QUELQUES PROPOSITIONS ÉQUIVALENTES À L'HYPOTHÈSE DU CONTINU.*)

Par

Tamotsu Tsuchikura.

§ 1. Dans ce § nous démontrerons l'équivalence entre l'hypothèse **H** ($\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$) et la suivante

Proposition P: Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots$ telle que

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ pour tout $x \varepsilon S$ (S désignant l'ensemble de tous les nombres réels),

(ii) cette convergence n'est pas uniforme sur tout ensemble indénombrable,

(iii) pour tout couple de deux nombres réels x, x' qui appartiennent à un certain ensemble K de puissance du continu, l'un au moins de deux limites supérieures

$$\limsup_{n\to\infty} |f_n(x)/f_n(x')|, \quad \limsup_{n\to\infty} |f_n(x')/f_n(x)|$$

est finie[1].

1. Nous prouverons d'abord le lemme suivant (sans faire usage de l'hypothèse **H**).

Lemme. Etant donnée une famille dénombrable de suites formées de nombres réels qui convergent vers zero, il existe une suite de nombres réels qui converge plue lentement[2] que chacune de ces suites données.

Demonstration. Soient $\Gamma_m = \{a_n^{(m)}\}_n$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(m)}=0$, $m=1, 2, 3, \cdots$) les suites données. Nous allons définir de nouvelles suites $\Delta_m = \{b_n^{(m)}\}_n$ ($m=1, 2, 3, \cdots$) par l'induction. Posons

$$\Delta_1 \equiv \{b_n^{(1)}\} \equiv \{\sqrt{|a_n^{(1)}|}\}_n,$$

et supposons que toutes les suites $\Delta_i \equiv \{b_n^{(i)}\}_n$ ($i=1,2,\cdots,k$) ont été définies. Soit

$$b_n^{(k+1)} = \max\left(\sqrt{b_n^{(1)}}, \sqrt{b_n^{(2)}}, \cdots, \sqrt{b_n^{(k)}}, \sqrt{|a_n^{(k+1)}|}\right), \quad (n=1, 2, \cdots).$$

---

*) Received April 8th, 1947.

1) Cf. W. Sierpinski, Hypothèse du continu, Warszawa-Lwów 1934, p. 52, Proposition C_9.

2) Pour deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ formées de nombres réels qui tendent vers zéro, si $\lim a_n/b_n=0$, nous dirons que $\{a_n\}$ converge vers zéro *plus rapidement* que $\{b_n\}$, ou encore que $\{b_n\}$ converge *plus lentement* que $\{a_n\}$.

Les suites Δ_m $(m=1, 2, \cdots)$ étant ainsi définies, on voit sans peine que $\lim_{n\to\infty} b_n^{(m)}=0$ $(m=1, 2, \cdots)$, et l'on a pour $1\leqq j<m$

$$b_n^{(j)}/b_n^{(m)}\leqq b_n^{(j)}/\sqrt{b_n^{(j)}}=\sqrt{b_n^{(j)}}\to 0 \quad (\text{lorsque } m\to\infty),$$

c.-à-d. la suite Δ_m converge plus lentement que toutes les suites Δ_j $(j=1, 2, \cdots, m)$, et de même que Γ_m.

Maintenant, par le méthode bien connu de du Bois-Reymond et Hadamard, on peut construire une suite de nombres réels qui converge plus lentement que toutes les suites Δ_m $(m=1, 2, \cdots)$, donc à plus forte raison que toutes les suites Γ_m $(m=1, 2, \cdots)$, c.q.f.d.

2. **H→P**. Admettons l'hypothèse **H.** L'ensemble F de toutes les suites formées de nombres rationnels qui tendent vers zéro, est de puissance $\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Il existe donc une suite transfinie

(1) $\qquad \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \cdots, \Gamma_\omega, \Gamma_{\omega+1}, \cdots, \Gamma_\alpha, \cdots \qquad (\alpha<\Omega)$

formée de toutes les suites de F.

Nous définirons par l'induction transfinie une nouvelle suite transfinie

(2) $\qquad \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots, \Delta_\omega, \Delta_{\omega+1}, \cdots, \Delta_\alpha, \cdots \qquad (\alpha<\Omega),$

comme il suit.

Soit d'abord Δ_1 une suite quelconque qui convege vers zéro plus lentement que Γ_1, et supposons que nous avons déjà défini pour un nombre ordinal $\alpha<\Omega$, toutes les suites Δ_β, $\beta<\alpha$. D'après le lemme il existe une suite Δ_α qui converge vers zéro plus lentement que toutes les suites $\Delta_\beta, \beta<\alpha$ et que Γ_α.

La suite transfinie (2) est ainsi définie.

Il est à remarquer que pour chaque suite Γ_α de F, l'ensemble de toutes les suites de (2) qui convergent plus rapidement que Γ_α est au plus dénombrable.

En vertu de l'hypothèse **H**, il existe une suite transfinie

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_\omega, x_{\omega+1}, \cdots, x_\alpha, \cdots \qquad (\alpha<\Omega)$$

formée de tous les nombres réels.

Posons pour tout nombre réel $x=x_\alpha$

(3) $\qquad f_n(x_\alpha)=$le n-ième terme de Δ_α, $(n=1, 2, 3, \cdots)$.

On a alors évidemment que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ pour tout $x \varepsilon S$. Et pour tout couple de deux nombres réels $x=x_\alpha$ et $x'=x_\beta$ (sans aucune exception), si $\alpha>\beta$, la définition (3) entraîne

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x_\beta)/f_n(x_\alpha)|=0.$$

Les propriétés (i) et (iii) sont ainsi vérfiées en posant $K=S$.

Il s'agit donc de prouver la propriété (ii). Supposons par contre qu'elle converge vers zéro uniformément sur un ensemble indénombrable E. Il existe alors pour tout nombre naturel p, un nombre naturel N_p tel que

$$|f_n(x)|<1/p^2 \quad \text{pour } n>N_p \text{ et } x \varepsilon E$$

(où N_p est determiné indépendantement de x, et l'on peut supposer que $N_1<N_2<\cdots$, $N_p\to\infty$ quand $p\to\infty$).

Posons pour $p=1, 2, 3, \cdots$,

$$s_n=1/p \quad \text{si } N_{p+1} \geqq n>N_p, \quad \text{et } s_n=1 \quad \text{si } n \leqq N_1.$$

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre naturel p tel que $1/p<\varepsilon$, on a donc si $N_{q+1} \geqq n>N_q\geqq N_p$,

$$\frac{|f_n(x)|}{s_n} < \frac{1/q^2}{1/q} = \frac{1}{q} \leqq \frac{1}{p} < \varepsilon \qquad \text{pour } x \varepsilon E,$$

c.-à-d. la suite $\{s_n\} \varepsilon F$ converge plus lentement que toutes les suites $\{f_n(x)\}$ ($x \varepsilon E$, E étant indénombrable) qui appartiennent à la suite transfinie (2).

Donc, d'après le remarque plus haut, une contradiction a lieu. Par conséquent la suite $\{f_n(x)\}$ converge non-uniformémement sur tout ensemble indénombrable.

L'implication $\mathbf{H}\to\mathbf{P}$ est ainsi établie.

3. $\mathbf{P}\to\mathbf{H}$. Admettons la proposition $\mathbf{P}$ et soit $E\subset K$ un ensemble quelconque de puissance $\aleph_1$.

Nous prouverons d'abord que pour tout nombre $x_0 \varepsilon K$, il existe un nombre $\xi_0=\xi_{x_0} \varepsilon E$ tel que

$$\limsup_{n\to\infty} |f_n(x_0)/f_n(\xi_0)|<\infty. \tag{4}$$

En effet, supposons par impossible que pour tout $\xi \varepsilon E$,

$$\limsup_{n\to\infty} |f_n(x_0)/f_n(\xi)| =\infty$$

c.-à-d. d'après la propriété (iii)

$$\limsup_{n\to\infty} |f_n(\xi)/f_n(x_0)| <\infty, \qquad \text{pour } \xi \varepsilon E.$$

Il en résulte que pour certains nombres naturels M_ξ et N_ξ

$$|f_n(\xi)/f_n(x_0)| <M_\xi, \qquad \text{pour } n<N_\xi.$$

L'ensemble E étant indénombrable et celui de tous les couples de deux nombres naturels étant dénombrable, il existe un couple de deux nombres naturels M', N' tel que l'inégalité

$$|f_n(\xi)/f_n(x_0)|<M', \qquad \text{pour } n>N'$$

a lieu pour une infinité indénombrable de nombres $\xi \varepsilon E$.

Soit E_1 leur ensemble. D'autre part pour tout nombre $\varepsilon>0$. il existe un nombre naturel N'' tel que

$$|f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{M'} \qquad \text{pour } n>N''.$$

On a par conséquent

$$|f_n(\xi)| = \left|\frac{f_n(\xi)}{f_n(x_0)}\right| \, |f_n(x_0)| < M' \cdot \frac{\varepsilon}{M'} = \varepsilon$$

pour $n >$ max (N', N'') et $\xi \varepsilon E_1$, c.-à-d. la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément sur l'ensemble indnombrable E_1, ce qui contredit notre propriété (ii).

Il correspond donc à tout nombre réel $x_0 \varepsilon K$ un élément $\xi_{x_0} \varepsilon E$ tel que la condition (4) est remplie.

Si $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, d'après ce qui précède, il existe un élément $\xi' \varepsilon E$ qui correspond à un nombre indénombrable d'éléments de K. En effet, si tout $\xi \varepsilon E$ correspond à un nombre au plus dénombrable d'élements de K, l'ensemble E étant de puissance $\aleph_1$, l'ensemble K est de puissance au plus $\aleph_1 \aleph_0 = \aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, contrairement à l'égalité $\overline{K} = 2^{\aleph_0}$.

Soit A l'ensemble indénombrable de tous les éléments de K auxquels correspond le nombre ξ'.

Le même raisonnement que nous avons vu plus haut entraîne l'existence d'un sous-ensemble indénombrable de A sur lequel la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément. Ce qui contredit la propriété (ii), on en conclut que $\aleph_1 \geqq 2^{\aleph_0}$ par conséquent que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. L'équivalence entre **H** et **P** est ainsi démontrée.

§ 2. Nous dirons que deux points sont séparés par la suite d'ensembles $\{E_n\}$, lorsque l'un d'eux est contenu dans lim inf E_n et l'autre est dehors de lim sup E_n. Ceci posé, nous allons prouver que l'hypothèse **H** équivaut à la proposition suivante:

Proposition Q: Il existe une double suite d'ensembles $\{B_k^i\}$ telle que

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} S &= B_1^1 + B_2^1 + \cdots\cdots + B_k^1 + \cdots\cdots, \\ S &= B_1^2 + B_2^2 + \cdots\cdots + B_k^2 + \cdots\cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ S &= B_1^i + B_2^i + \cdots\cdots + B_k^i + \cdots\cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}$$

(II) les ensembles d'une même ligne sont disjoints,

(III) quelle que soit la suite de nombres naturels $k_1, k_2, \cdots\cdot k_i, \cdots\cdot$ et n, le produit $\prod_{i=n}^{\infty} (B_1^i + B_2^i + \cdots\cdot + B_{k_i}^i)$ est au plus dénombrable,

(IV) deux points distincts arbitraires d'un certain ensemble K_1 de puissance du continu, peuvent être séparés par la suite d'énsembles de la forme $\{B_1^i + B_2^i + \cdots\cdot + B_{h_i}^i\}_i$[3].

1. Comme on voit dans la démonstration **H→P** du § précédent, la condition (iii) de **P** peut être remplacée par la condition suivante:

3) Cf. Sierpinski, loc. cit., p. 53, Proposition C_{11}.

(iii′) pour deux nombres arbitraires x, x' distincts qui appartiennent à un certain ensemble K de puissance du continu, l'un de deux limites

$$\lim_{n\to\infty} |f(x)/f_n(x')| \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} |f_n(x')/f_n(x)|$$

est zéro.

Soit $\mathbf{P}'$ la proposition ainsi obtenue. Les propositions $\mathbf{H}$ et $\mathbf{P}'$ sont équivalentes.

Remarquons ensuite que la condition (IV) de $\mathbf{Q}$ peut être remplacée par la condition (IV′) ci-dessous, sans perdre l'équivalence avec $\mathbf{Q}$— —désignons par $\mathbf{Q}'$ la proposition ainsi déduite.

(IV′) pour deux points distincts arbitraires x, $x' \varepsilon K_1$, si $x \varepsilon \prod_{i=1}^{\infty} B^i_{k_i}$ et $x' \varepsilon \prod_{i=1}^{\infty} B^i_{k'_i}$, on a alors ou bien $k_i > k'_i$, ou bien $k'_i > k_i$ pour presque tous les indices i.

Nous montrerons l'équivalence entre (IV) et (IV′) sous les conditions (I) et (II).

En admettant par exemple le premier cas de (IV′), on voit d'après (II) que $x' \varepsilon \liminf\ (B^i_1 + \cdots + B^i_{k'_i})$ et $x\ \varepsilon\ \limsup\ (B^i_1 + \cdots + B^i_{k'_i})$, donc la condition (IV) est vérifiée.

Réciproquement, si (IV) est remplie pour deux points $x \varepsilon \prod_{i=1}^{\infty} B^i_{k_i}$ et $x' \varepsilon \prod_{i=1}^{\infty} B^i_{k'_i}$ (on peut écrire dans cette forme selon (I)), nous pouvons poser par exemple

$$x\ \bar{\varepsilon}\ \limsup\ (B^i_1 + \cdots + B^i_{h_i})$$

et

$$x'\ \varepsilon\ \liminf\ (B^i_1 + \cdots + B^i_{h_i}).$$

Il résulte donc en vertu de (II) que $k'_i \leqq h_i$ et $k_i > h_i$, c.-à-d. $k_i > k'_i$ pour tous les indices i à partir du certain rang, on en conclut la condition (IV′).

D'après ces remarques il suffit de démontrer deux implications $\mathbf{P}' \to \mathbf{Q}'$ et $\mathbf{Q}' \to \mathbf{H}$.

2. $\mathbf{P}' \to \mathbf{Q}'$. Admettons $\mathbf{P}'$. Pour deux indices i et k, posons

$$B^i_k = \underset{x}{E}\,[\,|f_m(x)| < 1/i \quad \text{pour tout } m > k \text{ et } |f_k(x)| \geqq 1/i\,].$$

Evidemment les condition (I) et (II) sont remplies. Si l'ensemble

$$N = \prod_{i=n}^{\infty} (B^i_1 + \cdots + B^i_{k_i})$$

est indénombrable, on a d'après la définition de B^i_k,

$$|f_m(x)| < 1/i, \ m > k_i \ (i = n, n+1, \cdots)$$

pour tout $x \varepsilon N$, ce qui prouve que la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément sur N contrairement à la propriété (ii) de $\mathbf{P}'$. Nous avons donc la propriété (III).

Pour deux points x, $x' \varepsilon K$, posons $x \varepsilon \prod_{i=1}^{\infty} B^i_{k_i}$ et $x' \varepsilon \prod_{i=1}^{\infty} B^i_{k_i'}$, (les suites $\{k_i\}$ et $\{k_i'\}$ sont bien déterminée d'après (I) et (II)), et supposons que

(5) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x')/f_n(x)=0.$$

Supposons par contre que $k_i' \geqq k_i$ pour une infinité d'indices i, il résulte d'après les inégalites $|f_m(x)|<1/i$ $(m>k)$ et $|f_{k'_i}(x')|\geqq 1/i$, que

$$\left|\frac{f_{k'_i}(x')}{f_{k'_i}(x)}\right| \geqq \frac{1/i}{1/i}=1 \qquad \text{pour une infinité d'indices } i,$$

ce qui contredit l'égalite (5) (parce que comme on voit dans la construction de $\{f_n(x)\}$, on peut supposer que $k_i'\to\infty$ lorsque $i\to\infty$). Il en résulte que $k_i>k_i'$ pour presque tous les indices i.

La condition (IV′) est ainsi prouvée en posant $K_1=K$.

3. $\mathbf{Q}'\to\mathbf{H}$. Admettons la proposition $\mathbf{Q}'$. D'après les contitions (I) et (II), il existe pour tout nombre $x \varepsilon S$, une suite bien déterminée d'indices $k_i(x)$ telle que $x \varepsilon \prod_{i=1}^{\infty} B^i_{k_i(x)}$.

Soit $N\subset K_1$ un ensemble quelconque de puissance $\aleph_1$, et posons

$$M=\sum_{x\varepsilon N}\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=n}^{\infty}(B^i_1+B^i_2+\cdots+B^i_{k_i(x)}),$$

dont la puissance est au plus $\aleph_1\,\aleph_0=\aleph_1$ par la propriété (III).

Si $\aleph_1<2^{\aleph_0}$, l'ensemble K_1-M n'est pas vide (puisque $K_1=2^{\aleph_0}$). Soit x_0 un élément de K_1-M. Comme

$$x_0 \bar{\varepsilon} M=\sum_{x\varepsilon N}\liminf\,(B^i_1+B^i_2+\cdots+B^i_{k_i(x)}),$$

on conclut par (II) que $k(x_0)>k_i(x)$ pour une infinité d'indices i (pour tout $x \varepsilon N$), donc selon (IV′) pour presque tous les indices i $(x \varepsilon N)$, c.-à-d. pour tout $x \varepsilon N$

$$x \varepsilon \liminf\,(B^i_1+B^i_2+\cdots+B^i_{k_i(x_0)})$$

ou

$$N\subset \liminf\,(B^i_1+B^i_2+\cdots+B^i_{k_i(x_0)}).$$

En vertu de (III) l'ensemble du membre droit étant au plus dénombrable, et $\bar{N}=\aleph_1$, on a une contradiction, donc $\aleph_1 \geqq 2^{\aleph_0}$.

On a ainsi l'hypothèse **H**.

§ 3. Nous prouverons maintenant que l'hypothèse **H** équivaut à la proposition suivante:

Proposition R: Il existe une suite double de fonctions d'une variable réelle $\varphi^m_n(x)$ $(m=1, 2,\cdots, n=1, 2, \cdots)$ telle que

(1°) $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}\varphi^m_n(x))=0$ pour tout $x \varepsilon S$, (2°) quelle que soient la suite infinie croissante de nombres naturels $m_1 < m_2 < \cdots$, et la suite infinie d'indices $n_1, n_2, \cdots$, l'égalité $\lim_{k\to\infty} \varphi^{m_k}_{n_k}(x)=0$ ne peut avoir lieu que tout au plus pour une infinité dénombrable de valeurs de x.

(3°) pour les deux points arbitraires x et x' d'un certain ensemble K_2 de puissance du continu, si $\lim_{m\to\infty} \varphi^m_{n_m}(x)=0$ et si $\lim_{m\to\infty} \varphi^m_{n'_m}(x')=0$, on a ou bien $\lim_{m\to\infty} \varphi^m_{n_m}(x')=0$ ou bein $\lim_{m\to\infty} \varphi^m_{n'_m}(x)=0$. [4].

Pour établir l'équivalence entre **H** et **R**, il suffit de prouver que $\mathbf{P}'\to\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}\to\mathbf{H}$.

1. $\mathbf{P}'\to\mathbf{R}$. Admettant $\mathbf{P}'$, posons pour tout $m=1, 2, \cdots, n=1, 2, \cdots$ et $x \varepsilon S$,

$$\varphi^m_n(x)=0 \quad \text{si} \quad |f_p(x)| < 1/m \quad \text{pour tout } p>n,$$
$$\text{et} \quad |f_n(x)| \geqq 1/m$$

et $\varphi^m_n(x)=1$ dans le cas contraire.

On voit facilement que les propriétés (1°) et (2°) sont remplies[5]. Nous déduirons la propriété (3°).

Pour tout indice m et $x \varepsilon S$, soit $n_m(x)$ le plus petit indice n tel que $\varphi^m_n(x)=0$. Supposons pour deux nombres $x, x' \varepsilon K$ que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)/f_n(x')=0$. Si l'on a $n_m(x)>n_m(x')$ pour une infinité d'indices m, il résulte que

$$\left|\frac{f_{n_m(x)}(x')}{f_{n_m(x)}(x)}\right| > \frac{1/m}{1/m}=1 \quad \text{pour une infinité d'indices } i,$$

ce qui contredit l'égalité $\lim_{n\to\infty} |f_n(x)/f_n(x')|=0$ (car on peut supposer que $n_m(x)\to\infty$ lorsque $m\to\infty$). On conclut donc que $n_m(x') \geqq n_m(x)$ pour presque tous les m. Il en résulte d'après la définition de $n_m(x')$, que si $\varphi^m_{n'_m}(x')\to 0$ $(m\to\infty)$, on a l'inégalité $n'_m > n_m(x')$ pour presque tous les m. Par conséquent $n'_m > n_m(x)$ pour presque tous les indices m, c-à-d. $\lim_{m\to\infty} \varphi^m_{n'_m}=0$.

En posant $K_2=K$, la propriété (3) est établie.

2. $\mathbf{R}\to\mathbf{H}$. Admettons la proposition **R**. Soit $M \subset K_2$ un ensemble quelcnque de puissance $\aleph_1$ et posons $M=K_2-N$. On peut correspondre à tout nombre $x \varepsilon S$, une suite $\{n_m(x)\}_m$ telle que $\varphi^m_{n_m(x)}(x)\to 0$ lersque $m\to\infty$.

Si $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, on a l'égalité $\overline{\overline{M}}=2^{\aleph_0}$. Pour tout $y \varepsilon M$, il existe en vertu de la propriété (2°), un nombre $x_y \varepsilon N$ pour lequel l'égalité $\lim_{m\to\infty} \varphi^m_{n_m(y)}(x)=0$ ne se présente pas.

On a donc d'après la propriété (3°)

---

4) Cf. Sierpinski, loc. cit., p. 53, Proposition C_{10}.

5) Voir, ibid., p. 54, Démonstration $C_9\to C_{10}$.

$$\lim_{m\to\infty} \varphi^m_{n_m(x_y)}(y)=0.$$

L'ensemble M étant de puissance $2^{\aleph_0}$, et N de puissance $\aleph_1$, il existe d'après l'inégalité $\aleph_1<2^{\aleph_0}$, un nombre $x_0 \varepsilon N$ tel que l'égalité $\lim_{m\to\infty} \varphi^m_{n_m(x_0)}(x)=0$ se présente pour une infinité indénombrable de $x \varepsilon M$, ce qui est aussi incompatible avec (2°). Nous avons donc $\aleph_1 \geqq 2^{\aleph_0}$, c.-à-d. $\aleph_1=2^{\aleph_0}$.

L'équivalence entre **H** et **R** est ainsi établie, c.q.f.d.

Université de Tôhoku, Sendai.