ÜBER DEN BEGRIFF DER ω-VOLLSTÄNDIGKEIT

YOSIHISA IZUMI

(Received November 28, 1952)

Nachdem K. Gödel[1] ein Beispiel eines widerspruchsfreien im üblichen Sinne, jedoch nicht ω-widerspruchsfreien deduktiven Systems konstruiert hatte, gab A. Tarski[2] ein anderes einfaches Beispiel eines solchen Systems nebst einigen allgemeinen Bemerkungen über den Begriff der ω-Vollständigkeit. In dem vorliegenden Aufsatz habe ich vor, einigen Bemerkungen über diesen Begriff zu geben.

Ich gebrauche Tarskis Symbolik. Wenn ein Axiomensystem A widerspruchsfrei ist, so kann ich die von Tarski gegebenen Definition der Vollständigkeit[3] des A durch die folgenden Formel darstellen:

$$(x)[x \in S \rightarrow x \in \mathrm{Fl}(A) \vee (\{A, x\} \rightarrow a.\bar{a})],$$

welche der folgenden Formel äquivalent ist:

$$(x)[x \in \mathrm{S}.\ x \in \mathrm{Fl}(A) \rightarrow (\{A, x\} \rightarrow a.\bar{a})],$$

welche die Vollständigkeit im schärferen Sinne des A bedeutet.

Ich nehme also im Folgenden an, dass A widerspruchsfrei sei.

Tarski hat die folgenden Behauptungen bewiesen[4]:

$$\text{(I)}\quad \mathfrak{W}.\mathfrak{V}_\omega \rightarrow \mathfrak{W}_\omega,$$

$$\text{(II)}\quad \mathfrak{V}.\mathfrak{W}_\omega \rightarrow \mathfrak{V}_\omega,$$

in welchen man $\mathfrak{W}$ als die Widerspruchsfreiheit, $\mathfrak{V}_\omega$ als die ω-Vollständigkeit, $\mathfrak{W}_\omega$ als die ω-Widerspruchsfreiheit, und $\mathfrak{V}$ als die Vollständigkeit, aber, genauer gesprochen, die Vollständigkeit im schärferen Sinne bezeichnet.

Ich beweise die folgenden Sätze:

SATZ 1. *Ist A vollständig im scharferen Sinne, so gilt die Äquivalenz zwischen der Aussage „A ist ω-widerspruchsfrei“ und der Aussage „A ist ω-vollständig.“*

BEWEIS. (I) ergibt

(1) $$\mathfrak{V}.\mathfrak{W} \rightarrow (\mathfrak{V}_\omega \rightarrow \mathfrak{W}_\omega).$$

(II) ergibt

(2) $$\mathfrak{W}.\mathfrak{V} \rightarrow (\mathfrak{W}_\omega \rightarrow \mathfrak{V}_\omega).$$

Die Formeln (1) und (2) ergeben sofort:

$$\mathfrak{W} \rightarrow [\mathfrak{V} \rightarrow (\mathfrak{W}_\omega \sim \mathfrak{V}_\omega)].$$ Q. E. D.

SATZ 2. *Ist A ω-vollständig, so ist A vollständig im schärferen Sinne.*

BEWEIS. Aus (I) bekommt man

$$\mathfrak{W}.\mathfrak{V}_\omega \rightarrow \mathfrak{W}_\omega \vee \mathfrak{V},$$

aus welcher erhält man

$$(\mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{W}_\omega) \vee (\mathfrak{V}_\omega \rightarrow \mathfrak{V}).$$

Da aber $\mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{W}_\omega$ nicht richtig ist, so erhält man $\mathfrak{V}_\omega \rightarrow \mathfrak{V}$. Q. E. D.

LITERATURVERZEICHNIS.

[1] K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. f. Math. u. Phys., 38(1931), 173-198.

[2] A. TARSKI, Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit, Monatsh. f. Math. u. Phy., 40(1933), 97-112
Vgl. auch G. HASENJAEGER, Über ω-Unvollständigkeit in der Peano-Arithmetik, The Journ. of Symb. Log., 17(1952), Nr. 2, 81-104.

[3] A. TARSKI, ibidem, 104.

[4] A. TARSKI, ibidem, 106.

TÔHOKU UNIVERSITÄT.