ÜBER DIE ABBILDUNGEN VOM KOMPLEXE AUF DEN UNGERADEN DIMENSIONALEN REELLEN PROJEKTIVEN RAUM

HIDEKAZU WADA

(Received June 13, 1952)

1. Einführung. Bis jetzt werden viele Klassifikationssätze der Abbildungsklassen durch die algebraische Struktur der Räume untersucht. Aber im Allgemeinen sind die Probleme der Abbildungen auf die nicht-einfach-zusammenhängenden Räume viel komplizierter als auf die einfach-zusammenhängenden Räume. Die Ursache dazu ist dass wir über die Operation der Fundamentalgruppe auf die absoluten oder relativen Homotopiegruppen nachdenken müssen [9]. Der ungerade dimensionale reelle projektive Raum ist ein Beispiel, welcher nicht-zusammenhängend ist, und doch den Klassifikationssatz durch nur die Cohomologieeigenschaften fähig macht.

In dieser Schrift wollen wir es beweisen, dass für ungerades n, die Abbildungsklassen vom n-dimensionalen Komplexe auf denselben dimensionalen reellen projektiven Raum eineindeutig mit den Elementen der direkten Summe der 1-dimensionalen Cohomologiegruppe des Komplexes, welche als der Koeffizientenbereich die Gruppe der Ordnung 2 hat, und der n-dimensionalen ganzzahligen Cohomologiegruppe des Komplexes, korrespondieren. Die Korrespondenz wird durch den sogenannten induzierten Homomorphismus gegeben.

In §7 zeigen wir dass der obige Satz nicht entsteht für den geraden dimensionalen Fall. Auch können wir eine Gruppenoperation in die solchen Abbildungsklassen in der analoger Weise wie [10] für den ungeraden dimensionalen Fall einführen, aber wir wollen es nicht zeigen hier. Durch diese Worten, können wir sagen dass wir die Gruppenoperation in die Homotopieklassen in natürlicher Weise für den geraden Fall nicht einführen können.

In §8 zeigen wir dass für die Abbildung von einem 3-dimensionalen Sphäre auf die reelle projektive Ebene die Hopfsche Invariante eingeführt werden kann. Und diese Invariante vollständig die Homotopieklassen durch die ganzen Zahlen bestimmt.

Früher, untersuchte P. Olum [7] aus dem allgemeineren Standpunkte und gewinnte viele interessante Resultaten, aber unserer Gesichtpunkt ist nicht derselbe.

2. Formeln für die Addition der relativen Homotopiegruppen. Seien

$$T^{n+1} = (v_0, \dots, v_{n+1}), \qquad T^n = (u_0, \dots, u_n) \qquad (n \geqq 2)$$

die orientierten Simplexe mit den fixen Ordnungen der Eckpunkte in dieser Folge, und seien

$$T_i^n \ (i = 0, 1, \ldots, n+1), \quad T_i^{n-1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

ihre orientierten Randsimplexe welche die Gegensimplexe der Eckpunkte v_i und u_i sind, und seien die folgende Randoperationen gültig:

$$\dot{T}^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon_i^n T_i^n, \quad \dot{T}^n = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^{n-1} T_i^{n-1} \quad (\varepsilon_i^n, \ \varepsilon_i^{n-1} = \pm 1). \tag{2.1}$$

Ferner, sei $T^{n+1,k}$ das k-dimensionale Gerüst von T^{n+1}, d. h. die Menge der allen Simplexe von T^{n+1}, welche höchstens k-dimensional sind.

Nun sei I das orientierte Simplex des Intervalls $[0,1]$, und konstruieren wir den Produktkomplex $T^n \times I$, welcher der Zellenkomplex aus den orientierten Simplexen der Gestalten $T^k \times 0$ und $T^k \times 1$, und den orientierten Zellen $T^k \times I$ ist, dabei bezeichnen wir mit T^k das willkürliche Simplex von T^n. Wir bezeichnen mit $(T^n \times I)^k$ das k-dimensionale Gerüst von $T^n \times I$, d. h. die Menge der Zellen von $T^n \times I$ welche höchstens k-dimensional sind.

Nun, sei Y ein topologischer Raum, Y_0 seine abgeschlossene Untermenge, $y_0 \in Y_0$ der Basispunkt der allen Homotopiegruppen und werden die folgenden Abbildungen gegeben:

$$f : (\dot{T}^{n+1}, T^{n+1,n-1}, T^{n+1,0}) \to (Y, Y_0, y_0)^{1)}$$
$$F : ((T^n \times I)^{\cdot}, (T^n \times I)^{n-1}, (T^n \times I)^0) \to (Y, Y_0, y_0).$$

Dann bestimmen die partiellen Abbildungen[2]

$$f \mid T_0^n, \ f \mid T_i^n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$
$$F \mid T^n \times 0, F \mid T^n \times 1, F \mid T_0^{n-1} \times I, F \mid T_i^{n-0} \times I \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eindeutig die Elemente von $\pi_n(Y, Y_0)$

$$c_f(T_0^n), c_f(T_i^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1);$$
$$c_F(T^n \times 0) \ c_F(T^n \times 1), c_F(T_0^{n-1} \times I), c_F(T_i^{n-1} \times I) \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit den Basispunkten

$$v_1, v_0 \, ; u_0 \times 0, u_0 \times 1, u_1 \times 0, u_0 \times 0$$

der Vorbilde in dieser Folge.

Nun bezeichnen wir die Elemente von $\pi_n(Y)$, welche durch f und F dargestellt werden, mit $a_f(T^{n+1})$ und $a_F(T^n \times I)$ deren Basispunkte v_0 und $u_0 \times 0$ sind. Sei

$$j_n : \pi_n(Y) \to \pi_n(Y, Y_0) \tag{2.2}$$

der Homomorphismus, welcher durch die identische Abbildung $(Y, y_0, y_0) \to (Y, Y_0, y_0)$ induziert wird. Dann gewinnen wir den folgenden Hilfssatz·

1) $f : (X_1, X_2, \ldots) \to (Y_1, Y_2, \ldots)$, $(X_1 \supset X_2 \supset \ldots ; Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots)$ bezeichnet die kontinuierliche Abbildung mit den Eigenschaften $f(X_i) \subset Y_i$ $(i = 1, 2,)$.

2) Für $f : X \to Y$, ist $f \mid A$ $(A \supset X)$ die Abbildung, welche den Definitionsbereich von f nur auf die Untermenge A von X beschränkt.

HILFSSATZ 1. *Sind w, w_0 und w_I die Elemente der Fundamentalgruppe $\pi_1(Y_0)$ von Y_0, welche durch die partiellen Abbildungen*

$$f|v_0v_1,\quad F|u_0u_1\times 0, F|u_0\times I$$

gegeben werden. Dann gewinnen wir für $n=2$

$$\begin{aligned} &j_2a_f(T^3)=\varepsilon_0 w\cdot c_f(T_0^2)+\varepsilon_2 c_f(T_2^2)+\varepsilon_1 c_f(T_1^2)+\ \varepsilon_3 c_f(T_3^2)\ (\varepsilon_i^n=\varepsilon_i)\\ (2.3)\qquad &j_2a_F(T^2\times I)=w_I\cdot c_F(T^2\times 1)+\varepsilon_1 c_F(T_1^1\times I)-c_F(T^2\times 0)\\ &\qquad +\varepsilon_0 w_0\cdot c_F(T_0^1\times I)+\varepsilon_2 c_F(T_2^1\times I)\qquad (\varepsilon_i^{n-1}=\varepsilon_i),\end{aligned}$$

dabei sind die Summen der rechten nicht kommutativ. Für $n>2$ gewinnen wir

$$j_na_f(T^{n+1})=\varepsilon_0^n w\cdot c_f(T_0^n)+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon_i^n c_f(T_i^n),$$

$$\begin{aligned}(2.4)\qquad &(-1)^n a_F(T^p\times I)=w_I\cdot c_F(T^n\times I)-c_F(T^n\times 0)\\ &\qquad +(-1)^n(\varepsilon_0^{n-1}w_0\cdot c_F(T_0^{n-1}\times I)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{n-1}c_F(T_i^{n-1}\times I)).\end{aligned}$$

Dabei, bezeichnen wir mit $\bullet$ die Operation von $\pi_1(Y_0)$ auf $\pi_n(Y, Y_0)$[3].

Die Formeln $(2.3)_1$ und $(2.4)_1$ wurden in [2] benutzt. Der Beweis von (2.4) wird in analoger Weise wie [4; § 1] gewinnt.

3. Homotopie- und Homologieeigenschaften des reellen projektiven Raumes. In einem Hilbertschen Raum mit den Koordinaten $(x_0, x_1, \ldots\ldots)$ wird eine n-dimensionale orientierte Sphäre S^n mit den folgenden Bedingungen gegeben:

$$\sum_{i=0}^{n}x_i^2=1;\ x_i=0 \text{ für } i>n.$$

Dabei, definieren wir induktiv die Orientierung von S^n folgendermassen: Seien E_1^n $(x_n\geqq 0)$ und E_2^n $(x_n\leqq 0)$ zwei Zellen von S^n, dann definieren wir die Randopertaionen mit den folgenden Formeln: $\dot{E}_1^n=-\dot{E}_2^n=S^{n-1}$. Nun, wenn wir die Koordinaten der Punkte auf S^n schreiben wollen, benutzen wir nur die ersten $n+1$ Koordinatenachsen.

Nun, definieren wir für die Punkte auf die nicht-orientierte S^n die folgende Äquivalenzrelation:

$$(x_0, \ldots, x_n)\equiv(-x_0, \ldots, -x_n).$$

---

3) Werden eine Homotopie $F: (E^n\times I,\ \dot{E}^n\times I,\ z_0\times 0\cup z_0\times 1)\to(Y, Y_0, y_0)$ $(z_0\in\dot{E}^n)$ zwischen zwei Abbildungen f und g von einem orientierten Zelle E^n gegeben: $F(x, 0)=f(x)$, $F(x, 1)=g(x)$. Sind die Elemente von $\pi_n(Y, Y_0)$ welche durch f und g repräsentiert werden, c_0 und c_1; und ist das Element $\pi_1(Y_0)$ welches durch $F(z_0\times I)$ repräsentiert wird, w. Dann definieren wir $w\bullet c_1=c_0$ Wenn diese Operation trivial für jedes Element w der Fundamentalgruppe von Y_0 ist, sagen wir dass Y *n-einfach relativ zu Y_0* ist. Das Gleiche kann auch für die absoluten Gruppen definiert werden (siehe z.B [9; Part II]).

Als solcher Faktorraum gewinnen wir den *n-dimensionalen reellen projektiven Raum* P^n, und bezeichnen wir die Koordinaten von P^n als $[x_0, \dots, x_n]$. Sei

$$\nu_n \cdot S^n \to P^n \qquad (n > 1)$$

die kanonische Abibldung der obigen Äquivalenzrelation, dann freilich gilt $\nu_n | S^k = \nu_k$ $(n > k > 1)$.

Nun untersuchen wir die Homotopiegruppen von P^n. Von hier an, nehmen wir $P^0 = [1, 0, \dots, 0] \in P^n$ als der Basispunkt auf, wenn die Homotopiegruppen von P^n behandelt werden. Die folgenden Isomorphismen sind wohl bekannt:

$$(3.1) \qquad \pi_1(P^n) \approx \begin{cases} J \text{ (zyklische Gruppe unendlicher Ordnung) für } n = 1, \\ J_2 \text{ (zyklische Gruppe der Ordnung 2) für } n > 1, \end{cases}$$

$$\pi_k(S^n) \approx \pi_k(P^n) \qquad \text{für } k > 1,$$

dabei wird $(3.1)_2$ durch ν_n induziert.

Nächst, konstruieren wir die folgende exakte Reihe der Homotopiegruppen[4]:

$$(3.2) \qquad \dots \to \pi_k(P^l) \xrightarrow{i_k} \pi_k(P^n) \xrightarrow{j_k} \pi_k(P^n, P^l) \xrightarrow{\partial_k} \pi_{k-1}(P^l) \to \dots \quad (n > l > 0).$$

Dann, gewinnen wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 2. *j_k $(k = 2, 3, \dots)$ sind Isomorphismen.*

Beweis. Aus der Exaktheit von (3.2), ist es genug dass es bewiesen wird dass i_k trivial ist. Für $l = 1$ ist es klar. Für $l > 1$ und für jede Abbildung $f: S^k \to P^l$ gibt es eine Abbildung $\bar{f}: S^k \to S^l$ mit $\nu_l \bar{f} = f$. w.z.b.w.

Hilfssatz 3. *$\pi_n(P^n, P^{n-1}) = j_n \pi_n(P^n) \oplus \theta_n \pi_{n-1}(P^{n-1}) \approx J \oplus J$ für $n > 2$,[5] wobei $\theta_n : \pi_{n-1}(P^{n-1}) \to \pi_n(P^n, P^{n-1})$ ein Isomorphismus ist, und $\oplus$ die direkte Summe ist.*

Beweis. Aus der Exaktheit von (3.2) und aus dem Hilfssatze 2, ist es genug, dass wir den gewünschten Isomorphismus θ_n mit $\partial_n \theta_n =$ Identität, konstruieren können. Nun definieren wir ein Element $c_0 \in \pi_n(P^n, P^{n-1})$ mit der Abbildung $\nu_n | E_1^n$, und man setze $\theta_n b_0 = c_0$ für das Erzeugende b_0 von $\pi_{n-1}(P^{n-1})$. Dann ist der linear erweiterte θ_n der gewünschte Isomorphismus, w.z.b.w.

Nun setzen wir es voraus dass n ungerade ist. Sei $H_k(P^n)$, oder $H_k(P^n, P^{n-1})$ die absolute oder relative singuläre Homologiegruppe. Dann gewinnen wir das folgende Diagramm:

---

4) i_k ist der Homomorpihsmus der Homotopiegruppen, welcher durch die identische Abbildung $(P^l, P^0) \to (P^n, P^0)$ induziert wird. j_n wurde in (2.2) definiert. ∂_k ist der Homomorphismus welcher durch die Randoperation induziert wird. Die Reihe von (3.2) ist exakt, d.h. der Kern eines Homomorphismus ist gleich zu dem Bilde des vorigen Homomorphismus. Überdies sind alle Homomorphismen die Operatorhomomorphismen für die Operation von $\pi_1(P^l)$ (z.B. [9; Part II]).

5) Im Falle $n = 2$ gilt die gleiche Zerlegung [12]. Aber es ist nicht nötig hier.

$$
\begin{tikzcd}
& \pi_n(P^n) \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "\mu'"'] & \pi_n(P^n,\ P^{n-1}) \arrow[d, "\mu"] & \\
\cdots\cdots \arrow[r] H_n(P^{n-1}) \arrow[r] & H_n(P^n) \arrow[r, "j'_n"] & H_n(P^n,\ P^{n-1}) \arrow[r] & H_{n-1}(P^{n-1}) \arrow[r] & \cdots\cdots,
\end{tikzcd}
\tag{3.3}
$$

dabei, sind μ nnd μ' die natürlichen Homomorphismen. Freilich gilt die Kommutativität $j'_n\,\mu' = \mu\, j_n$ in (3.3), und ist die Reihe der Homologiegruppen unten exakt. Also aus $H_n(P^{n-1}) \approx H_{n-1}(P^{n-1}) \approx 0$ folgt dass j'_n ein Isomorphismus *auf* ist. Sei Z_0 und P_0^n die Erzeugenden der Homologiegruppe $H_n(P^n) \approx J$ von P^n und der Kettengruppe $H_n(P^n,\ P^{n-1}) \approx J$ von P^n. Dann ist P_0^n ein Zyklus welcher Z_0 repräsentiert. Dann weil S^n der zweiblätterige Überlagerungsraum von P^n ist, muss

$$
\mu c_0 = P_0^n = j'_n Z_0, \quad \mu' a_0 = 2Z_0 \tag{3.4}
$$

sein für das Erzeugende a_0 von $\pi_n(P^n)$. Also ist μ' ein Isomorphismus von $\pi_n\ (P^n)$ auf $2H_n\ (P^n)$[6]. Freilich gilt für $c \in \pi_n(P^n, P^{n-1})$ und für das Erzeugende w von $\pi_1(P^{n-1})$ die folgende Relation

$$
\mu(w.c) = \mu(c). \tag{3.5}
$$

4. Normierte Abbildung vom Komplexe auf P^n. K sei ein geometrischer lokal-endlicher Komplex, und L sei seiner Unterkomplex, K^k sei das k-dimensionale Gerüst von K, d. h. die Menge aller Simplexe von K, welche höchstens k-dimensional sind, und man setze $\bar{K}^k = K^k \cup L$. Nun, wollen wir die kontinuierliche Abbildung $f: K \to P^n$ die *normierte Abbildung* nennen, falls die folgende Bedingung erfüllt wird:

$$
f: (K^n,\ K^{n-1}, \ldots, K_0) \to (P^n,\ P^{n-1}, \ldots, P^0).
$$

Es sei $K^n \times I$ ein Zellenkomplex mit der simplizialen Unterkomplex $K^n \times 0 \cup K^n \times 1$, und mit der Menge der Zellen der Form $T^k \times I$ für das Simplex T^k in K. Dann, für die Homotopie können wir auch die *normierte Homotopie* definieren.

HILFSSATZ 4. *Jede kontinuierliche Abbildung $f: K \to P^n$, welche auf L normiert ist, kann zur normierten Abbildung $f': K \to P^n$ deformiert werden. Dabei ändert das Bild von L nicht während der Homotopie*[7]. *Das ähnliche Resultat gilt auch für die Homotopie.*

Der Beweis wird leicht induktiv gewinnt mit Hilfe des Homotopieerweiterungssatzes [1;S. 501], wenn wir den folgenden Hilfssatz beweisen können:

HILFSSATZ 5. *E^k $(k > 1)$ sei eine orientierte k-dimensionale Zelle und $z_0 \in \dot{E}^k$ sei ein fixer Punkt. Wird eine kontinuierliche Abbildung*

---

6) $2H_n(P^n)$ ist die Untergruppe von $H_n(P^n)$, welche aus den Elementen der Gestalten $2a(a \in H_n(P^n))$ bestehen.

7) Diese Tatsache wird gesagt dass f und f' homotop relativ zu L sind, und geschrieben als $f' \simeq f$ rel. L.

$$f:(E^k, \dot{E}^k, z_0)\to(P^n, P^{k-1}, P^0) \qquad (n>k)$$

gegeben, gibt es eine Abbildung f' folgendermassen:

$$f'\simeq f \text{ rel. } \dot{E}^k, \quad f'(E^k)\subset P^k.$$

BEWEIS. Es ist klar dass es eine Abbildung f' folgendermassen gibt:

$$f':(E^k_*, \dot{E}^k_*, z_0)\to(P^k, P^{k-1}, P_0);\ f'|\dot{E}^k_* = f|\dot{E}^k,$$

dabei, ist E^k_* eine orientierte Zelle, welcher Rand mit dem von E^k identisch ist: $\dot{E}^k_* = \dot{E}^k$. Dann repräsentiert die Abbildung, welche durch f und f' definiert wird, von der orientierten Sphäre $\Sigma^k = E^k - E^k_*$ auf P^n das Element von $\pi_k(P^n)\approx 0$ (3.1), w. z. b. w.

Nun offenbar gelten die folgenden Isomorphismen

$$H^1(P^n, J_2)\approx J_2, \quad H^n(P^n, J)\approx J \text{ für ungerades } n.$$

Dabei sind die linken Seiten die Cohomologiegruppen von P^n mit den Koeffizientenbereichen J_2 und J. Die erzeugenden Cozyklen Δ^1 und Δ^n dieser Gruppen werden durch die Funktionen

$$\Delta^1(P^1_0) = 1, \quad \Delta^n(P^n_0) = 1$$

dargestellt. Dabei ist P^1_0 ein singuläres Simplex von P^1 welches durch die Abbildung

$$v_1(t) = [\cos \pi t, \ \sin \pi t, 0, \dots, 0] \qquad (0\leqq t\leqq 1)$$

dargestellt wird. Es repräsentiert also auch das Erzeugende von $\pi_1(P^k)$ $(k>1)$.

Für die normierte Abbildung $f: K\to P^n$ ist

$$f^*\Delta^1(T^1) = \Delta^1 f(T^1) \tag{4.1}$$

das Element von $\pi_1(P^n)$, welches durch die Abbildung $f|T^1$ dargestellt wird, wenn J_2 mit $\pi_1(P^n)$ identifiziert wird. Dabei haben wir mit $f(T^1)$ das singuläre Simplex bezeichnet. Freilich ist $f^*\Delta^1$ ein Cozyklus, weil f von K^2 abbildet.

Nun, setzen wir es voraus dass n ungerade ist. Es sei $T^n = (v_0, \dots, v_n)$ $(n>2)$ ein Simplex von K in einer Folge der Eckpunkte. Wenn eine normierte Abbildung $f: K\to P^n$ gegeben wird, genügt das singuläre Simplex $f(T^n)$ nämlich das Element der Kettengruppe $H_n(P^n, P^{n-1})$, welche durch die Abbildung $f|T^n$ gegeben wird, die Relation $f(T^n) = \mu c_f(T^n)$. Also gilt

$$f^*\Delta^n(T^n) = \Delta^n f(T^n) = \Delta^n \mu c_f(T^n) \tag{4.2}$$

für jede Ordnung der Eckpunke von T^n (3.4).

Aus (4.1) und (4.2), für die normierte Abbildung $f: K\to P^n$ werden die Elemente $f^*\Delta^1$ und $f^*\Delta^n$ der Cokettengruppen $C^1(K, J_2)$ und $C^n(K, J)$ bestimmt. Das Gleiche entsteht für die normierte Homotopie $F: K\times I\to P^n$ mit Hilfe der orientierten Zellen $T^k\times 0$, $T^k\times 1$ und $T^{k-1}\times I$ statt T^k $(k=1, n)$.

5. Erweiterungssatz der Abbildungen vom Komplexe auf P^n.

HILFSSATZ 6. *Für ungerades $n>2$, wird jede normierte Abbildung $f: K^n\to P^n$ zur Abbildung von K^{n+1} erweitert, dann und nur dann ist $f^*\Delta^n$ ein Cozyklus.*

BEWEIS. Für jedes $(n+1)$-dimensionale Simplex $T^{n+1} = (v_0, \ldots, v_{n+1})$ von K, in welchem eine Ordnung der Eckpunkte in dieser Folge gegeben wird, und dessen Rand durch $(2.1)_1$ gegeben wird, gewinnen wir dieselbige Gleichung wie $(2.4)_1$. Also gewinnen wir aus (3.5) die folgende Relation:

$$j'_n \mu' a_f(T^{n+1}) = \mu j_n a_f(T^{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon_i^n \mu c_f(T_i^n).$$

Folglich aus (4.2) entsteht

$$\Delta^n j'_n \mu' a_f(T^{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon_i^n f^* \Delta^n(T_i^n) = \delta f^* \Delta^n(T^{n+1}) \tag{5.1}$$

dabei ist δ die Corandoperation. Weil j'_n und μ' Isomorphismen sind, ist $a_f(T^{n+1})$ gleich null dann und nur dann ist die linke Seite von (5.1) gleich null, also dann und nur dann ist $f^*\Delta^n$ ein Cozyklus, w. z. b. w.

HILFSSATZ 7. *Sei $n > 2$ ungerade, und seien T^n und T^{n-1} die orientierten Simplexe und werden die Abbildungen f und F gegeben*:

$$f: (T^{n,n-2}, T^{n,0}) \to (P^{n-2}, P^0), \quad F: ((T^{n-1} \times I)^{n-2}, (T^{n-1} \times I)^0) \to (P^{n-2}, P^0),$$

welche auf $\dot{T}^3 \to P^2$, $(\dot{T}^2 \times I) \to P^2$ erweitert werden können für $n = 3$. Dann für jede ganze Zahl k gibt es Abbildungen

$$f': (T^n, \dot{T}^n) \to (P^n, P^{n-1}), \quad F': (T^{n-1} \times I, (T^{n-1} \times I)^{\cdot}) \to (P^n, P^{n-1})$$

folgendermassen

$$f' \mid T^{n,n-2} = f, \quad F' \mid (T^{n-1} \times I)^{n-2} = F;$$
$$f'(T^n) = F'(T^{n-1} \times I) = k\, P_0^n.$$

BEWEIS. Es ist hinreichend dass wir für f den Hilfssatz beweisen können, denn für F können wir es ähnlich beweisen. Nun, aus der Voraussetzung gibt es eine Erweiterung $f'': \dot{T}^n \to P^{n-1}$ von f. Wenn eine fixe Ordnung der Eckpunkte von T^n gegeben wird, und wenn $\dot{T}^n$ durch $(2.1)_2$ gegeben wird, gewinnen wir gleiche Gleichung wie $(2.3)_1$ und $(2.4)_1$ für $a_{f''}(T^n)$ und $c_{f''}(T_i^{n-1})$ statt $a_f(T^{n+1})$ und $c_f(T_i^n)$, dabei seien $a_{f''}(T^n)$ und $c_{f''}(T_i^{n-1})$ die Elemente von $\pi_{n-1}(P^{n-1})$ und $\pi_{n-1}(P^{n-1}, P^{n-2})$, welche durch f'' und $f'' \mid T_i^{n-1}$ dargestellt werden. Nun definieren wir eine Abbildung f' folgendermassen:

$$\begin{aligned} &f': \dot{T}^n \to P^{n-1}, \quad f' \mid T_i^{n-1} = f'' \mid T_i^{n-1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1); \\ &c_f(T_n^{n-1}) = c_{f''}(T_n^{n-1}) + j_{n-1}(-\varepsilon_n^{n-1} a_f(T^n) + \varepsilon_n^{n-1} k b_0).^{8)} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dann gewinnen wir aus (5.2) leicht die Gleichung $j_{n-1} a_f(T^n) = j_{n-1} k b_0$. Also gilt $a_{f'}(T^n) = k b_0$ aus dem Hilfssatze 2. Wenn wir f' von T^n erweitern wollen, konstruieren wir als $c_{f'}(T^n) = k c_0$ mit Hilfe des Hilfssatzes 3. Dann ist die erweiterte f' die gewünschte Abbildung:

8) $\pi_2(P^2, P^1)$ ist Abelsch (siehe Fussnote 5)). Aber in dieser Gleichung setzen wir es nicht voraus.

$$f'(T^n) = \mu c_{f'}(T^n) = k\mu c_0 = kP_0 \qquad \text{(seihe (3.4))},$$

w. z. b. w.

SATZ 1. (Erweiterungssatz). *Für ungerades $n > 2$, wird die normierte Abbildung $f: L \to P^n$ zu K^{n+1} erweitert, dann und nur dann werden die Cozyklen $f^*\Delta^1$ und $f^*\Delta^n$ in L zu den Cozyklen in K erweitert.* [9]

BEWEIS. Die Aussage "nur dann" folgt leicht. Umgekehrt setzen wir es voraus, dass $f^*\Delta^1$ und $f^*\Delta^n$ zur den Cozyklen Λ^1 und Λ^n in K erweitert werden. Dann können wir eine normierte Abbildung $\bar{f}: \bar{K}^n \to P^n$, $\bar{f}|L = f$ folgendermassen definieren:

$$\bar{f}^*\Delta^1 = \Lambda^1, \quad \bar{f}^*\Delta^n = \Lambda^n. \tag{5.3}$$

Denn erstens definieren wir $\bar{f}(K^0) = P^0$; und dann definieren wir $\bar{f}: \bar{K}^1 \to P^1$ $(\bar{f}|L = f)$ so dass das Element der Fundametalgruppe $\pi_1(P^n)$, welches durch $f|T^1 (T^1 \subset K - L)$ dargestellt wird, $\Lambda^1(T^1)$ ist (siehe (6.1)). Dann wird $\bar{f}$ zur Abbildung von $\bar{K}^2$ erweitert aus der Tatsache dass Λ^1 ein Cozyklus ist, und weil $\partial_k (k > 2)$ der exakten Reihe (3.2) *auf* für $n = k = l + 1$ ist, also gewinnen wir (5.3) mit Hilfe des Hilfssatzes 7. Folglich aus dem Hilfssatze 6 wird $\bar{f}$ zur Abbildung von $\bar{K}^{n+1}$ erweitert, w. z. b. w.

6. Klassifikationssatz. Wesentlich, folgt der Klassifikationssatz aus dem Erweiterungssatze. Aber wir beweisen es mit direkter Methode für dieselbe simpliziale Zerlegung wie K. In diesem Paragraphen, setzen wir $K^n = K$ voraus.

HILFSSATZ 8. *Sind $f, g: K \to P^n$ zwei normierte Abbildungen, gilt $f \simeq g$ dann und nur dann*

$$f^*\Delta^1 \backsim g^*\Delta^1, \quad f^*\Delta^n \backsim g^*\Delta^n. \tag{6.1}$$

Dabei bezeichnen wir mit $\backsim$ die Cohomologie.

BEWEIS. Aus dem Whitneyschen 'Satze [13] (das gilt offenbar für jeden simplizialen Komplex), ***gelten*** (6.1) ***dann und nur dann werden die Cozyklen*** $f^*\Delta^1 \times \bar{0} + g^*\Delta^1 \times \bar{0}$ ***und*** $f^*\Delta^n \times \bar{0} + g^*\Delta^n \times \bar{1}$ ***in*** $K \times 0 \cup K \times 1$ ***zur Cozyklen in*** $K \times I$ ***erweitert.*** Dabei ist z. B. $f^*\Delta^1 \times \bar{0}$ die Cokette von $K \times 0$, welche nur auf $T^1 \times 0$ den Wert $f^*\Delta^1(T^1)$ nimmt. Die obige Aussage ist ganz ähnlich wie der Satz 1, und wird ähnlich bewiesen mit Hilfe der resten Aussagen in den Hilfssätzen 1 und 7, w. z. b. w.

Aus den Hilfssätzen 7 und 8, gewinnen wir leicht das haupte Ziel in diesem Paragraphen:

SATZ 2. (Klassifikationssatz). ***Für ungerades $n > 2$, korrespondieren die Menge der allen Abbildungsklassen von einem n-dimensionalen Komplexe K auf P^n eineindeutig mit den Elementen der Gruppe***

---

9) Aus der Exaktheit der Cohomologiereiche ist diese Aussage gleichgültig mit "dann und nur dann sind $\delta f^*\Delta^1$ und $\delta f^*\Delta^n$ cohomolog null in $K-L$" [3].

$$H^1(K,J_2)\oplus H^n(K,J).$$

Genauer sind die normierten Abbildungen $f,g:K\to P^n$ homotop dann und nur dann geben

$$(6.2)\qquad f^*,g^*:H^1(P^n,J_2)\oplus H^n(P^n,J)\to H^1(K,J_2)\oplus H^n(K,J)$$

denselben Homomorphismus. Dabei haben wir z. B. als

$$f^*(\alpha^1,\beta^n)=(f^*\alpha^1,f^*\beta^n),\quad \alpha^1\in H^1(P^n,J_2),\ \beta^n\in H^n(P^n,J)$$

bezeichnet.

BEMERKUNG. Früher erweiterte C. H. Dowker [3] den Hopfschen Satz für den Fall, wo ein para-kompakter normaler Raum in S^n abgebildet wird. Aber sein Beweis beruht wesentlich auf den Tatsache dass die Klasse der simplizialen Abbildung von einem simplizialen Komplexe auf S^n vollständig durch die Cohomologieklasse des Bildes des Erzeugenden der n-dimensionalen Cohomologiegruppe von S^n, durch den sogenannten induzierten Homomorphismus, bestimmt wird. Diese Tatsache ist auch gültig in ein bischen komplizierter Form in unserem Falle. Also wird unserer Satz 1 zum Falle, in welchem ein para-kompakter normaler Raum X mit dim $X\leqq n+1$ und seine abgeschlossene Teilmenge X_0 statt K und L erscheinen, erweitert. Auch wird der Satz 2 zum Falle, in welchem ein para-kompakter normaler Raum X mit dim $X\leqq n$ statt K erschien, erweitert. Der Beweis ist ganz ähnlich wie [3].

7. Einfachheit des reellen projektiven Raumes.

HILFSSATZ 9. *Für jedes Element $a\in\pi_n(P^n)$, und für das Erzeugende w von $\pi_1(P^n)$ gilt die folgende Gleichung:*

$$w.a=(-1)^{n+1}a.$$

BEWEIS. Sei $a_0\in\pi_n(P^n)$ das Erzeugende von $\pi_n(P^n)$ welches durch ν_n repräsentiert wird, und sei

$$(7.1)\qquad \phi_t=\left\|\begin{matrix}(\xi_t) & & & 0\\ & (\xi_t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\xi_t)\\ 0 & & & & (\eta_t)\end{matrix}\right\|\qquad (0\leqq t\leqq 1),$$

eine $(n+1)$-reihige quadratische Matrize, dabei sind (ξ_t) und (η_t) die folgenden Matrizen:

$$(\xi_t)=\left\|\begin{matrix}\cos\pi t & -\sin\pi t\\ \sin\pi t & \cos\pi t\end{matrix}\right\|$$

$$\begin{aligned}(\eta_t)&=(\xi_t)\ \text{für ungerades}\ n\\ &=1\ \text{für gerades}\ n.\end{aligned}$$

Setze man $\psi_t=\nu_n\phi_{1-t}$, dann für $z_0=(1,0,\dots,0)\in S^n$ schreibt $\psi_t(z_0)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ freilich das Erzeugende w von $\pi_1(P^n)$, und repräsentiert $\psi_1=\nu_n:S^n\to P^n$ das Element a_0. Andererseits

$$\psi_0(x_0,\dots,x_n)=[-x_0,\dots,-x_{n-1},(-1)^n x_n]$$
$$=[x_0,\dots,x_{n-1},(-1)^{n+1}x_n] \text{ für } (x_0,\dots,x_n)\in S^n.$$

Also muss $w\cdot a_0=(-1)^{n+1}a_0$ sein, w. z. b. w.

SATZ 3. *Die Homotopieklassen der Abbildungen $S^n\to P^n$ korrespondieren eineindeutig mit den Elementen der Gruppe $\pi_n(P^n)\approx J$ für ungerades n. Für gerades n, sind die Abbildungen der Elemente a und a' von $\pi_n(P^n)$ homotop, dann und nur dann $a=\pm a'$. Also korrespondieren solche Homotopieklassen eineindeutig mit den Zahlen* $0,1,2,\cdots$.

BEMERKUNG. Die Voraussetzung über die Dimensionszahl in den Sätzen 1 und 2 ist wesentlich. Z. B. nehmen wir die Abbildungen $f: S^n\to P^n$ für gerades n. In diesem Falle gelten $H^1(S^n,J_2)\approx 0$ und $H^n(P^n,J)\approx J_2$, aber es ist leicht dass (6.2) trivial ist für jede abbildung f. Also aus dem Satze 3 gilt der Klassifikationssatz nicht für gerades n[10].

8. Hopfsche Invariante.

HILFSSATZ 10. *P^3 ist 3-einfach.*

BEWEIS. Sei $\bar{f}$: $S^3\to S^2$ eine Abbildung. Sei a das Element von $\pi_3(P^2)$, welches durch $f=\nu_2\bar{f}$ gegeben wird. Alles Element von $\pi_3(P^2)$ wird durch solche Abbildung f induziert (3.1).

Nun werde $\bar{f}$ folgendermassen gegeben:

$$\bar{f}(x)=(f_0(x),f_1(x),f_2(x)) \qquad \text{für } x\in S^3,$$

und setzen wir es voraus dass $\bar{f}(1,0,0,0)=(1,0,0)$. Wenn wir eine Homotopie $\kappa_t=\nu_2\ \phi_{1-t}\ \bar{f}\ (0\leq t\leq 1)$ (siehe (7.1)) von S^3 auf P^2 konstruieren, repräsentiert offenbar κ_1 das Element a und repräsentiert

$$\kappa_0(x)=[-f_0(x),\ -f_1(x),\ f_2(x)]$$

das Element $w\cdot a$, weil $\kappa_t(z_0)$ das Erzeugende w von $\pi_1(P^2)$ schreibt. Aber aus den Untersuchungen von H. Hopf [6] und L. Pontrjagin [8], sind $\phi_0\bar{f}=\bar{f}: S^3\to S^2$ und $\bar{g}: S^3\to S^2$ mit

$$\bar{g}(x)=(f_0(x),\ f_1(x),\ -f_2(x)) \qquad \text{für } x\in S^3$$

homotop mit dem Bilde von z_0 ungeändert. Also sind $\kappa_1=\nu_2\phi_0\bar{f}=f$ und $\nu_2\bar{g}=\nu_2\phi_1\bar{f}=\kappa_0$ homotop mit dem Bilde von z_0 ungeändert, also gilt $w.a=a$, w. z. b. w.

Es gibt für jeden Punkt y auf P^2 genau zwei Urbildpunkte y_+ und y_- auf S^2 durch ν_2. Es ist bekannt dass es genau zwei Abbildungen $\bar{f}$, $\bar{\bar{f}}: S^3\to S^2$ mit $\nu_2\bar{f}=\nu_2\bar{\bar{f}}=f$. Wenn wir sowohl f als auch ν_2 und $\bar{f}$ als die simplizialen Abbildungen betrachten, gibt es zwei 1-dimensionale Urbildzyklen Z^1_+ und Z^1_+ in S^3 durch $\bar{f}$ von y_+ und y_- für jeden Punkt y, welcher ein innerer

10) Mit Hilfe des Satzes 3. lehrt eine einfache Betrachtung dass der Klassifikationssatz für die Cohomologiegruppen des lokalen Koeffizientenbereiches [9; Part III] vollständig wie Satz 2 nicht entsteht.

Punkt eines Simplexes von P^2 ist. Dann, können wir die Verschlingszahl $\gamma_f(y)$ von Z^1_+ und Z^1_- in S^3 definieren. Dabei werden die Orientierungen von Z^1_+ und Z^1_- durch die Orientierungen von S^3 und S^2 bestimmt. Wenn wir andere $\overline{\overline{f}}: S^3 \to S^2$ mit $\nu_2 \overline{\overline{f}} = f$ aufnehmen, dann müssen Z^1_+ und Z^1_- die Plätze vertauschen.

SATZ 4. *Die Abbildungsklassen von S^3 auf P^2 korrespondieren eineindeutig mit den ganzen Zahlen. Die Korrespondenz wird durch $f \to \gamma_f(y)$ bestimmt.*

BEWEIS. Aus dem Hilfssatze 10 wird es leicht bewiesen dass ν_2 eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Homotopieklassen von S^3 auf S^2 und den von S^3 auf P^2 induziert. Also gilt der Satz aus [6] und [8], w. z. b. w.

Ganz ähnlich wie oben können wir die Hopfsche Invariante für jede Abbildung von S^{2n-1} auf P^n definieren. Aber in den übrigen Fällen können wir die Homotopieklassen nicht durch diese Invarianten bestimmen.

KOROLLAR 2. *P^n ist m-einfach für jedes $n+2 \geqq m \geqq 1$, $m \neq n$ $(n \geqq 2)$.*

Der Beweis folgt aus dem Hilfssatze 10 und aus den folgenden Tatsachen:

$$\pi_{n+2}(P^n) \simeq \pi_{n+1}(P^n) \simeq \pi_4(P^2) \simeq J_2 \qquad \text{für } n > 2.$$

(Siehe [5] und [11]).

LITERATURVERZEICHNIS

[1] P. ALEXANDROFF und H. HOPF, Topologie, I, Berlin 1935.

[2] A. L. BLAKERS, Some relations between homology and homotopy groups, Ann. of Math., 49(1948), 428–461.

[3] C. H. DOWKER, Mapping theorems for non-compact spaces, Amer. Journ. of Math., 69(1947), 200–242.

[4] S. EILENBERG-S. MACLANE, Relations between homology and homotopy group of spaces II, Ann. of Math., 51(1950), 514–533.

[5] H. FREUDENTHAL, Über die Klassen der Sphärenabbildung I, Comp. Math., 5(1937–38), 297–314.

[6] H. HOPF, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann., 104(1931), 637–665.

[7] P. OLUM, Obstructions to extensions and homotopies, Ann. of Math., 52(1950), 1–50.

[8] L. PONTRJAGIN, A classification of mappings of the 3-dimensional complex into the 2-dimensional sphere, Rec. Math. (Math. Sbornik), N. S. 9(51), (1941), 331–363.

[9] N. E. STEENROD, The topology of fibre bundles, Princeton 1951.

[10] H. WADA, Über eine Vereinigung der Sätze von H. Hopf und N. Bruschinsky, Tôhoku Math. J. 2nd Ser., 4(1952), 77–79.

[11] G. W. WHITEHEAD, The $(n+2)$-nd homotopy group of the n-sphere, Ann. of Math., 52(1950), 245–247.

[12] J. H. C. WHITEHEAD, Combinatorial homotopy. II, Bull. Amer. Math. Soc, 55 (1949), 453–496.

[13] H. WHITNEY, The maps of an n-complex into an n-sphere, Duke Math. J., 3(1937), 51–55.

MATHEMATISCHES INSTITUT, TÔHOKU UNIVERSITÄT.