SUR LES RÉSEAUX PLANS DANS UN ESPACE À CONNEXION PROJECTIVE À DEUX DIMENSIONS

MAKOTO KIMPARA

(Received April 12, 1951)

Les réseaux plans dans un espace projectif ordinaire ont été étudiés par bien des géomètres depuis longtemps. Nous nous occupons de généraliser, dans cet article, ses propriétés importantes au cas de réseaux plans plongés dans un espace à connexion projective à deux dimensions.

1. Soit E_2 un espace à connexion projective à deux dimensions, dont le point courant est déterminé par un système de coordonnées (x^1, x^2). Attachons, avec M. Cartan, à chaque point A_0 de cet espace le repère naturel $[A_0, A_1, A_2]$.[1] Alors, le déplacement infiniment petit du repère est donné par

$$dA_\alpha = \Pi^\beta_{\alpha\nu} dx^\nu A_\beta \qquad (\Pi^\beta_{0\nu} = \delta^\beta_\nu,\ \Pi^0_{q\nu} = 0), \tag{1}$$

et l'espace défini par ce repère s'appelle l'espace projectif tangent en A_0. Nous conviendrons, dans cet article, de désigner par $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ les indices admettant $0, 1, 2$; par p, q, r, s, t les indices admettant 1, 2.

Considérons dans E_2 un réseau plan défini par les courbes paramétriques de

$$x^\nu = x^\nu(u^1, u^2), \tag{2}$$

posons d'ailleurs

$$\underset{r}{e}^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial u^r}, \quad \underset{r}{e}^0 = 0, \quad \underset{0}{e}^\alpha = \delta^\alpha_0.$$

Alors, $\underset{r}{e}^\nu$ est un vecteur contrevariant et $\underset{\beta}{e}^\alpha$ peut être considéré comme un vecteur analytique contrevariant. Ses dérivées covariantes sont définies par la voie habituelle et en désignant par D_s le symbole de la différentiation covariante par rapport à u^s, on peut écrire

$$(D_2D_1 - D_1D_2)\underset{\beta}{e}^\alpha = R^\alpha_{\gamma p q}\underset{\beta}{e}^\gamma \underset{1}{e}^p \underset{2}{e}^q, \tag{3}$$

$R^\alpha_{\gamma pq}$ étant le tenseur de courbure et de torsion de l'espace.

2. Supposons d'ores et déjà que $a = \underset{1}{e}^1\underset{2}{e}^2 - \underset{1}{e}^2\underset{2}{e}^1$ ne soit pas nul; les trois points $\underset{0}{e}^\alpha A_\alpha$, $\underset{1}{e}^\alpha A_\alpha$, $\underset{2}{e}^\alpha A_\alpha$ dans l'espace projectif tangent en A_0, étant linéairement indépendants, peuvent être pris comme les sommets du repère fondamental du réseau considéré. On a donc

$$\begin{cases} D_s\underset{0}{e}^\alpha = \underset{s}{e}^\alpha, \\ D_s\underset{r}{e}^\alpha = M_{rs}\underset{0}{e}^\alpha + P^t_{rs}\underset{t}{e}^\alpha. \end{cases} \tag{4}$$

Si l'on effectue le changement de coordonnées

(5) $$\overline{x}^{\nu} = \overline{x}^{\nu}(x^1,\ x^2),$$
où
$$(\nu)^3 = \frac{\partial(\overline{x}^1, \overline{x}^2)}{\partial(x^1, x^2)} \neq 0,$$
les coéfficients P^t_{rs} subissent les transformations
$$\overline{P}^t_{rs} = P^t_{rs} + \delta^t_r \frac{\partial}{\partial u^s} \log \nu.$$
Pour le changement de paramètres

(6) $$\overline{u}^1 = \varphi(u^1),\quad \overline{u}^2 = \psi(u^2),\quad \varphi'\psi' \neq 0$$
qui conserve le réseau (2), on a
$$\overline{P}^2_{11} = \frac{\psi'}{(\varphi')^2} P^2_{11},\qquad \overline{P}^1_{22} = \frac{\varphi'}{(\psi')^2} P^1_{22}.$$
Nous savons donc que les formes différentielles
$$\begin{cases} P^2_{11}P^1_{22}du^1du^2, \\ \dfrac{1}{3}P^2_{11}P^1_{22}\{P^2_{11}(du^1)^3 + P^1_{22}(du^2)^3\}, \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{P^2_{11}(du^1)^3 + P^1_{22}(du^2)^3}{du^1du^2} \end{cases}$$
sont les invariants du réseau plan dans un espace à connexion projective. Nous appellerons *l'élément linéaire projectif* d'un réseau plan[2] dans l'espace considéré la dernière forme de (7).

3. Développons la courbe $du^2 = 0$ issue de A_0 sur l'espace projectif tangent en A_0. Soient (z^1, z^2) les coordonnées non homogènes (relatives au repère fondamental) d'un point pris sur ce développement dans le voisinage de A_0. Nous avons d'après (4)

(8) $$z^2 = \frac{1}{2}P^2_{11}(z^1)^2 + \frac{1}{6}\left\{\frac{\partial P^2_{11}}{\partial u^1} + P^2_{11}(P^2_{21} - 2P^1_{11})\right\}(z^1)^3 + \cdots.$$
L'équation du développement de la courbe $du^1 = 0$ issue de A_0 s'obtient en permutant les deux indices 1 et 2 dans l'équation (8).

Considérons une cubique rationnelle C dans l'espace projectif tangent en A_0, possédant un point double en A_0, et telle que chaque branche ait en A_0 un contact du second ordre avec l'un des développements mentionnés tout á l'heure. L'équation de C s'écrit
$$z^1z^2(1 + \beta z^1 + \gamma z^2) = \frac{1}{2}P^2_{11}(z^1)^3 + \frac{1}{2}P^1_{22}(z^2)^3,$$
β, γ étant arbitraires. Ses trois points d'inflexion sont situés sur une droite l donnée par
$$1 + \beta z^1 + \gamma z^2 = 0.$$
Soit maintenant A' un point quelconque dans l'espace projectif tangent en A_0, infiniment voisin de A_0. Désignons par P le point d'intersection de la droite A_0A' avec la droite l; par Q l'intersection de A_0A' avec la cubique C,

diffiérent de A_0. Nous avons alors

$$(A_0PA'Q) = \frac{P^2_{11}(du^1)^3 + P^1_{21}(du^2)^3}{2du^1du^2} + [2],$$

où $[n]$ désigne une expression au moins du n-ième ordre en du^1, du^2. Nous avons ainsi le théorème suivant:

THÉORÈME I. *Soit C une cubique rationnelle dans l'espace projectif tangent en A_0, possédant un point double en A_0, et telle que chaque branche ait en A_0 un contact du second ordre avec le developpement d'une courbe du reséau. Soit A' un point dans l'espace projectif tangent en A_0, infiniment voisin de A_0. Désignons, de plus, par P le point d'intersection de la droite A_0A' avec la droite passant par trois points d'inflexion de la cubique C; par Q l'intersection de A_0A' avec C lui-même, différent de A_0. Alors, les deux tiers de la partie principale du rapport anharmonique $(A_0PA'Q)$ deviennent l'élément linéaire projectif du réseau plan.*

On voit facilement que $P^2_{11} = 0$ ($P^1_{22} = 0$) seulment dans le cas où $du^2 = 0$ ($du^1 = 0$) sont les géodésiques de l'espace. Nous appellerons d'ores et déjà *le réseau géodésique* un réseau dont toutes ses courbes sont des géodésiques de l'espace.

Soit ensuite A_0' (A_0'') un point pris sur le développement de la courbe $du^2=0$ ($du^1=0$) issue de A_0, dans le voisinage de A_0. Désignons par $T_1(T_2)$ le point $\underset{1}{e^\alpha} A_\alpha$ ($\underset{2}{e^\alpha} A_\alpha$. La tangente au point A_0' au développement de $du^2 = 0$ issue de A_0 et la droite T_1T_2 se coupent en le point P_1 donné par

$$(1 + [1])\underset{1}{e^\alpha} A_\alpha + (P^2_{11}du^1 + [2])\underset{2}{e^\alpha} A_\alpha.$$

Tandis que, le point d'intersection P_2 de la tangente au point A_0'' au développement de $du^1 = 0$ issue de A_0 avec T_1T_2 est donné par

$$(P^1_{22}du^2 + [2])\underset{1}{e^\alpha} A_\alpha + (1 + [1])\underset{2}{e^\alpha} A_\alpha.$$

Par conséquent,

$$(T_1T_2P_1P_2) = P^2_{11}P^1_{22}du^1du^2 + [3].$$

Nous pouvons donc énoncer ce résultat:

THEORÈME II. *Soit T_1T_2 l'arête du repère fondamental du réseau en A_0, qui ne passe pas A_0. Soit A_0' un point pris sur le développement de la courbe $du^2 = 0$ issue de A_0, dans le voisinage de A_0; soit encore P_1 le point d'intersection de la tangente au point A_0' à ce développement avec la droite T_1T_2. En échangeant les indices 1 et 2, définissons les points A_0'' et P_2 de la même maniére qu'on définit A_0' et P_1. Alors, la partie principale du rapport anharmonique $(T_1T_2P_1P_2)$ est égale à $P^2_{11}P^1_{22}\, du^1du^2$.*

4. En dérivant la relation $|\underset{\gamma}{e^\alpha}| = a$, on a

$$P^r_{rs} = \frac{\partial}{\partial u^s}\log a. \tag{9}$$

On obtient de plus, en vertu de (3) et (4), les relations suivantes

$$M_{12} - M_{21} = aR^0_{012}, \tag{10}$$

$$P^1_{12} - P^1_{21} = -R^2_{012}\underset{2}{e}^1 + R^1_{012}\underset{2}{e}^2, \tag{11}$$

$$P^2_{12} - P^2_{21} = R^2_{012}\underset{1}{e}^1 - R^1_{012}\underset{1}{e}^2, \tag{12}$$

$$\frac{\partial M_{r1}}{\partial u^2} - \frac{\partial M_{r2}}{\partial u^1} + P^t_{r1}M_{t2} - P^t_{r2}M_{t1} = a\underset{r}{e}^t R^0_{t12}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial P^1_{r1}}{\partial u^2} - \frac{\partial P^1_{r2}}{\partial u^1} + P^t_{r1}P^1_{t2} - P^t_{r2}P^1_{t1} - M_{r2} = \underset{r}{e}^t(-R^2_{t12}e^1 + R^1_{t12}\underset{2}{e}^2), \tag{14}$$

$$\frac{\partial P^2_{r1}}{\partial u^2} - \frac{\partial P^2_{r2}}{\partial u^1} + P^t_{r1}P^2_{t2} - P^t_{r2}P^2_{t1} + M_{r1} = \underset{r}{e}^t(R^2_{t12}\underset{1}{e}^1 - R^1_{t12}\underset{1}{e}^2). \tag{15}$$

5. Nous allons ensuite généraliser la notion du transformé de Laplace. Désignons par t_1 la tangente au point A_0 à la courbe $du^2 = 0$; t_1 se déplacera à une droite t'_1 par un déplacement infiniment petit du point A_0 dans le sens du paramètre u^2. Nous pouvons admettre comme *le transformé de Laplace* dans le sens du paramètre u^1 le point d'intersection de t_1 avec t'_1. On a ainsi le transformé de Laplace défini par

$$\underset{1}{e}^\alpha A_\alpha - P^2_{12}\underset{0}{e}^\alpha A_\alpha. \tag{16}$$

D'autre part, la limite du point d'intersection de t_1 avec la tangente au point

$$A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial u^2}u^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A_0}{(\partial u^2)^2}(u^2)^2 + \cdots$$

au développment de la courbe $du^2 = 0$ issue de ce point est donné par

$$\underset{1}{e}^\alpha A_\alpha - P^2_{21}\underset{0}{e}^\alpha A_\alpha. \tag{17}$$

Nous l'appellerons *le pseudo-transformé de Laplace* dans le sens du paramètre u^1.

De *même*, nous pouvons définir le transformé de Laplace et le pseudo-transformé de Laplace sur la tangente au point A_0 au développement de la courbe $du^1 = 0$: c'est-à-dire,

$$\underset{2}{e}^\alpha A_\alpha - P^1_{21}\underset{0}{e}^\alpha A_\alpha \tag{18}$$

et

$$\underset{2}{e}^\alpha A_\alpha - P^1_{12}2^\alpha A_\alpha. \tag{19}$$

Les quatre points (16), (17), (18) et (19) ainsi obtenus forment un quadrangle complet. Tout son côté qui ne passe pas par le point A_0 peut être considéré comme *la droite de Laplace*. Nous avons ainsi quatre droites de Laplace en chaque point du réseau. Pour que toutes ces quatre droites soient en coïncidence, il faut et il suffit qu'on ait

$$P^2_{12} = P^2_{21}, \qquad P^1_{21} = P^1_{12}.$$

Nous pouvons donc énoncer, en tenant compte de la relation (11) et de (12), la proposition suivante:

THÉORÈME III. *Pour un réseau plan dans un espace à connexion projective à deux dimensions, il y a, en chaque point, quatre droites de Laplace. La condition nécessaire et suffisante pour que toutes ces quatre droites de Laplace soient en coïncidence est que l'espace est sans torsion.*

6. Posons maintenant

$$h = M_{21} + P^1_{21}P^2_{21} - \frac{\partial P^1_{21}}{\partial u^1}, \tag{20}$$

$$k = M_{12} + P^2_{12}P^1_{12} - \frac{\partial P^2_{12}}{\partial u^2}, \tag{21}$$

h, k jouissent de la propriété d'invariance par rapport à la transformation (5); de plus deux formes différentielles quadratiques hdu^1du^2 et kdu^1du^2 sont invariantes par rapport au changement de paramètres (6) conservant le réseau. Nous appellerons donc *les invariants de Laplace-Darboux* du réseau (2) ces quantités h, k.

Soit A_0' un point pris sur le développement de la courbe $du^2 = 0$ issue du point A_0, dans le voisinage de A_0. Désignons par L_2 le transformé de Laplace (16); L_2 se déplacera à L_2' quand on donne à u^2 au point A_0 un accroissement infinitésimal du^2. En négligeant les quantités infinitésimales d'ordre supérieur au premier, les quatre points A_0, A_0', L_2, L_2' sont situés sur la tangente au point A_0 à la courbe $du^2 = 0$, et la partie principale du rapport anharmonique $(A_0\ L_2\ A_0'\ L_2')$ devient kdu^1du^2. De même, on peut interpréter géométriquement la forme différentielle hdu^1du^2.

7. Attachons à A_0, dans l'espace projectif tangent en ce point, une droite l passant par deux points $\underset{1}{e^\alpha} A_\alpha - \lambda \underset{0}{e^\alpha} A_\alpha$ et $\underset{2}{e^\alpha} A_\alpha - \mu \underset{0}{e^\alpha} A_\alpha$. Si l'on donne à A_0 un déplacement infinitésimal, son développement deviendra $A_0 + dA_0$ et l se déplacera à $l + \delta l$. Pour que la droite joignant les points A_0, $A_0 + dA_0$ passe par l'intersection de la droite l avec la droite $l + \delta l$, il faut et il suffit qu'on ait

$$\begin{aligned}(\lambda du^1 + \mu du^2)(\lambda \delta u^1 + \mu \delta u^2) & \\ + du^1\Big(\frac{\partial \lambda}{\partial u^s}\delta u^s - M_{1s}\delta u^s - \lambda P^1_{1s}\delta u^s - \mu P^2_{1s}\delta u^s\Big) & \\ + du^2\Big(\frac{\partial \mu}{\partial u^s}\delta u^s - M_{2s}\delta u^s - \lambda P^1_{2s}\delta u^s - \mu P^2_{2s}\delta u^s\Big) &= 0.\end{aligned}$$

Cette relation, étant bilinéaire entre (du^1, du^2) et $(\delta u^1, \delta u^2)$, définit une projectivité.

Nous dirons que la correspondance entre le point A_0 et la droite l est *polaire* si cette projectivité est une involution. La condition de la correspondance polaire est ainsi

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u^2} - \frac{\partial \mu}{\partial u^1} = (M_{12} - M_{21}) + \lambda(P^1_{12} - P^1_{21}) + \mu(P^2_{12} - P^2_{21}). \tag{22}$$

En vertu des relations (11), (12); (14) et (15), nous pouvons énoncer comme il suit:

THÉORÈME IV. *Supposons que la correspondance entre le point A_0 et la droite passant par les points $\underset{1}{e}^{\alpha}A_{\alpha} - \lambda \underset{0}{e}^{\alpha}A_{\alpha}$ et $\underset{2}{e}^{\alpha}A_{\alpha} - \mu \underset{0}{e}^{\alpha}A_{\alpha}$ soit polaire. Alors la forme de Pfaff $\lambda du^1 + \mu du^2$ est une différentielle exacte seulement dans le cas où l'espace considéré satisfait aux conditions suivantes*:

1° *l'espace est sans torsion*;

2° *le tenseur R^p_{prs} est nul.*

Si l'on pose en particulier
$$\lambda = P^2_{12}, \qquad \mu = P^1_{21},$$
la relation (22) devient $h = k$, et nous avons la proposition suivante:

THÉORÈME V. *Pour que la correspondance entre un point A_0 et la droite de Laplace qui joint les transformés de Laplace* (16) *et* (18) *soit polaire, il faut et il suffit que les invariants de Laplace-Darboux h et k soient égaux.*

8. Nous pouvons aussi généraliser le théorème classique de Koenigs[3] et celui de Green[4] rapportés aux réseaux à invariants égaux.

Soit C_2 (C_1) le lieu du transformé de Laplace $L_2(L_1)$ dans l'espace projectif tangent en A_0, quand A_0 se déplace sur la courbe $du^1 = 0(du^2 = 0)$. Les équations de C_2 s'écrivent
$$\begin{cases} \xi^0 = -P^2_{12} + \left(-\dfrac{\partial P^2_{12}}{\partial u^2} + M_{12}\right)u^2 \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\left\{-\dfrac{\partial^2 P^2_{12}}{(\partial u^2)^2} + \dfrac{\partial M_{12}}{\partial u^2} + P^1_{12}M_{12}\right\}(u^2)^2 + \cdots, \\ \xi^1 = 1 + P^1_{12}u^2 + \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial P^1_{12}}{\partial u^2} + (P^1_{12})^2\right\}(u^2)^2 + \cdots, \\ \xi^2 = \dfrac{1}{2}k(u^2)^2 + \cdots, \end{cases}$$
ξ^0, ξ^1, ξ^2 étant les coordonnées homogénes d'un point de C_2 par rapport au repère fondamental. En échangeant les indices 1 et 2, et en utilisant h à la place de k, on peut écrire les équations de C_1. Par conséquent, la conique ayant en L_2 un contact du second ordre avec C_2 et en L_1 un contact du premier ordre avec C_1 est donnée par
$$(\xi^0 + P^2_{12}\xi^1 + P^1_{21}\xi^2)^2 = 2k\xi^1\xi^2.$$
Tandis que la conique qui a en L_1 un contact du second ordre avec C_1 et en L_2 un contact du premier ordre avec C_2 est définie par
$$(\xi^0 + P^2_{12}\xi^1 + P^1_{21}\xi^2)^2 = 2h\xi^1\xi^2.$$
On déduit de là la proposition suivante:

THEORÈME VI. *Considérons un réseau plan dans un espace à connexion projective à deux dimensions. Définissons les transformés de Laplace L_2, L_1 et les courbes C_2, C_1, comme nous avons mentionné au-dessus. Alors, la* *condition nécessaire et suffisante pour que le réseau soit à invariants égaux, $h = k$, est qu'il existe une conique ayant en L_2 un contact du second ordre avec C_2 et en L_1 un contact du second ordre avec C_1.*

9. Nous appellerons la tangente d'un réseau plan à un point A_0 chaque droite passant par A_0 dans l'espace projectif tangent en ce point. Nous dirons d'ailleurs que deux tangentes à A_0 sont conjuguées si elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux taugentes aux courbes du réseau, qui passent par A_0.

Cela posé, *le réseau congrûment associé* au réseau donné est défini comme il suit : si un point se déplace le long d'une courbe du réseau associé, la tangente conjuguée à ce point passe par le point de contact de la droite de Laplace joignant les points (16) et (18), avec son enveloppe. Alors, l'équation différentielle du réseau congrûment associé s'écrire

$$(23)\quad \left\{M_{11} - \frac{\partial P^2_{12}}{\partial u^1} + P^2_{12}P^1_{11} - (P^2_{12})^2 + P^1_{21}P^2_{11}\right\}(du^1)^2 - (h-k)du^1du^2$$
$$- \left\{M_{22} - \frac{\partial P^1_{21}}{\partial u^2} + P^1_{21}P^2_{22} - (P^1_{21})^2 + P^2_{12}P^1_{22}\right\}(du^2)^2 = 0.$$

Nous pouvons ainsi généraliser le théorème de Green :

THÉORÈME VII. *Un réseau plan dans un espace à connexion projective à deux dimensions, avec un réseau congrûment associé proprement dit est à invariants égaux si et seulement si les tangentes auxcourbes du réseau congrûment associé à chaque point sont conjuguées par rapport au réseau donné.*

Si l'on considère dans un plan projectif ordinaire un réseau dont toutes les courbes sont des droites, son réseau congrûment associé se superpose le réseau donné, et il n'y a pas le réseau congrûment associé proprement dit. Nous ne pouvons pas énoncer le théorème de Green pour tel réseau.

Or, dans un espace à connexion projective à deux dimensions, bien qu'il soit sans torsion, nous pouvons énoncer en général ce théorème pour le réseau géodésique. Supposons en effet que l'espace soit sans torsion et que le réseau soit géodésique. D'après les relations (14) et (15), l'équation (23) devient alors

$$\underset{1}{e^t}(R^2_{t12}\underset{1}{e^1} - R^1_{t12}\underset{1}{e^2})(du^1)^2 - (h-k)du^1du^2$$
$$+ \underset{2}{e^t}(-R^2_{t12}\underset{2}{e^1} + R^1_{t12}\underset{2}{e^2})(du^2)^2 = 0.$$

Si l'on pose en particulier $x^r = u^r$, on voit que le réseau congrûment associé se superpose le réseau considéré seulement dans le cas où

$$R^2_{112} = R^1_{212} = 0.$$

En vertu de la propriété bien connu du tenseur, nous pouvons en déduire le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. *Considérons un réseau géodésique dans un espace sans* *torsion. Pour que le réseau congrument associé se superpose le réseau considéré, il faut et il suffit qu'on ait*

$$R^2_{112} = R^1_{212} = 0, \qquad R^1_{112} - R^2_{212} = 0.$$

D'après ce théorème et le théorème IV, on obtiendra une nouvel le interprétation d'un espace à connexion projective normale à deux dimensions de M. Cartan.

Référence

1) É. Cartan, Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective, Paris, Gauthier-Villars, 1937, p. 177.

2) G. Fubini et E. Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Paris, Gauthier-Villars, 1931, p. 156.

3) G. Koenigs, Sur les réseaux plans à invariants égaux et les lignes asymptotiques, Comptes rendus des séance de l'Académie des Sciences, t. CXIV, 1892, p. 55–57.

4) G. Green, Plane nets with equal invariants, Annals of Mathematics, (2), 19, 1918, p. 246–250.

Faculté des Sciences de l'ingénieur, L'université de Kyûchû.