose aussi

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty) = \bigcup_{m, n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^m \times_k \mathbb{E}_k^n) = k[\mathbf{z}, \mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}].$$

On introduit les morphismes d'intégration suivants.

LEMME 1.4. *Il existe un morphisme d'intégration*

$$(3) \quad \int : \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^\infty) \longrightarrow k$$

tel que pour tout plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ et tout polynôme $p = p(z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^m)$, on ait l'égalité

$$\sigma \left(\int p \right) = \int_{[0,1]^m} \sigma(p) \cdot dz_1 \cdots dz_m.$$

De plus, on a $\int p = q(1, \dots, 1)$ avec $q \in \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^m)$ l'unique polynôme divisible par $z_1 \cdots z_m$ et tel que

$$\frac{\partial^m q}{\partial z_1 \cdots \partial z_m} = p.$$

PREUVE. C'est évident. □

LEMME 1.5. *Il existe un morphisme d'intégration*

$$(4) \quad \int : \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty) \longrightarrow k$$

tel que pour tout plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$ et toute fonction régulière

$$f = f(z_1, \dots, z_m, t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^m \times_k \mathbb{E}_k^n),$$

on ait l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \sigma \left(\int f \right) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{[0,1]^m \times (S^1)^n} \sigma(f)(z_1, \dots, z_m, t_1, \dots, t_n) \cdot dz_1 \cdots dz_m \cdot \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n} \\ &= \int_{[0,1]^m \times [0,1]^n} \sigma(f) (z_1, \dots, z_m, e^{2\pi i \cdot \tau_1}, \dots, e^{2\pi i \cdot \tau_n}) \cdot dz_1 \cdots dz_m \cdot d\tau_1 \cdots d\tau_n. \end{aligned}$$

De plus, si $p = p(z_1, \dots, z_m)$ est le coefficient du monôme \mathbf{t}^0 dans f , alors

$$\int f = \int p$$

où l'intégration dans le membre de droite est celle du Lemme 1.4.

PREUVE. C'est évident. □

Pour énoncer le résultat principal de cette note, on introduit la notation suivante.

NOTATION 1.6. Étant donné un k -schéma affine et lisse X , on note $\mathcal{O}_{alg}^\dagger(X)$ le sous- k -espace vectoriel de $\mathcal{O}(X)[[\varpi]][[\varpi^{-1}]]$ formé des éléments algébriques sur $\text{Frac}(\mathcal{O}(X))(\varpi)$. (Bien entendu, « $\text{Frac}(-)$ » désigne le passage à l'anneau des fractions.) On pose

$$\mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty) = \bigcup_{m, n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^m \times_k \mathbb{E}_k^n).$$

On définit de même $\mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty)$.

THÉORÈME 1.7. *Considérons le morphisme k -linéaire*

$$(5) \quad \int : \mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty) \longrightarrow k((\varpi))$$

obtenue en intégrant (au sens du Lemme 1.5) une série de Laurent terme à terme. Alors, le noyau de (5) est le sous- k -espace vectoriel engendré par les éléments de la forme :

- (a) $\frac{\partial G}{\partial z_i} - G|_{z_i=1} + G|_{z_i=0}$, pour $G \in \mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty)$ et $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- (b) $t_j \cdot \frac{\partial H}{\partial t_j}$, pour $H \in \mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty)$ et $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

REMARQUE 1.8. Le lecteur remarquera que les générateurs du type (b) dans le Théorème 1.1 n'ont rien à voir avec les générateurs du type (b) dans le Théorème 1.7. En fait, dans le Théorème 1.7, les générateurs dans (a) et (b) sont très similaires : il est tentant d'y penser comme à des variantes additive et multiplicative d'une même notion. De ce point de vu, le Théorème 1.7 nous semble beaucoup plus satisfaisant et beaucoup plus proche de l'esprit de

la conjecture originale de Kontsevich–Zagier que le Théorème 1.1. Toutefois, nous tenons à préciser que « plus satisfaisant » ne sous-entend pas que le Théorème 1.7 permet de retrouver le Théorème 1.1. En effet, nous ne voyons aucune implication élémentaire et directe entre les deux énoncés (voir toutefois le Théorème 1.12, dont la preuve est motivique, ainsi que la Remarque 1.13 ci-dessous).

1.3. Un complément. La preuve que nous donnerons du Théorème 1.7 est une légère modification de celle du Théorème 1.1. En fait, ladite modification fournit aussi un « pont » entre les deux Théorèmes 1.1 et 1.7. Pour expliquer cela, nous introduisons quelques notations.

NOTATION 1.9. (i) On note $\mathcal{F}^\dagger(k)$ le quotient de $\mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty)$ par le sous- k -espace vectoriel engendré par les éléments décrits dans (a) et (b) du Théorème 1.7. C’est naturellement une k -algèbre et son produit admet une description similaire à celle de [2, Proposition 2.108(b)].

(ii) Étant donné un plongement complexe σ , on note $\mathcal{P}^{eff}(k, \sigma)$ l’image du morphisme (1). On note aussi $\mathcal{P}^{\dagger, eff}(k, \sigma)$ le quotient de $\mathcal{O}_{k-alg}^\dagger(\mathbb{D}^\infty)$ par le sous- k -espace vectoriel engendré par les éléments décrits dans (a) et (b) du Théorème 1.1. Ainsi, $\mathcal{P}^{\dagger, eff}(k, \sigma)$ est naturellement une $\mathcal{P}^{eff}(k, \sigma)$ -algèbre et son produit admet une description similaire à celle de [2, Proposition 2.108(b)].

(iii) Remarquons que $2\pi i \in \mathcal{P}^{eff}(k, \sigma)$. On pose

$$\mathcal{P}(k, \sigma) = \mathcal{P}^{eff}(k, \sigma)[(2\pi i)^{-1}] \quad \text{et} \quad \mathcal{P}^\dagger(k, \sigma) = \mathcal{P}^{\dagger, eff}(k, \sigma)[(2\pi i)^{-1}].$$

Lorsque $\pi \in \mathbb{C}$ est algébrique sur de k , $2\pi i \in \mathcal{P}^{eff}(k, \sigma)$ est un élément inversible et on a alors $\mathcal{P}^{eff}(k, \sigma) = \mathcal{P}(k, \sigma)$ et $\mathcal{P}^{\dagger, eff}(k, \sigma) = \mathcal{P}^\dagger(k, \sigma)$.

REMARQUE 1.10. Dans [5], les k -algèbres $\mathcal{P}^{eff}(k, \sigma)$ et $\mathcal{P}^{\dagger, eff}(k, \sigma)$ ont été notées $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}^\dagger(k)$ respectivement. (Voir [5, Définition 1.6].) En plus de la période formelle $2\pi i$, que nous avons notée $\bar{\pi}$ dans [5], ce sont les seuls objets mathématiques pour lesquels les notations dans cette note diffèrent de celles dans [5].

Les morphismes d’intégration terme à terme induisent des morphismes

$$(6) \quad \int : \mathcal{F}^\dagger(k) \longrightarrow k((\varpi)) \quad \text{et} \quad \int : \mathcal{P}^\dagger(k, \sigma) \longrightarrow \mathbb{C}((\varpi)).$$

Le Théorème 1.7 équivaut à l’injectivité du morphisme à gauche et, sous l’hypothèse que $\pi \in \mathbb{C}$ est algébrique sur k , le Théorème 1.1 équivaut à l’injectivité du morphisme à droite. En fait, on a le résultat suivant qui répare [5, Théorème 4.25] et généralise le Théorème 1.1.

THÉORÈME 1.11. *Le morphisme $\int : \mathcal{P}^\dagger(k, \sigma) \longrightarrow \mathbb{C}((\varpi))$ est injectif.*

Le « pont » annoncé ci-dessus est donné par le résultat suivant.

THÉORÈME 1.12. *Étant donné un plongement complexe σ , il existe un isomorphisme canonique de k -algèbres*

$$\mathcal{F}^\dagger(k) \otimes_k \mathcal{P}(k, \sigma) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}^\dagger(k, \sigma)$$

qui est compatible aux morphismes d'intégration terme à terme (6).

REMARQUE 1.13. Supposons que le Théorème 1.12 est vrai. Alors, le Théorème 1.11 est vrai si et seulement si le Théorème 1.7 est vrai. (L'implication 1.11 \Rightarrow 1.7 est claire. Pour la réciproque, on utilise que le morphisme $k((\varpi)) \otimes_k l \rightarrow \mathbb{C}((\varpi))$ est injectif pour toute k -algèbre $l \subset \mathbb{C}$.)

Le Théorème 1.12 admet aussi la conséquence suivante.

COROLLAIRE 1.14. *Toute série de périodes (i.e., un élément de l'image de (2)) est une combinaison $\mathcal{P}(k, \sigma)$ -linéaire d'éléments dans l'image de (5).*

1.4. Une reformulation. Étant donnée une fonction régulière $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^m \times_k \mathbb{E}_k^n)$, on note $cc(f) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^m)$ le coefficient du monôme t^0 de f . Le polynôme $cc(f)$ sera appelé le *coefficient central* de f . Ceci fournit un morphisme k -linéaire

$$(7) \quad cc : \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^\infty).$$

D'après le Lemme 1.5, on a la formule

$$\int f = \int_{[0,1]^\infty} cc(f).$$

En appliquant (7) terme à terme, on obtient un morphisme k -linéaire

$$(8) \quad cc : \mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^\infty)[[\varpi]][\varpi^{-1}].$$

On note $\mathcal{O}_{cent-alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty)$ l'image de (8). Clairement, $\mathcal{O}_{cent-alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty)$ contient $\mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty)$ et il est stable par la dérivation par rapport aux indéterminées z_i et par leurs substitutions par 0 ou 1. Le résultat ci-dessous est une conséquence immédiate du Théorème 1.7.

COROLLAIRE 1.15. *Considérons le morphisme d'intégration terme à terme*

$$(9) \quad \int : \mathcal{O}_{cent-alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty) \rightarrow k((\varpi)).$$

Alors, le noyau de (9) est le sous- k -espace vectoriel engendré par les éléments de la forme

$$\frac{\partial G}{\partial z_i} - G|_{z_i=1} - G|_{z_i=0},$$

pour $G \in \mathcal{O}_{cent-alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty)$ et $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

PREUVE. En effet, on dispose d'un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty) & \xrightarrow{cc} & \mathcal{O}_{cent-alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty) \\ & \searrow (5) & \downarrow (9) \\ & & k((\varpi)) \end{array}$$

où la flèche horizontale est surjective par construction. De plus, il est immédiat de voir que le morphisme cc s'annule sur les éléments du type (b) du Théorème 1.7 et qu'il commute aux opérations $G \mapsto \frac{\partial G}{\partial z_i}$ et $G \mapsto G|_{z_i=\varepsilon}$ (avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$). Ceci permet de conclure. \square

Il ne faut pas chercher bien loin pour trouver des éléments de $\mathcal{O}_{cent-alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty)$ qui ne sont pas algébriques sur $k(\mathbf{z}, \varpi)$.

EXEMPLE 1.16. Considérons la série

$$F = \frac{1}{1 - (t_1 + t_1^{-1}) \cdot (t_2 + t_2^{-1}) \cdot \varpi} = \sum_{r \geq 0} (t_1 + t_1^{-1})^r \cdot (t_2 + t_2^{-1})^r \cdot \varpi^r.$$

Pour $s \geq 0$, on a

$$cc((t_1 + t_1^{-1})^r \cdot (t_2 + t_2^{-1})^r) = \begin{cases} \binom{2s}{s}^2 & \text{si } r = 2s, \\ 0 & \text{si } r = 2s + 1. \end{cases}$$

Il s’ensuit que

$$cc(F) = \sum_{s \geq 0} \binom{2s}{s}^2 \cdot \varpi^{2s}.$$

Si $k = \mathbb{C}$, on peut alors écrire

$$cc(F)(\varpi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 4\varpi^2 \sin^2 \theta}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2) \cdot (1 - 4\varpi^2 t^2)}}.$$

(Voir [10, page 298] et [8, page 184].) Ainsi, à un facteur près, $cc(F)$ est une intégrale elliptique complète de première espèce ; c’est donc bien une série transcendante sur $k(\varpi)$.

REMARQUE 1.17. Il est intéressant de savoir si l’énoncé obtenu en remplaçant dans le Corollaire 1.15 « $\mathcal{O}_{cent-alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty)$ » par « $\mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty)$ » est vrai ou faux. Malheureusement, la preuve que nous avons du Théorème 1.7 et de son Corollaire 1.15 ne permet pas de décider.

REMARQUE 1.18. Le morphisme (8) est lié à la notion de « diagonale d’une série ». En effet, étant donné un élément

$$F = F(z_1, \dots, z_m, t_1, \dots, t_n, \varpi) \in \mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty),$$

on peut trouver une série de Laurent

$$\tilde{F} = \tilde{F}(z_1, \dots, z_m, t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n, \varpi) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^{m+2n})[[\varpi]][\varpi^{-1}],$$

algébrique sur le corps $k(z_1, \dots, z_m, t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n, \varpi)$ et tel que

$$F(\mathbf{z}, t_1, \dots, t_n, \varpi) = \tilde{F}(\mathbf{z}, t_1, \dots, t_n, t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}, \varpi).$$

De plus, il est immédiat de voir que

$$cc(F) = \text{diag}(\tilde{F})|_{t_1 = \dots = t_n = 1},$$

où $\text{diag}(\tilde{F}) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}_k^{m+n})[[\varpi]][\varpi^{-1}]$ est la série formelle diagonale définie de la manière suivante. Si on écrit

$$\tilde{F} = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_n, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}^{2n}} F_{\nu_1, \dots, \nu_n, \mu_1, \dots, \mu_n}(\mathbf{z}, \varpi) \cdot t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n} \cdot s_1^{\mu_1} \cdots s_n^{\mu_n}$$

alors

$$\text{diag}(\tilde{F}) = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^m} F_{\nu_1, \dots, \nu_n, \nu_1, \dots, \nu_n}(\mathbf{z}, \varpi) \cdot t_1^{\nu_1} \cdots t_n^{\nu_n}.$$

Bien que ceci n'est pas directement lié au sujet de cette note, nous attirons l'attention du lecteur sur un résultat remarquable de Furstenberg [9] généralisé par Deligne [7] qui affirme que $\text{diag}(\tilde{F})$, et donc aussi $\text{cc}(F)$, serait une fonction algébrique si la caractéristique de k était non nulle. En caractéristique nulle, ceci est faux comme on l'a vu dans l'Exemple 1.16.

2. Démonstration. La démonstration du Théorème 1.7 que nous allons présenter est essentiellement identique à celle du Théorème 1.1 que nous avons donnée dans [5]. Elle diffère uniquement dans le calcul du toiseur d'isomorphismes entre la réalisation de Betti tangentielle et la réalisation de De Rham (voir [5, §3.6]).

2.1. Un survol de [5]. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons certains points de [5] que nous avons jugés utiles pour comprendre les modifications dans la preuve du Théorème 1.1 qui permettent d'obtenir le Théorème 1.7.

2.1.1. On pose $K = k((\varpi))$; \mathfrak{c} est un corps complet non archimédien d'anneau de valuation $K^\circ = k[[\varpi]]$, d'idéal maximal $K^\vee = \varpi \cdot k[[\varpi]]$ et de corps résiduel $\tilde{K} = k$. On pose aussi $F = k(\varpi)$ qu'on identifiera à un sous-corps dense de K . (Dans [5] nous avons supposé que k était dénombrable. On fera de même ici, et on remarque que cela ne restreint pas la généralité : il suffit de démontrer le Théorème 1.7 pour k de type fini sur \mathbb{Q} .)

2.1.2. On travaillera exclusivement à coefficients rationnels. Pour S un schéma de base noethérien et régulier, on note $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(S)$ la catégorie triangulée des motifs effectifs de Voevodsky (à coefficients dans \mathbb{Q}) et $\mathbf{DM}(S)$ sa variante stable. (Voir [5, §2.1].)

2.1.3. On note $\mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(K)$ la catégorie triangulée des motifs rigides effectifs et $\mathbf{RigDM}(K)$ sa variante stable. On dispose des foncteurs d'analytification

$$\text{Rig}^* : \mathbf{DM}^{\text{eff}}(F) \longrightarrow \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(K) \quad \text{et} \quad \text{Rig}^* : \mathbf{DM}(F) \longrightarrow \mathbf{RigDM}(K).$$

Étant donné un F -schéma lisse X , on note X^{anr} la K -variété analytique rigide qui lui est associée. Les foncteurs Rig^* envoient le motif de X sur le motif rigide de X^{anr} . (Voir [5, §2.2].)

2.1.4. Pour $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et X un k -schéma lisse, on note $Q_r^{\text{gm}}(X)$ le \mathbf{G}_{m_k} -schéma $X \times_k \mathbf{G}_{m_k}$ admettant pour morphisme structural la composition de

$$X \times_k \mathbf{G}_{m_k} \xrightarrow{\text{pr}} \mathbf{G}_{m_k} \xrightarrow{(-)^r} \mathbf{G}_{m_k}.$$

On note $\mathbf{quDM}^{\text{eff}}(k)$ la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(\mathbf{G}_{m_k})$ stable par sommes infinies et contenant les objets de la forme $\mathbb{Q}_{\text{tr}}(Q_r^{\text{gm}}(X))$ avec r et X comme avant. On note aussi $\mathbf{quDM}(k)$ la variante stable. (Voir [5, §2.3].)

2.1.5. Le foncteur composé

$$\mathfrak{F} : \mathbf{quDM}^{\text{eff}}(k) \hookrightarrow \mathbf{DM}^{\text{eff}}(\mathbf{G}_{m_k}) \xrightarrow{\varpi^*} \mathbf{DM}^{\text{eff}}(F) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(K)$$

est une équivalence de catégories. Il en est de même dans le cas stable. (Voir [5, Théorème 2.4].)

2.1.6. Le foncteur « motif proche » $\Psi_{\infty} : \mathbf{DM}^{\text{eff}}(F) \rightarrow \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k)$ est défini par la composition de

$$\mathbf{DM}^{\text{eff}}(F) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(K) \simeq \mathbf{quDM}^{\text{eff}}(k) \hookrightarrow \mathbf{DM}^{\text{eff}}(\mathbf{G}_{mk}) \xrightarrow{1^*} \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k).$$

On définit de même la variante stable $\Psi_{\infty} : \mathbf{DM}(F) \rightarrow \mathbf{DM}(k)$. (Voir [5, Définition 2.6 et Remarque 2.7].) En fait, nous aurons surtout besoin du foncteur de spécialisation canonique $\chi : \mathbf{DM}^{\text{eff}}(F) \rightarrow \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k)$ et de sa variante stable $\chi : \mathbf{DM}(F) \rightarrow \mathbf{DM}(k)$. Ce foncteur est défini par la composition de

$$\mathbf{DM}^{\text{eff}}(F) \xrightarrow{\text{Rig}^*} \mathbf{RigDM}^{\text{eff}}(K) \simeq \mathbf{quDM}^{\text{eff}}(k) \hookrightarrow \mathbf{DM}^{\text{eff}}(\mathbf{G}_{mk}) \xrightarrow{q^*} \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k),$$

avec $q : \mathbf{G}_{mk} \rightarrow \text{Spec}(k)$ la projection structurale, et il en est de même de la variante stable. (Voir [5, (38)].) Contrairement aux foncteurs Ψ_{∞} , les foncteurs χ ne commutent pas aux foncteurs de « suspension infinie » $\text{Sus}_T^0 : \mathbf{DM}^{\text{eff}}(-) \rightarrow \mathbf{DM}(-)$; voir à ce sujet [5, Exemple 2.36].

2.1.7. On fixe un plongement complexe $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. Étant donné un k -schéma lisse X , on note X^{an} la variété analytique complexe qui lui est associée. On dispose de foncteurs de réalisation de Betti

$$\text{Bti}^* : \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbb{Q}) \quad \text{et} \quad \text{Bti}^* : \mathbf{DM}(k) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbb{Q}).$$

Ces foncteurs envoient le motif de X sur l’homologie singulière de X^{an} . (Voir [5, §2.4].)

2.1.8. La réalisation de Betti tangentielle est le foncteur $\text{TgB}^* : \mathbf{DM}^{\text{eff}}(F) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbb{Q})$ défini par la composition de

$$\mathbf{DM}^{\text{eff}}(F) \xrightarrow{\Psi_{\infty}} \mathbf{DM}^{\text{eff}}(k) \xrightarrow{\text{Bti}^*} \mathbf{D}(\mathbb{Q}).$$

On définit de même la variante stable $\text{TgB}^* : \mathbf{DM}(F) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbb{Q})$. (Voir [5, §2.5].)

2.1.9. On note $\Omega_{/k}^{\bullet}$ le complexe de préfaisceaux sur Sm/k qui à un k -schéma lisse X associe le complexe $\Gamma(X, \Omega_{X/k}^{\bullet})$ des sections globales du complexes de De Rham algébrique sur X . Ceci est naturellement un complexe de préfaisceaux avec transferts [11], i.e., un objet de $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(k)$. On pose

$$\mathcal{P}^{\text{eff}}(k, \sigma) = \text{Bti}^*(\Omega_{/k}^{\bullet}).$$

Ceci est un complexe de k -espaces vectoriels. On sait qu’il est (-1) -connexe (voir [2, Théorème 2.104]). On pose aussi

$$\mathbf{P}^{\text{eff}}(k, \sigma) = \text{H}_0(\mathcal{P}^{\text{eff}}(k, \sigma)).$$

C’est la k -algèbre des périodes formelles effectives. (Voir [5, §3.5].)

2.1.10. On a également la variante stable du Point 2.1.9. Dans [5, pages 950-951], nous avons décrit cette variante en utilisant les $\mathbb{Q}_{\text{tr}}(U, u)$ -spectres avec $U = \mathbb{P}_k^1 \times_k \mathbb{P}_k^1 \setminus \Delta(\mathbb{P}_k^1)$ et $u = (\infty, 0)$. Pour des raisons techniques, liées à la Proposition 2.15 ci-dessous, nous préférons utiliser ici les T -spectres avec $T = \mathbb{Q}_{\text{tr}}(\mathbb{E}_k^1, 1)$. On note t la coordonnée sur \mathbb{E}_k^1 de sorte que $\mathbb{E}_k^1 = \text{Spec}(k[t, t^{-1}])$.

On note $\Omega_{/k}$ le T -spectre donné au niveau n par $\Omega_{/k}^\bullet[n]$. Les morphismes d'assemblage correspondent par adjonction aux morphismes

$$\Omega_{/k}^\bullet[n] \longrightarrow \underline{\text{hom}}((\mathbb{E}_k^1, 1), \Omega_{/k}^\bullet[1])[n]$$

donnés par le produit extérieur $d \ln(t) \boxtimes -$. On remarque que $\Omega_{/k}$ est en fait un T -spectre symétrique ; l'action du groupe symétrique sur $\text{Ev}_n(\Omega_{/k}) = \Omega_{/k}^\bullet[n]$ est la multiplication par la signature.

Le T -spectre symétrique $\Omega_{/k}$ fournit un objet de $\mathbf{DM}(k)$. On pose

$$\mathcal{P}(k, \sigma) = \text{Bti}^*(\Omega_{/k}).$$

C'est un complexe (-1) -connexe de k -espaces vectoriels. On pose aussi

$$\mathbf{P}(k, \sigma) = \text{H}_0(\mathcal{P}(k, \sigma)).$$

C'est la k -algèbre des périodes formelles.

2.1.11. Notons $\gamma \in \text{H}_1(\text{Bti}^*(T)) = \text{H}_1^{\text{sing}}(\mathbb{E}^1, an)$ le générateur tel que $\int_\gamma d \ln(t) = 2\pi i$. On note alors $2\pi i \in \mathbf{P}^{\text{eff}}(k, \sigma)$ l'image de γ par la composition de

$$\text{Bti}^*(T[-1]) \xrightarrow{d \ln(t)} \text{Bti}^*(\Omega_{/k}^\bullet) = \mathcal{P}^{\text{eff}}(k, \sigma).$$

Alors, on a (voir [2, Théorème 2.93])

$$\mathcal{P}(k, \sigma) \simeq \mathcal{P}^{\text{eff}}(k, \sigma)[2\pi i^{-1}] \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(k, \sigma) \simeq \mathbf{P}^{\text{eff}}(k, \sigma)[2\pi i^{-1}].$$

2.1.12. Comme dans les Points 2.1.9 et 2.1.10, on dispose du motif effectif $\Omega_{/F}^\bullet \in \mathbf{DM}^{\text{eff}}(F)$ et du motif stable $\Omega_{/F} \in \mathbf{DM}(F)$. On pose

$$\mathcal{P}^{\text{eff}, \varpi}(F, \sigma) = \text{TgB}^*(\Omega_{/F}^\bullet) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}^\varpi(F, \sigma) = \text{TgB}^*(\Omega_{/F}).$$

Ce sont des complexes des F -espaces vectoriels (-1) -connexes. On pose aussi

$$\mathbf{P}^{\text{eff}, \varpi}(F, \sigma) = \text{H}_0(\mathcal{P}^{\text{eff}, \varpi}(F, \sigma)) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}^\varpi(F, \sigma) = \text{H}_0(\mathcal{P}^\varpi(F, \sigma)).$$

On dispose de morphismes de k -algèbres $\mathcal{P}^{\text{eff}}(k, \sigma) \longrightarrow \mathcal{P}^{\text{eff}, \varpi}(F, \sigma)$ et $\mathcal{P}(k, \sigma) \longrightarrow \mathcal{P}^\varpi(F, \sigma)$ induisant les morphismes $\mathbf{P}^{\text{eff}}(k, \sigma) \longrightarrow \mathbf{P}^{\text{eff}, \varpi}(F, \sigma)$ et $\mathbf{P}(k, \sigma) \longrightarrow \mathbf{P}^\varpi(F, \sigma)$. On égale-ment :

$$(10) \quad \mathcal{P}^\varpi(F, \sigma) \simeq \mathcal{P}^{\text{eff}, \varpi}(F, \sigma)[2\pi i^{-1}] \quad \text{et} \quad \mathbf{P}^\varpi(F, \sigma) \simeq \mathbf{P}^{\text{eff}, \varpi}(k, \sigma)[2\pi i^{-1}].$$

Ceci découle du Point 2.1.11 et de [5, Remarque 2.19].

2.1.13. D’après [2, Proposition 2.108(c)], on dispose d’un morphisme d’évaluation (*alias* intégration)

$$\int : \mathbf{P}(k, \sigma) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

De même, dans [5, Définition 4.18], on a introduit un morphisme d’évaluation (*alias* intégration)

$$\int : \mathbf{P}^\varpi(F, \sigma) \longrightarrow \mathbb{C}((\varpi^{1/r}; r \in \mathbb{N}^\times))[\ln \varpi].$$

(Dans *loc. cit.*, ce morphisme est défini sur $\mathbf{P}^{eff, \varpi}(F, \sigma)$; on l’étend à $\mathbf{P}^\varpi(F, \sigma)$ en utilisant (10) et le fait que $\underline{2\pi i}$ s’envoie sur la constante inversible $2\pi i \in \mathbb{C}$. Aussi, dans *loc. cit.*, le morphisme prend ses valeurs dans $\mathcal{A}_{F \otimes_k \mathbb{C}}^{rs}$; il s’agit d’une sous-algèbre de $\mathbb{C}((\varpi^{1/r}; r \in \mathbb{N}^\times))[\ln \varpi]$ introduite dans [5, page 971, (154)], voir aussi la paragraphe qui précède [5, Proposition 4.3]. Cette sous-algèbre ne jouera aucun rôle dans cette note.)

2.1.14. On dispose d’un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(k, \sigma) & \longrightarrow & \mathbf{P}^\varpi(F, \sigma) \\ \downarrow \int & & \downarrow \int \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}((\varpi^{1/r}; r \in \mathbb{N}^\times))[\ln \varpi]. \end{array}$$

On pose (voir [5, Définition 3.25]) :

$$\mathbf{R}_{/k}^\varpi(F, \sigma) = \mathbf{P}^\varpi(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}(k, \sigma), \int} \mathbb{C}.$$

D’après [5, Corollaire 4.24], le morphisme induit

$$\int : \mathbf{R}_{/k}^\varpi(F, \sigma) \longrightarrow \mathbb{C}((\varpi^{1/r}; r \in \mathbb{N}^\times))[\ln \varpi]$$

est injectif.

2.2. Une réduction. Avec les notations du Point 2.1.6 et parallèlement au Point 2.1.12, on pose

$$\mathcal{Q}^{eff, \varpi}(F, \sigma) = \text{Bti}^* \chi(\Omega_{/F}^\bullet) \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}^\varpi(F, \sigma) = \text{Bti}^* \chi(\Omega_{/F}).$$

Ce sont des complexes de k -espaces vectoriels et on dispose d’un diagramme commutatif évident

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}^{eff}(k, \sigma) & \longrightarrow & \mathcal{Q}^{eff, \varpi}(F, \sigma) & \longrightarrow & \mathcal{P}^{eff, \varpi}(F, \sigma) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P}(k, \sigma) & \longrightarrow & \mathcal{Q}^\varpi(F, \sigma) & \longrightarrow & \mathcal{P}^\varpi(F, \sigma). \end{array}$$

On peut adapter la preuve de [2, Théorème 2.93] pour obtenir

$$\mathcal{Q}^\varpi(F, \sigma) = \mathcal{Q}^{eff, \varpi}(F, \sigma)[\underline{2\pi i}^{-1}].$$

Le complexe $\mathcal{Q}^{eff, \varpi}(F, \sigma)$ apparaît déjà dans [5] ; voir [5, Théorème 3.21 et Proposition 3.22]. De plus, [5, Théorème 3.21] entraîne aussitôt le résultat suivant.

PROPOSITION 2.1. *Le morphisme $\mathcal{Q}^\varpi(F, \sigma) \longrightarrow \mathcal{P}^\varpi(F, \sigma)$ induit un quasi-isomorphisme*

$$\mathcal{Q}^\varpi(F, \sigma) \otimes_F \widehat{F}[\ln \varpi] \simeq \mathcal{P}^\varpi(F, \sigma)$$

avec $\widehat{F} = k(\varpi^{1/r}; r \in \mathbb{N}^\times)$.

REMARQUE 2.2. On avertit le lecteur que la relation entre $\mathcal{Q}^{eff, \varpi}(F, \sigma)$ et $\mathcal{P}^{eff, \varpi}(F, \sigma)$ n'est pas bien comprise ; ceci est lié à l'introduction du complexe $\mathcal{P}^{eff, \varpi}(F, \sigma)$ dans [5, (102)] ; voir aussi [5, Remarque 3.17].

En fait, [5, Théorème 3.21] entraîne aussi que $\mathcal{Q}^{eff, \varpi}(F, \sigma)$ et $\mathcal{Q}^\varpi(F, \sigma)$ sont (-1) -connexes. Comme dans le Point 2.1.12, on pose

$$\mathbf{Q}^{eff, \varpi}(F, \sigma) = H_0(\mathcal{Q}^{eff, \varpi}(F, \sigma)) \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) = H_0(\mathcal{Q}^\varpi(F, \sigma)).$$

Grâce à la Proposition 2.1, on a un isomorphisme

$$(11) \quad \mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) \otimes_F \widehat{F}[\ln \varpi] \simeq \mathbf{P}^\varpi(F, \sigma).$$

Il n'est pas difficile de se convaincre que le second morphisme d'évaluation du Point 2.1.13 est l'identité sur $\widehat{F}[\ln \varpi]$ (modulo l'identification (11)). De plus, sa restriction à $\mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma)$ a été calculée dans [5, Théorème 4.21]. On sait en particulier que l'image de cette restriction est contenue dans $\mathbb{C}((\varpi))$. On dispose donc d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(k, \sigma) & \longrightarrow & \mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}((\varpi)). \end{array}$$

Le Point 2.1.14 entraîne aussitôt le résultat suivant.

THÉORÈME 2.3. *Le morphisme*

$$(12) \quad \int : \mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}(k, \sigma), f} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}((\varpi)),$$

induit par le carré ci-dessus, est injectif.

Rappelons, voir la Notation 1.9, que $\mathcal{P}(k, \sigma)$ est l'image du morphisme d'intégration $\int : \mathbf{P}(k, \sigma) \longrightarrow \mathbb{C}$. (On utilise ici [2, Proposition 2.108].) La $\mathbf{P}(k, \sigma)$ -algèbre $\mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma)$ est plate. En effet, $\text{Spec}(\mathbf{P}^\varpi(F, \sigma))$ est un torseur sous le groupe de Galois motivique relatif $\mathbf{G}_{/k}^{rel, \varpi}(F, \sigma)$ défini sur $\text{Spec}(\mathbf{P}(k, \sigma))$. (Voir la preuve de [5, Proposition 3.26].) On peut donc raffiner le Théorème 2.3 par l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2.4. *Le morphisme*

$$(13) \quad \int : \mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}(k, \sigma)} \mathcal{P}(k, \sigma) \longrightarrow \mathbb{C}((\varpi)),$$

induit par le carré ci-dessus, est injectif.

Dans [5], nous avons montré comment déduire le Théorème 1.1 du Théorème 2.4 en calculant explicitement le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}(k, \sigma)} \mathcal{P}(k, \sigma)$ par générateurs et relations (voir [5, Théorème 3.21]), et en calculant l’action du morphisme (12) sur ces générateurs (voir [5, Théorème 4.21]). Plus précisément, nous avons démontré le résultat suivant.

THÉORÈME 2.5. *Il existe un isomorphisme canonique (voir la Notation 1.9) :*

$$(14) \quad \mathcal{P}^\dagger(k, \sigma) \simeq \mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}(k, \sigma)} \mathcal{P}(k, \sigma).$$

De plus, modulo cette identification, le morphisme (12) coïncide avec le morphisme d’intégration terme à terme (i.e., le second morphisme dans (6)).

PREUVE. Il s’agit de [5, Théorème 3.21, Proposition 3.22 et Théorème 4.21]. □

Dans cette note, nous appliquons la même méthode pour obtenir le Théorème 1.7 à partir du Théorème 2.3. La seule différence réside dans le calcul de $\mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}(k, \sigma)} \mathcal{P}(k, \sigma)$: nous en donnerons une présentation bien plus économe en générateurs et relations. En fait, nous démontrerons le résultat suivant.

THÉORÈME 2.6. *Il existe un isomorphisme canonique (voir la Notation 1.9) :*

$$(15) \quad \mathcal{F}^\dagger(k) \otimes_k \mathcal{P}(k, \sigma) \simeq \mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}(k, \sigma)} \mathcal{P}(k, \sigma).$$

De plus, modulo cette identification, le morphisme (12) coïncide avec le morphisme d’intégration terme à terme (i.e., celui induit par le premier morphisme dans (6)).

La preuve du Théorème 2.6 sera donnée dans la Sous-section 2.4. Clairement, le Théorème 1.12 est une conséquence des Théorèmes 2.5 et 2.6. De même, le Théorème 1.7 découle aussitôt des Théorèmes 2.4 et 2.6. (Aussi, le Théorème 1.11, qui répare [5, Théorème 4.25], découle aussitôt des Théorèmes 2.4 et 2.5.)

2.3. Un autre résultat de [5]. On rappelle un dernier résultat de [5] concernant les foncteurs de spécialisation canoniques χ du Point 2.1.6. Ce résultat, qui repose sur l’analyse fine des préfaisceaux avec transferts surconvergentes et invariants par homotopie [4, §2.4], joue un rôle crucial dans la preuve que (14) est un isomorphisme. Il jouera un rôle tout à fait parallèle dans la preuve que (15) est un isomorphisme.

On rappelle d’abord quelques notations de [5, pages 930–931]. Soit X un k -schéma lisse. On note $Q^{rig}(X)$ la fibre générique de la complétion formelle de $X \otimes_k K^\circ$ en sa fibre spéciale. On note aussi $Q^{geo}(X) = X \otimes_k F$. On dispose d’une immersion ouverte $Q^{rig}(X) \hookrightarrow (Q^{geo}(X))^{anr}$.

Supposons de plus que X est affine et posons $A = \mathcal{O}(X)$. On définit un pro-schéma $Q_{\acute{e}t}^{rig}(X)$ de la manière suivante. On note $\mathcal{V}_{\acute{e}t}(Q^{rig}(X)/Q^{geo}(X))$ la catégorie ayant pour

objets les couples (U, u) avec U un $Q^{geo}(X)$ -schéma étale et $u : Q^{rig}(X) \rightarrow U^{anr}$ un morphisme de K -variétés analytiques rigides tel que le triangle

$$\begin{array}{ccc} Q^{rig}(X) & \xrightarrow{u} & U^{anr} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & (Q^{geo}(X))^{anr} \end{array}$$

commute. La catégorie $\mathcal{V}_{\text{ét}}(Q^{rig}(X)/Q^{geo}(X))$ est cofiltrante et le foncteur $\text{Spec}(-)$, restreint à l'ensemble ordonné des sous- $(A \otimes_k F)$ -algèbres étales de $A[[\varpi]][[\varpi^{-1}]$, est cofinal. Le foncteur d'oubli

$$Q_{\text{ét}}^{rig}(X) : \mathcal{V}_{\text{ét}}(Q^{rig}(X)/Q^{geo}(X)) \rightarrow \text{Sm}/F,$$

qui à un couple (U, u) associe le F -schéma U , définit un pro- F -schéma étale au-dessus de $Q^{geo}(X)$. D'après [5, Lemme 2.26], on a, avec la Notation 1.6,

$$(16) \quad \mathcal{O}(Q_{\text{ét}}^{rig}(X)) = \mathcal{O}_{alg}^{\dagger}(X).$$

On rappelle la définition suivante (voir [5, Définition 2.23]).

DEFINITION 2.7. Soit L un préfaisceau avec transferts sur Sm/F . On note $\Omega_*(L)$ le préfaisceau avec transferts sur Sm^{af}/k obtenu en posant

$$\Omega_*(L)(X) = L(Q_{\text{ét}}^{rig}(X))$$

pour tout $X \in \text{Sm}^{af}/k$. (Bien entendu, Sm^{af}/k est la catégorie des k -schémas affines et lisses.)

Le foncteur Ω_* s'étend aux catégories des complexes et des T -spectres. On peut maintenant énoncer le résultat crucial suivant.

THÉORÈME 2.8. Soit \mathbf{E} un T -spectre en complexes de préfaisceaux avec transferts sur Sm/F . Alors, le T -spectre $\Omega_*(\mathbf{E})$, vu comme objet de $\mathbf{DM}(k)$, est canoniquement isomorphe à l'image de \mathbf{E} par le foncteur $\chi : \mathbf{DM}(F) \rightarrow \mathbf{DM}(k)$. La variante effective de cet énoncé est également vraie.

PREUVE. Pour la variante effective, on renvoie le lecteur à [5, Théorème 2.24]. Pour la variante stable, on renvoie le lecteur à [5, Théorème 2.32]. □

2.4. Fin de la démonstration. Nous démontrons ici le Théorème 2.6 ce qui achèvera la preuve du Théorème 1.7.

REMARQUE 2.9. Avant de se lancer dans la preuve du Théorème 2.6, nous en donnons une esquisse. Rappelons que $\mathbf{Q}^{\varpi}(F, \sigma) = \text{H}_0(\mathbf{Q}^{\varpi}(F, \sigma))$ avec

$$\mathbf{Q}^{\varpi}(F, \sigma) = \text{Bti}^* \chi(\Omega_{/F}).$$

Nous allons d'abord calculer le complexe de k -espaces vectoriels $\text{Bti}^* \chi(\Omega_{/F})$. Dans [5], ce complexe est calculé en utilisant le modèle explicite du foncteur $\text{Bti}^* \chi$ fourni par

[5, Corollaire 2.33]. Dans cette note, on remarque plutôt que $\chi(\Omega_{/F})$ est isomorphe à $R \operatorname{hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbb{Q}(0), \chi(\Omega_{/F})) \otimes_k \Omega_{/k}$ ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^\varpi(F, \sigma) &\simeq R \operatorname{hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbb{Q}(0), \chi(\Omega_{/F})) \otimes_k \operatorname{Bti}^*(\Omega_{/k}) \\ &\simeq R \operatorname{hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbb{Q}(0), \chi(\Omega_{/F})) \otimes_k \mathcal{P}(k, \sigma). \end{aligned}$$

Nous calculons ensuite le complexe $R \operatorname{hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbb{Q}(0), \chi(\Omega_{/F}))$ en utilisant le Théorème 2.8 et nous trouvons que

$$R \operatorname{hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbb{Q}(0), \chi(\Omega_{/F})) \simeq \mathcal{F}^\dagger(k).$$

L’isomorphisme (15) en découle aussitôt. Il reste alors à vérifier la compatibilité de (12) avec le morphisme d’intégration terme à terme. Il est possible de déduire cela de [5, Théorème 4.21].

Pour $M \in \mathbf{DM}(k)$, il sera pratique de poser

$$\Gamma(M) = R \operatorname{hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbb{Q}(0), M).$$

Clairement, on a aussi $\Gamma(M) = R\Gamma(k, \operatorname{RE}_{V_0}(M))$. Nous allons d’abord démontrer le résultat suivant.

PROPOSITION 2.10. *Il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{DM}(k)$:*

$$(17) \quad \Gamma(\chi(\Omega_{/F})) \otimes_k \Omega_{/k} \simeq \chi(\Omega_{/F}).$$

Les T -spectres symétriques $\Omega_{/k}$ et $\chi(\Omega_{/F})$ sont naturellement des algèbres commutatives ; leur produit est induit par le produit extérieur des formes différentielles. De plus, le morphisme évident $\Omega_{/k} \rightarrow \chi(\Omega_{/F})$ est un morphisme d’algèbres. On peut donc voir $\chi(\Omega_{/F})$ comme un module au-dessus de $\Omega_{/k}$. La Proposition 2.10 est donc un cas particulier du résultat plus général suivant. (Ci-dessous, on note $\mathbf{DM}(k)_k$ la variante k -linéaire de $\mathbf{DM}(k)$, i.e., où les objets sont les T -spectres symétriques en complexes de préfaisceaux avec transferts à valeurs dans les k -espaces vectoriels.)

PROPOSITION 2.11. *Soit R un objet de $\mathbf{DM}(k)_k$ muni d’une structure de $\Omega_{/k}$ -module. Alors, la composition de*

$$(18) \quad \Gamma(R) \otimes_k \Omega_{/k} \longrightarrow R \otimes_k \Omega_{/k} \longrightarrow R$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{DM}(k)_k$.

PREUVE. Ce résultat est bien connu : il s’agit d’un cas particulier de [6, Theorem 2.6.2]. La preuve étant simple, nous en donnons une esquisse qu’on divise en deux parties. Dans la première, on traite le cas des $\Omega_{/k}$ -modules libres (plus précisément, librement engendré par un objet de $\mathbf{DM}(k)_k$). Dans la seconde, on traite le cas général.

Partie A. Soit $M \in \mathbf{DM}(k)_k$. Dans cette partie, nous montrons que le morphisme canonique

$$(19) \quad \Gamma(M \otimes_k \Omega/k) \otimes_k \Omega/k \longrightarrow M \otimes_k \Omega/k$$

est un isomorphisme. Il y a plusieurs façons de voir cela. Une façon, peu satisfaisante, est d'invoquer le résultat analogue pour $\mathbf{Bti}_* \mathbb{Q}$ (qui découle de [2, Proposition 2.7(b)]) et de conclure à l'aide du théorème de comparaison de Grothendieck (sous la forme [2, Proposition 2.92]).

On peut donner une preuve plus directe qui est celle de [6]. Étant donné que les deux membres dans (19) commutent aux sommes directes infinies en M , il suffit de traiter le cas où M appartient à un système de générateurs compacts. Ainsi, on peut supposer que $M = M^\vee(X)(r)$, avec X un k -schéma affine et lisse, et $r \in \mathbb{Z}$. (Ici, $M^\vee(X) = \underline{\mathbf{hom}}(X, k(0))$ est le dual fort du motif de X .) Or, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a $\Omega/k(r) \simeq \Omega/k$. (En effet, par construction, on a $s_- \Omega/k = \Omega/k[1]$, ce qui équivaut à dire que $T \otimes \Omega/k \simeq \Omega/k[1]$ grâce à [1, Théorème 4.3.38(3)].) Ainsi, en fin de compte, on se ramène à traiter le cas de $M = \underline{\mathbf{hom}}(X, k(0))$. Dans ce cas, on a des identifications canoniques

$$M \otimes_k \Omega/k \simeq \underline{\mathbf{hom}}(X, \Omega/k) \simeq \Omega/k(X) \otimes_k \Omega/k$$

où le second isomorphisme est déduit de la formule de Kunneth pour la cohomologie de De Rham. (On utilise ici que X est supposé affine.) Ceci permet de conclure.

Partie B. On traite maintenant le cas général. L'action de Ω/k sur R définit un morphisme de Ω/k -modules

$$(20) \quad R \otimes_k \Omega/k \longrightarrow R$$

où le membre de gauche est munie de la structure de Ω/k -module libre évidente. L'unité de Ω/k induit une section, non Ω/k -linéaire, au morphisme (20). Il s'ensuit que le morphisme de $\mathbf{D}(k)$:

$$(21) \quad \Gamma(R \otimes_k \Omega/k) \longrightarrow \Gamma(R)$$

admet aussi une section. Considérons à présent la composition de

$$R \longrightarrow R \otimes_k \Omega/k \simeq \Gamma(R \otimes_k \Omega/k) \otimes_k \Omega/k \xrightarrow{(21)} \Gamma(R) \otimes_k \Omega/k.$$

(L'isomorphisme au milieu est celui obtenu dans la partie A.) Cette composition est clairement une section au morphisme (18). Pour conclure, il suffit de montrer que cette composition est un épimorphisme (i.e., qu'elle admet elle même une section dans $\mathbf{DM}(k)_k$). Pour ce faire, on considère le diagramme commutatif déduit par naturalité du morphisme (20) :

$$\begin{array}{ccccccc} R \otimes_k \Omega/k & \longrightarrow & (R \otimes_k \Omega/k) \otimes_k \Omega/k & \xleftarrow{\sim} & \Gamma(R \otimes_k \Omega/k \otimes_k \Omega/k) \otimes_k \Omega/k & \xrightarrow{m} & \Gamma(R \otimes_k \Omega/k) \otimes_k \Omega/k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & R \otimes_k \Omega/k & \xleftarrow{\sim} & \Gamma(R \otimes_k \Omega/k) \otimes_k \Omega/k & \xrightarrow{(21)} & \Gamma(R) \otimes_k \Omega/k. \end{array}$$

Les flèches verticales sont des épimorphismes. De plus, la composition de la première ligne horizontale est un isomorphisme car elle est une section au morphisme (18) avec « R »

remplacé par « $R \otimes_k \Omega_{/k}$ » et que ce dernier est inversible d’après la partie A. Ceci permet de conclure. \square

COROLLAIRE 2.12. *Il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}(k)$:*

$$(22) \quad \Gamma(\chi(\Omega_{/F})) \otimes_k \mathcal{P}(k, \sigma) \simeq \mathcal{Q}^\varpi(F, \sigma).$$

COROLLAIRE 2.13. *Il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}(k)$:*

$$(23) \quad H_0(\Gamma(\chi(\Omega_{/F}))) \otimes_k \mathcal{P}(k, \sigma) \simeq \mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}(k, \sigma)} \mathcal{P}(k, \sigma).$$

PREUVE. Les complexes $\mathcal{P}(k, \sigma)$ et $\mathcal{Q}^\varpi(F, \sigma)$ sont (-1) -connexes. D’après le Corollaire 2.12, il s’ensuit que $\Gamma(\chi(\Omega_{/F}))$ est aussi (-1) -connexe. On peut donc passer au « H_0 » dans (22) pour obtenir un isomorphisme de k -espaces vectoriels

$$(24) \quad H_0(\Gamma(\chi(\Omega_{/F}))) \otimes_k \mathbf{P}(k, \sigma) \simeq \mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma).$$

On applique maintenant le foncteur $-\otimes_{\mathbf{P}(k, \sigma)} \mathcal{P}(k, \sigma)$ pour conclure. \square

On continue avec le résultat suivant.

THÉORÈME 2.14. *Il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}(k)$:*

$$(25) \quad \Gamma(\chi(\Omega_{/F})) \simeq \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{\Omega}_{alg}^{\dagger, \infty - \bullet}(\mathbb{A}_k^\infty \times_k (\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n})$$

où $\widetilde{\Omega}_{alg}^{\dagger, \infty - \bullet}(\mathbb{A}_k^\infty \times_k (\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n})$ est le complexe placé en degrés homologiques positifs et défini de la manière suivante. Pour $d \in \mathbb{N}$, on a

$$\widetilde{\Omega}_{alg}^{\dagger, \infty - d}(\mathbb{A}_k^\infty \times_k (\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n}) = \bigoplus_{\substack{I \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}, J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \operatorname{card}(I) + \operatorname{card}(J) = d}} \mathcal{O}_{alg}^{\dagger, (I), (J)}(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^n) \cdot d \ln \hat{t}_J \wedge d \hat{z}_I$$

où $\mathcal{O}_{alg}^{\dagger, (I), (J)}(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty)$ est le sous- F -espace vectoriel de $\mathcal{O}_{alg}^{\dagger}(\mathbb{A}_k^\infty \times_k \mathbb{E}_k^\infty)$ formé des séries de Laurent G telles que $G|_{z_i = \varepsilon} = 0$ pour $i \in I$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$, et $G|_{t_j = 1} = 0$ pour $j \in J$. Le symbole $d \hat{z}_I$ désigne le produit extérieur infini suivant l’ordre évident des dz_u pour $u \notin I$. De même, $d \ln \hat{t}_J$ désigne le produit extérieur fini suivant l’ordre évident des $d \ln t_v$ pour $v \notin J$. De plus, la différentielle de ce complexe est celle de De Rham. Enfin, le morphisme de transition en $n \in \mathbb{N}$ dans la colimite (25) est donné par $d \ln t_{n+1} \wedge (-)$.

PREUVE. D’après le Théorème 2.8, on a $\chi(\Omega_{/F}) \simeq \Omega_*(\Omega_{/F}) = \{\Omega_*(\Omega_{/F}^\bullet[n])\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbf{DM}(k)$. D’après la Proposition 2.15 ci-dessous, il s’ensuit que

$$(26) \quad \begin{aligned} \Gamma(\chi(\Omega_{/F})) &\simeq \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Tot} C_\bullet(\Omega_*(\Omega_{/F}^\bullet[n])(\mathbb{A}_k \times_k (\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n})) \\ &= \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Tot} C_\bullet(\Omega_{/F}^\bullet(Q_{\text{ét}}^{rig}(\mathbb{A}_k \times_k (\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n}))[n]). \end{aligned}$$

Ci-dessus, \mathbb{A}_k est le k -schéma cocubique Σ -enrichi usuel (voir [2, Exemples A.2, A.7 et A.13]) et « C_\bullet » désigne le complexe simple associé à un objet cubique à valeurs dans une catégorie additive karoubienne (voir [2, Définition A.4]).

Le reste du calcul est une application de [2, Proposition 2.100]. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'un complexe de $W(F)$ -modules cubiques Σ -enrichis (au sens de [5, Définition 2.94]) :

$$M_n^\bullet = \Omega_{/\mathbb{A}_F}^\bullet(Q_{\text{ét}}^{\text{rig}}(\mathbb{A}_k \times_k (\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n}))$$

concentré en degrés cohomologiques $0 \leq e \leq n$ où il est donné par (27)

$$M_n^e = \Omega_{/\mathbb{A}_F}^e(Q_{\text{ét}}^{\text{rig}}(\mathbb{A}_k \times_k (\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n})) = \bigoplus_{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \text{card}(J)=n-e} \mathcal{O}_{\text{alg}}^{\dagger, (J)}(\mathbb{A}_k \times_k \mathbb{E}_k^n) \cdot d \ln \hat{t}_J.$$

Ci-dessus, $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\dagger, (J)}(\mathbb{A}_k^m \times_k \mathbb{E}_k^n)$ est le sous- F -espace vectoriel de $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\dagger}(\mathbb{A}_k^m \times_k \mathbb{E}_k^n)$ formé des séries de Laurent G tels que $G|_{t_j=1} = 0$ pour $j \in J$ et $d \ln \hat{t}_J$ est le produit extérieur dans l'ordre croissant des $d \ln t_v$, pour $v \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus J$. Notons aussi que dans (27), nous avons utilisé l'identification (16). Avec la notation de [2, Définition 2.97], on a tautologiquement :

$$\text{Tot}(\text{DR}_\bullet(M_n^\bullet)) \simeq \text{Tot } C_\bullet(\Omega_{/F}^\bullet(Q_{\text{ét}}^{\text{rig}}(\mathbb{A}_k \times_k (\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n}))).$$

On peut donc réécrire l'isomorphisme (26) de la manière suivante.

$$\Gamma(\chi(\Omega_{/F})) \simeq \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \text{Tot}(\text{DR}_\bullet(M_n^\bullet[n])).$$

De plus, les morphismes de transition dans la colimite ci-dessus sont induits par les morphismes de complexes de $W(F)$ -modules cubiques Σ -enrichis

$$d \ln t_{n+1} \wedge - : M_n^\bullet[n] \longrightarrow M_{n+1}^\bullet[n+1].$$

D'après [2, Proposition 2.100], il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}(F)$:

$$\text{Tot}(\text{DR}_\bullet(M_n^\bullet)) \simeq \text{Tot}(\tilde{\Omega}^{\infty-\bullet}(M_n^\bullet)).$$

Le bicomplexe $\tilde{\Omega}^{\infty-\bullet}(M_n^\bullet)$ admet la description suivante (voir [2, Définition 2.99]). Pour $c \in \mathbb{N}$ et $0 \leq e \leq n$, $\tilde{\Omega}^{\infty-c}(M_n^e)$ est la colimite de la \mathbb{N} -suite

$$\left\{ \bigoplus_{\substack{I \subset \llbracket 1, m \rrbracket, J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \text{card}(I)=c, \text{card}(J)=n-e}} \mathcal{O}_{\text{alg}}^{\dagger, (I), (J)}(\mathbb{A}_k^m \times_k \mathbb{E}_k^n) \cdot d \ln \hat{t}_J \wedge d \hat{z}_I \right\}_{m \in \mathbb{N}}$$

où les morphismes de transitions sont donnés par $\{(-) \wedge dz_{m+1}\}_{m \in \mathbb{N}}$. Les différentielles sont celles de De Rham. Ceci permet de conclure. □

La proposition ci-dessus a servi dans la preuve du Théorème 2.14.

PROPOSITION 2.15. *Soit \mathbf{E} un T -spectre en complexes de préfaisceaux avec transferts sur Sm/k . Alors, il existe un isomorphisme canonique*

$$\Gamma(\mathbf{E}) = \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \text{Tot } C(\mathbf{E}_n(\mathbb{A}_k \times_k (\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n})).$$

PREUVE. Il s’agit d’une conséquence bien connue de la théorie des préfaisceaux avec transferts invariants par homotopie développée par Voevodsky [13, 12]. Pour la commodité du lecteur on explique l’argument.

Étant donné un complexe de préfaisceaux avec transferts L , on pose

$$\underline{\mathbf{Sg}}^{\mathbb{A}}(L) = \text{Tot } C(\underline{\text{hom}}(\mathbb{A}_k, L));$$

il s’agit de la version cubique de la construction de Suslin–Voevodsky. Par construction, les préfaisceaux d’homologie de $\underline{\mathbf{Sg}}^{\mathbb{A}}(L)$ sont invariants par homotopie. Grâce à [12, Theorem 24.1], ceci entraîne qu’ils sont strictement invariants par homotopie. Autrement dit, le complexe de préfaisceaux avec transferts $\underline{\mathbf{Sg}}^{\mathbb{A}}(L)$ est \mathbb{A}^1 -local, i.e., un remplacement ét-fibrant de $\underline{\mathbf{Sg}}^{\mathbb{A}}(L)$ est un remplacement $(\mathbb{A}^1, \text{ét})$ -fibrant de L . Il s’ensuit que

$$H_{\text{ét}}^i(X, \underline{\mathbf{Sg}}^{\mathbb{A}}(L)) \simeq \text{hom}_{\mathbf{DM}^{\text{eff}}(k)}(\mathbb{Q}_{\text{tr}}(X), L[i])$$

pour tout k -schéma lisse X .

Par ailleurs, un autre théorème de Voevodsky [12, Proposition 24.8] affirme que si F est un préfaisceau avec transferts invariant par homotopie, on a

$$H_{\text{ét}}^i(\mathbb{E}_k^n, F) = \begin{cases} F(\mathbb{E}_k^n) & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$

Il s’ensuit de ce qui précède que le morphisme évident

$$\Gamma((\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n}, \underline{\mathbf{Sg}}^{\mathbb{A}}(L)) \longrightarrow \mathbf{R}\Gamma_{\text{ét}}((\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n}, \underline{\mathbf{Sg}}^{\mathbb{A}}(L)) \simeq \mathbf{R}\text{hom}_{\mathbf{DM}^{\text{eff}}(k)}(\mathbb{Q}_{\text{tr}}((\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n}), L)$$

est un quasi-isomorphisme. Or, le membre de gauche s’identifie tautologiquement au complexe $\text{Tot } C(L(\mathbb{A}_k \times_k (\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n}))$. Ainsi, pour conclure, il suffit de montrer que $\Gamma(\mathbf{E})$ est donné par

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{R}\text{hom}_{\mathbf{DM}^{\text{eff}}(k)}(\mathbb{Q}_{\text{tr}}((\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n}), \mathbf{E}_n).$$

Ceci est une propriété formelle qui découle par exemple de [1, Théorème 4.3.61]. □

Le Théorème 2.14 entraîne aussitôt le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.16. *Il existe un isomorphisme canonique de k -espaces vectoriels*

$$H_0(\Gamma(\chi(\mathcal{O}_F))) \simeq \mathcal{F}^\dagger(k).$$

REMARQUE 2.17. Il découle de [3, Théorème 2.55] que $\Gamma(\chi(\mathcal{O}_F))$ n’a d’homologie qu’en degré zéro. (Il en est donc de même du complexe explicite

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{O}}_{\text{alg}}^{\dagger, \infty-\bullet}(\mathbb{A}_k^\infty \times_k (\mathbb{E}_k^1, 1)^{\wedge n})$$

d’après le Théorème 2.14.) Nous ne donnerons pas l’argument ici car nous n’aurons pas besoin de ce résultat dans cette note.

L’isomorphisme (15) du Théorème 2.6 est maintenant une conséquence des Corollaires 2.13 et 2.16. Il reste à voir que cet isomorphisme est compatible aux morphismes d’intégration. Concrètement, nous devons montrer le résultat suivant.

PROPOSITION 2.18. *La composition de*

$$\mathcal{P}(k, \sigma) \hookrightarrow \mathcal{F}^\dagger(k) \otimes_k \mathcal{P}(k, \sigma) \simeq \mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}(k, \sigma)} \mathcal{P}(k, \sigma) \longrightarrow \mathbb{C}((\varpi))$$

est donnée par l'intégration terme à terme des séries de Laurent.

PREUVE. Nous donnons seulement une idée de la preuve. D'après [5, Théorème 4.21], la composition de

$$\mathcal{P}^\dagger(F, \sigma) \simeq \mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}(k, \sigma)} \mathcal{P}(k, \sigma) \longrightarrow \mathbb{C}((\varpi))$$

est donnée par l'intégration terme à terme des séries de Laurent. Par ailleurs, en retraçant la construction des isomorphismes (14) et (15), on peut montrer que la composition de

$$\mathcal{P}(k, \sigma) \hookrightarrow \mathcal{F}^\dagger(k) \otimes_k \mathcal{P}(k, \sigma) \simeq \mathbf{Q}^\varpi(F, \sigma) \otimes_{\mathbf{P}(k, \sigma)} \mathcal{P}(k, \sigma) \simeq \mathcal{P}^\dagger(F, \sigma)$$

envoie la classe d'une série de Laurent $F = F(z_1, \dots, z_m, t_1, \dots, t_n, \varpi) \in \mathcal{O}_{alg}^\dagger(\mathbb{A}_k^m \times_k \mathbb{E}^n)$ sur la série de Laurent

$$\frac{\gamma'(z_{m+1})}{\gamma(z_{m+1})} \dots \frac{\gamma'(z_{m+n})}{\gamma(z_{m+n})} \cdot F(z_1, \dots, z_m, \gamma(z_{m+1}), \dots, \gamma(z_{m+n}), \varpi) \in \mathcal{O}_{k-alg}^\dagger(\overline{\mathbb{D}}^{m+n}).$$

Ci-dessus, $\gamma : (\overline{\mathbb{D}}_{\text{ét}}^1, \{0, 1\}) \longrightarrow (\mathbb{E}_k^1, 1)$ désigne un relèvement du $\gamma \in H_1^{\text{sing}}(\mathbb{E}^1, an) \simeq H_1(\mathbf{Sg}_{\text{ét}}^{\mathbb{D}}(T))$ fixé dans le Point 2.1.11. (Voir [5, Définition 2.20 et Théorème 2.21].) Le résultat découle maintenant de la formule de changement de base du calcul intégral. \square

RÉFÉRENCES

- [1] JOSEPH AYOUB, Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. II, *Astérisque* (2007), no. 315, vi+364 pp. (2008). 2438151 (2009m :14007)
- [2] JOSEPH AYOUB, L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, I, *J. Reine Angew. Math.* 693 (2014), 1–149. MR3259031
- [3] JOSEPH AYOUB, L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, II, *J. Reine Angew. Math.* 693 (2014), 151–226. MR3259032
- [4] JOSEPH AYOUB, Motifs des variétés analytiques rigides, *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2015), no. 140–141, vi+386. MR3381140
- [5] JOSEPH AYOUB, Une version relative de la conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier, *Ann. of Math. (2)* 181 (2015), no. 3, 905–992. MR3296818
- [6] DENIS-CHARLES CISINSKI AND FRÉDÉRIC DÉGLISE, Mixed Weil cohomologies, *Adv. Math.* 230 (2012), no. 1, 55–130. MR2900540
- [7] P. DELIGNE, Intégration sur un cycle évanescents, *Invent. Math.* 76 (1984), no. 1, 129–143. MR739629
- [8] MICHEL FLIESS, Sur divers produits de séries formelles, *Bull. Soc. Math. France* 102 (1974), 181–191. MR0354647
- [9] HARRY FURSTENBERG, Algebraic functions over finite fields, *J. Algebra* 7 (1967), 271–277. MR0215820
- [10] R. JUNGEN, Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébriques-logarithmiques sur leur cercle de convergence, *Comment. Math. Helv.* 3 (1931), no. 1, 266–306. MR1509439
- [11] FLORENCE LECOMTE AND NATHALIE WACH, Le complexe motivique de Rham, *Manuscripta Math.* 129 (2009), no. 1, 75–90. MR2496957
- [12] CARLO MAZZA, VLADIMIR VOEVODSKY AND CHARLES WEIBEL, Lecture notes on motivic cohomology, *Clay Mathematics Monographs*, vol. 2, American Mathematical Society, Providence, RI ; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006. MR2242284 (2007e :14035)

- [13] VLADIMIR VOEVODSKY, ANDREI SUSLIN AND ERIC M. FRIEDLANDER, Cycles, transfers, and motivic homology theories, *Annals of Mathematics Studies*, vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000. MR1764197 (2001d :14026)

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT ZÜRICH
WINTERTHURERSTR. 190, CH-8057 ZÜRICH
SWITZERLAND

CNRS, LAGA
UNIVERSITÉ PARIS 13
99 AVENUE J.B. CLÉMENT
93430 VILLETANEUSE
FRANCE

E-mail address: joseph.ayoub@math.uzh.ch