SUR LES FORMES NORMALES

YOSIHISA IZUMI

(Received February, 22, 1954)

Le cas général de l'Entscheidungsproblem du calcul des predicats de premier ordre a été prové insoluble par K. Gödel [1], tandis que quant aux cas particuliers de ce problème il y a une serie des résultats intéressants, qui sont les deux espèces suivantes:
1) d'une part ils ont comme objet les solutions de quelques cas particuliers; c.-à-d. ils examinent la possibilité de remplir quelques formules spéciales dans quelques champs spéciaux;
2) d'autre part ils ont comme objet les réductions, qui réduirent la solution de l'Entscheidungsproblem général en la solution d'un cas particulier de ce problème.

Il est bien entendu que les études de cettes deux espèces avancent en se conduisant l'un l'autre, et que la première espèce a des résultats remarquables; mais ce n'est pas ici le lieu de les indiquer.

Concernant la forme normale qui a au début tou les signes (x) et (Ey) apparaissant dans elle-même, nous appellerons la série de ces signes sa préfixe, et la formule qui reste à l'exception de sa préfixe, sa matrice.

Les résultats de la deuxième espèce sont les trois espèces suivantes:
2.1) Ils réduirent la solution de l'Entscheidungsproblem général en la solution d'une formule, qui a la préfixe spéciale Th. Skolem [2] a démontré que l'Ent scheidungsproblem est réduit en la formule qui a la préfixe suivante

2.11) $$(x_1)(x_2)\ldots(x_m)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n).$$

K. Gödel [3] a démontré que l'Entscheidungsproblem est réduit en la formule ayant la préfixe suivante

2.12) $$(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n).$$

W. Ackermann [4] a indiqué que l'Entscheidungsproblem est réduit en la formule ayant la préfixe suivante

2.13) $$(Ey_1)(x_1)(Ey_2)(x_2)\ldots(x_n).$$

2.2) Ils réduirent la solution de l'Entscheidungsproblem général en la solution d'une formule, qui a la matrice spéciale.
2.21) L. Löwenheim [5] a démontré que l'Entscheidungsproblem est réduit en la formule dont la matrice ne contient pas de fonctions qui ont plus que deux arguments.
2.22) J. Herbrand [6] a démontré que l'Entscheidungsproblem est réduit en la formule spéciale dont la matrice ne contient qu'une fonction à trois

arguments, ou bien encore trois fonctions à deux arguments.
2.3) Ils réduirent la solution de l'Entscheidungsproblem en la solution d'une formule qui a la préfixe et la matrice spéciale.
2.31) L. Kalmár [7] a démontré que l'Entscheidungsproblem est réduit en la formule qui a la préfixe suivante

$$(Ey_1)(Ey_2)\ldots.(Ey_{m-1})(x_1)(x_2)(Ey_m)(x_3)\ldots.(x_n)$$

et la matrice contenant seulement une fonction à deux arguments.
2.32) L. Kalmár [8] a démontre que l'Entscheidungsproblem est réduit en la formule qui a la préfixe suivante

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)\ldots.(Ey_n)$$

et la matrice contenant seulement une fonction à deux arguments.
2.33) L. Kalmár [9] a démontré que l'Entscheidungsproblem est réduit en la formule qui a la préfixe suivante

$$(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(x_4)\ldots.(x_n)$$

et la matrice contenant seulement une fonction à deux arguments.

En dehors des formules indiquées plus haut, J. Pépis [10] [11] a démontré de nombreuses formules de la deuxième espèce. Concernant la possibilité de remplir on les appelle les formules normales équivalentes.

Nous désignons par $R(A)$ la formule normale qui est, concernant la possibilité de remplir, équivalente à la formule A, et par $D(A)$ une formule normale qui est, concernant la déduction, équivalente à la formule A.

Jusqu'ici il y a eu une seule forme connue de $D(A)$ qui a été inventée par Th. Skolem, mais, d'après les deux théorèmes suivants que nous démontrerons, nous aurons de nombreuses formes de $D(A)$ qui correspondent aux nombreuses formes de $R(A)$, et nous pouvons construire facilement d'une forme de $R(A)$ une forme de $D(A)$ ou inversement. Désignons par A *rem* la possibilité de remplir A, et par A *univ* la validité universelle de A.

THÉORÈME 1. *$\overline{D}(\overline{A})$ est équivalent, concernant la possibilité de remplir, à $R(A)$, c.-à-d.,*

$$\overline{D}(\overline{A})\ \mathit{rem} \leftrightarrow R(A)\ \mathit{rem}.$$

DÉMONSTRATION. Si l'on désigne par A *dem* la démontrabilité de A, d'après la définition de $D(A)$, on a

$$\overline{A}\ \mathit{dem} \leftrightarrow D(\overline{A})\ \mathit{dem}.$$

D'autre part, en vertu de la non-contradiction et la perfection faible du système d'axiomes du calcul des prédicats de premier ordre [12] [13], la validité universelle est équivalente à la démontrabilité. Par conséquent, on a

$$\overline{A}\ \mathit{univ} \leftrightarrow D(\overline{A})\ \mathit{univ}.$$

On en déduit

$$\overline{A}\ \overline{\mathit{univ}} \leftrightarrow D(\overline{A})\ \overline{\mathit{univ}},$$

d'où l'on obtient

$$A\ rem \leftrightarrow \overline{D}(\overline{A})\ rem.$$

D'autre part, on a, d'après la définition de $R(A)$,

$$A\ rem \leftrightarrow R(A)\ rem.$$

Par conséquent il résulte que

$$\overline{D}(\overline{A})\ rem \leftrightarrow R(A)\ rem. \qquad \text{Q. E. D.}$$

Désignons par $D_s(A)$ une forme spéciale de $D(A)$ qui est inventée par Th. Skolem, et par $R_s(A)$ une forme spéciale de $R(A)$ qui correspond à $D_s(A)$. Pour construire $R_s(A)$, d'après le Théorème 2, nous construirons $D_s(\overline{A})$ suivant la méthode d'Hilbert et de Bernays [14] qui nous permet de construire $D_s(\overline{A})$ pour $\overline{A}$. Alors $\overline{D}_s(\overline{A})$ est ce que nous cherchons.

THÉORÈME 2. *$\overline{R}(\overline{A})$ est équivalent, concernant la déduction, à $D(A)$, c.-à-d.*

$$\overline{R}(\overline{A})\ dem \leftrightarrow D(A)\ dem.$$

DÉMONSTRATION. D'après la définition de $R(A)$, on a

$$\overline{A}\ rem \leftrightarrow R(\overline{A})\ rem.$$

On en déduit

$$\overline{A}\ \overline{rem} \leftrightarrow R(\overline{A})\ \overline{rem},$$

c.-à-d.

$$A\ univ \leftrightarrow R(\overline{A})\ univ,$$

d'où l'on obtient

$$A\ dem \leftrightarrow \overline{R}(\overline{A})\ dem.$$

D'autre part, on a, d'après la définition de $D(A)$,

$$A\ dem \leftrightarrow D(A)\ dem.$$

Par conséquent on a

$$\overline{R}(\overline{A})\ dem \leftrightarrow D(A)\ dem. \qquad \text{Q. E. D.}$$

Désignons par $R_g(A)$ une forme spéciale de $R(A)$ qui est inventée par K. Gödel, et par $D_g(A)$ une forme spéciale de $D(A)$ qui correspond à $R_g(A)$. Pour construire $D_g(A)$, d'abord nous construirons $R_s(\overline{A})$ suivant le Théorème 2, et puis, d'après la méthode de J. Pépis [10] [11] nous construirons $R_g(A)$ tel que $R_s(\overline{A})$ *rem* $\leftrightarrow$ $R_g(\overline{A})$ *rem*. Alors $\overline{R}_g(\overline{A})$ est ce que nous cherchons.

Dans le cas de la construction de $D_g(A)$ nous nous avons servi de $R_s(A)$, parce que $R_s(A)$ a été le point de départ pour l'étude de toutes les autres formes de $R(A)$.

RÉFÉRENCES

[1] K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I. Monatsh. f. Math u. Phys., 38 (1931), 173-198.

[2] TH. SKOLEM, Logisch-Kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit

oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen. Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Math.-Nat. Kl. 4 (1920), 1-36.

[3] K. GÖDEL, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls. Monatsh. f. Math. u. Phys., 40 (1933), 433-443.

[4] W. ACKERMANN, Beiträge Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Annalen, 112 (1936). 419-432.

[5] L. LÖWENHEIM, Über Möglichkeiten im Relativkalkül. Math. Annalen, 76 (1915), 447-470.

[6] J. HERBRAND, Sur le problème fondamentale de la logique mathématique. C. R. Varsovie, 24 (1931), 12-56.

[7] L. KALMAR, Zurückführung des Entscheidungsproblems auf dem Fall von Formeln mit einer einzigen, binären, Funktionsvariablen. Compositio Math., 4 1936), 137-144.

[8] L. KALMAR, On the reduction of the decision problem, Journal of Symbolic. Logic. 12 (1947), 65-73.

[9] L. KALMAR, On the reduction of the decision problem, ibid., 15 (1950), 161-173.

[10] J. PÉPIS, Beiträgezur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems. Acta Szeged, 8 (1936), 7-41.

[11] J. PÉPIS, Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Fund. Math., 30 (1938), 257-348.

[12] G. GENTZEN, Untersuchungen über das logische Schliessen, I und II. Math. Zeits., 39 (1934), 176-210, 405-431.

[13] K. GÖDEL, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalkuls. Monats. f. Math. u. Phys., 37 (1930), 349-360.

[14] D. HILEERT et P. BERNAYS , Grundlagen der Mathematik, I. (1934), 158-164.

L'UNIVERSITÉ DE TÔHOKU, SENDAI.