UNE REMARQUE SUR L'UNIFORMISATION DES ENSEMBLES ANALYTIQUES PLANS

HIDEAKI WATANABE

(Received April 14, 1953)

Le théorème suivant est dû à N. Lusin [1].

On peut uniformiser tout ensemble analytique plan par un ensemble $(A_{\rho\sigma\delta})$.

J'ai connu de "Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete 38 (1951) pp. 194–195" que ce résultat de Lusin est cité dans un mémoire de V. Ja. Arsenin et A. A. Liapounoff.

Le but de cette note est une amélioration de ce théorème.

Si nous dirons "ensembles (A_τ)" les ensembles qui sont des complémentaires d'ensembles (A_ρ), alors on voit facilement que la classe des ensembles $(A_{\tau\delta})$ forme une sous-classe de la classe des ensembles $(A_{\rho\sigma\delta})$.

Notre résultat est le suivant :

THÉORÈME. *Tout ensemble analytique plan est uniformisé par un ensemble* $(A_{\tau\delta})$.

Avant d'entrer la démonstration nous allons expliquer quelques notations.

Pour un point x de l'axe réelle OX, désignons par D_x la droite parallèle à l'axe OY qui est menée par le point $(x, 0)$.

Pour un ensemble plan E, désignons par γE [$\gamma' E$] la partie du plan qui est située audessus [audessous] de l'ensemble E et dont la projection sur l'axe OX coıncide avec la projection de l'ensemble E.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Soit E un ensemble analytique donné dans le plan OXY et soit

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

une représentation paramétrique de E. C'est-à-dire, les deux fonctions continues $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont définies dans le domaine J qui consiste de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0 < t < 1)$.

Soient $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ $(n_1, n_2 \ldots, n_k = 1, 2 \ldots)$ les intervalles de Baire d'ordre k, où

$$\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \supset \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}$$

pour k, $n_{k+1} = 1, 2, \ldots$.

Si nous posons $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ l'image de l'intervalle $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ par les fonctions φ et ψ, alors il est encore un ensemble analytique plan.

Posons

$$(1) \qquad M_k = \sum_{n_1,\ldots,n_k}^{1\ldots\infty}\Big[\gamma E_{n_1,\ldots,n_k} - \Big(\sum_{i_1<n_1} E_{i_1} + \sum_{i_2<n_2} E_{n_1,i_2} + \ldots + \sum_{i_k<n_k} E_{n_1,\ldots,n_{k-1},i_k}\Big)\Big],$$

$$(1') \qquad N_k = \sum_{n_1,\ldots,n_k}^{1\ldots\infty}\Big[\gamma' E_{n_1,\ldots,n_k} - \Big(\sum_{i_1<n_1} E_{i_1} + \sum_{i_2<n_2} E_{n_1,i_2} + \ldots + \sum_{i_k<n_k} E_{n_1,\ldots,n_{k-1},i_k}\Big)\Big]$$

et

$$(2) \qquad U = E - \sum_{k=1}^{\infty}[M_k + N_k].$$

Si un ensemble S est un ensemble analytique plan, les ensembles γS et $\gamma' S$ sont des ensembles (A_ρ) d'après notre résultat (voir [2] et [3]). Donc, en vertu de (1) et (1′), les ensembles M_k et, N_k sont des ensembles $(A_{\rho\sigma})$; en outre d'après (2) l'ensemble U est un complémentaire d'un ensemble $(A_{\rho\sigma})$, c'est-à-dire, un ensemble $(A_{\tau\delta})$.

Nous prouverons que cet ensemble U fournira un uniformisateur de l'ensemble E. Pour cela la démonstration se dividera en trois parties.

(i) Il est evident d'après (2) que

$$U \subset E.$$

(ii) Nous montrerons que

$$\operatorname{Proj} U = \operatorname{Proj} E.$$

Considérons un point x contenu dans $\operatorname{Proj} E$. Il suffit de montrer que l'ensemble U contient une partie commune avec la droite D_x.

Soit δ_{n_1} le premier entre les intervalles de Baire d'ordre 1 dont les images par les fonctions φ et ψ contiennent une partie commune avec D_x. Cette existence sera évidente. Soit δ_{n_1,n_2} le premier des intervalles de Baire d'ordre 2 dont les images contiennent une partie commune avec D_x; et ainsi de suite. Nous avons une suite décroissante des intervalles de Baire:

$$\{\delta_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Soit t, $t \in J$ le seul point commun de ces intervalles, et posons

$$P = (\varphi(t),\ \psi(t)).$$

D'après $t \in \delta_{n_1,\ldots,n_k}$ on a $P \in E_{n_1,\ldots,n_k}$ et la continuité des fonctions φ et ψ implique que le point P est situé sur la droite D_x.

Nous montrerons que P est contenu dans U. Pour cela il suffit de prouver, d'après (2), que le point P n'appartient ni aux ensembles M_k ni aux N_k. S'il existait un indice k tel que $P \in M_k$, il existrait un système

$$(n_1', n_2', \ldots, n_k')$$

tel que

(3) $$P \in \gamma E_{n'_1, n'_2, \dots, n'_k},$$

(4) $$P \overline{\in} \sum_{i_1 < n'_1} E_{i_1} + \sum_{i_2 < n'_2} E_{n'_1, i_2} + \dots$$
$$+ \sum_{i_k < n'_k} E_{n'_1, \dots, n'_{k-1}, i_k}.$$

Comme le point P est situé sur la droite D_x, l'ensemble $E_{n'_1, \dots, n'_k}$ contient, d'après (3), au moins un point commun avec D_x audessous de P.

D'après $P \in E_{n_1, \dots, n_k}$ on a $P \overline{\in} \gamma E_{n_1, \dots, n_k}$, et on conclut, en vertu de (3), que les deux systèmes $(n_1, \dots, n_k)$ et $(n'_1, \dots n'_k)$ sont distincts.

Conséquemment, d'après notre définition du système $(n_1, \dots, n_k)$, il subsiste une des relations suivantes :

$$n_1 < n'_1;$$
$$n_1 = n'_1 \text{ et } n_2 < n'_2;$$
$$\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots;$$
$$n_1 = n'_1, \ n_2 = n'_2, \dots, n_{k-1} = n'_{k-1} \text{ et } n_k < n'_k.$$

C'est-à-dire, une relation des suivantes se remplie:

$$E_{n_1} \subset \sum_{i_1 < n'_1} E_{i_1};$$

$$E_{n_1, n_2} \subset \sum_{i_2 < n'_2} E_{n'_1, i_2};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

$$E_{n_1, \dots n_k} \subset \sum_{i_k < n'_k} E_{n'_1, \dots, n'_{k-1}, i_k}.$$

On a donc, d'après $P \in E_{n_1, \dots, n_j}$ $(j = 1, 2, \dots k)$,

$$P \in \sum_{i_1 < n'_1} E_{i_1} + \sum_{i_2 < n'_2} E_{n'_1, i_2} + \dots + \sum_{i_k < n'_k} E_{n'_1, \dots, n'_{k-1}, i_k};$$

cela contredit la condition (4).

Nous avons ainsi $P \overline{\in} \sum_{k=1}^{\infty} M_k$, de même nous obtenons $P \overline{\in} \sum_{k=1}^{\infty} N_k$, c'est-à-dire ,

$$P \in U.$$

Le point $x \in \text{Proj } E$ étant arbitraire, on conclut que

$$\text{Proj } E = \text{Proj } U.$$

(iii) Maintenant nous montrerons que l'ensemble U est uniforme. Soient les mêmes que dans (ii) les points x et P et les systèmes $(n_1, n_2, \ldots . n_k)$ $(k = 1, 2, \ldots .)$.

Pour montrer l'uniformité de l'ensemble U, il suffit de prouver que tout point Q sur la droite D_x et autre que P n'appartient pas à l'ensemble U.

Il existe un cercle C du centre P tel que

$$Q \in \gamma C \quad \text{ou} \quad Q \in \gamma' C.$$

Par la continuité des fonctions φ et ψ, l'ensemble $E_{n_1, \ldots, n_k}$ est contenu dans le cercle C si k est suffisamment grand. Donc on a

$$Q \in \gamma E_{n_1, \ldots, n_k} \quad \text{ou} \quad Q \in \gamma' E_{n_1, \ldots, n_k}.$$

D'après la définition du système $(n_1, \ldots, n_k)$, la somme

$$\sum_{i_1 < n_1} E_{i_1} + \ldots + \sum_{i_k < n_k} E_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k}$$

ne contient aucune partie commune avec la droite D_x. Comme $Q \in D_x$, on a

$$Q \overline{\in} \sum_{i_1 < n_1} E_{i_1} + \ldots + \sum_{i_k < n_k} E_{n_1, \ldots, n_{k-1}, i_k}.$$

Conséquemment, pour ce nombre k, on a $Q \in M_k$ ou $Q \in N_k$ d'après (1) ou (1'); et d'après (2) on a

$$Q \overline{\in} U. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

TRAVAUX CITÉS

[1] N LUSIN, Sur le problème de M Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles, Mathematica, 4(1930), 54-66.

[2] H. WATANABE, L'uniformisation et la séparabilité des ensembles plans I: Théorèmes fondamentaux, Tôhoku Math. Journ., 4(1952), 38-48.

[3] H. WATANABE, L'uniformisation et la séparabilité des ensembles plans II: Application aux problèmes de l'uniformisation et de la séparabilité, Tôhoku Math. Journ. 4(1952), 257-263.

L'INSTITUT MATHÉMATIQUE, UNIVERSITÉ DE TÔHOKU, SENDAI.