SUR LE PROBLÈME DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE

KAZUO ISHIGURO

(Received December 15, 1953; in revised form March 1, 1954)

Nous démontrons la proposition suivante.

Pour chaque suite décroissante de nombres positifs $\{\varepsilon_k\} \downarrow 0$, *s'il existe une suite de nombres réels* $\{\eta_k\}$, $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$, *et si une fonction mesurable réelle* $\theta(x)$ *satisfait à l'équation fonctionnelle suivante*

$$(1) \qquad \lim_{k\to\infty} \text{mes}\{x \mid \theta(x+\varepsilon_k) \neq \eta_k + \theta(x)\} = 0,$$

alors $\theta(x)$ *est linéaire sur un ensemble de mesure positive.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer pour l'intervalle $[0,1]$ de x. En outre, dans la condition énoncée, on peut varier ε continument. Autrement dit: étant donné un nombre positif arbitrairement petit ε, il existe un nombre $\eta(\varepsilon)$ tel que

$$(2) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \text{mes}\{x \mid \theta(x+\varepsilon) \neq \eta(\varepsilon) + \theta(x)\} = 0.$$

Sinon, en effet, il existe un nombre $\sigma > 0$ et pour chaque intégral n il existe ε_n^* tel que $\frac{1}{n} > \varepsilon_n^* > 0$, et pour chaque η_n^*

$$\text{mes}\{x \mid \theta(x+\varepsilon_n^*) \neq \eta_n^* + \theta(x)\} \geqq \sigma > 0.$$

Cela contredit l'hypothèse.

Par suite[1], étant donné un nombre arbitraire $\omega > 0$, il existe ε_ω, tel que $\varepsilon_\omega > \varepsilon > 0$ entraine

$$\theta(x+\varepsilon) - \theta(x) = \eta(\varepsilon) \qquad \text{pour tout } x \in E(\varepsilon),$$

où $E(\varepsilon)$ est un ensemble de mesure $> 1 - \frac{\omega}{3}$.

Si ε' et ε'' sont des nombres positifs tels que $\varepsilon_\omega > \varepsilon' + \varepsilon''$, on a donc les trois formules suivantes

$$(3) \qquad \theta(x+\varepsilon'+\varepsilon'') - \theta(x) = \eta(\varepsilon'+\varepsilon'') \text{ pour tout } x \in E(\varepsilon'+\varepsilon''),$$
$$\text{où mes } E(\varepsilon''+\varepsilon') > 1 - \frac{\omega}{3}.$$

$$(4) \qquad \theta(x+\varepsilon') - \theta(x) = \eta(\varepsilon') \text{ pour tout } x \in E(\varepsilon'), \text{ où mes } E(\varepsilon') > 1 - \frac{\omega}{3}.$$

$$(5) \qquad \theta(x+\varepsilon'') - \theta(x) = \eta(\varepsilon'') \text{ pour tout } x \in E(\varepsilon''), \text{ où mes } E(\varepsilon'') > 1 - \frac{\omega}{3}.$$

Soit $E^*(\varepsilon'')$ l'ensemble de tous les points $y = x - \varepsilon'$, où $x \in E(\varepsilon'')$. On a d'après (5)

$$(6) \qquad \theta(x+\varepsilon'+\varepsilon'') - \theta(x+\varepsilon') = \eta(\varepsilon'') \text{ pour tout } x \in E^*(\varepsilon''),$$

1) Cf. Remarque.

$$\text{où mes } E^*(\varepsilon'') = \text{mes } E(\varepsilon'') = 1 - \frac{\omega}{3}.$$

Donc pour tout $x \in E(\varepsilon' + \varepsilon'') \cap E(\varepsilon') \cap E(\varepsilon'')$, on a (3), (4), (6) au même temps. (3) — (4) — (6) entraine

$$\eta(\varepsilon' + \varepsilon'') = \eta(\varepsilon') + \eta(\varepsilon'')$$

et
$$\text{mes}\{E(\varepsilon' + \varepsilon'') \cap E(\varepsilon') \cap E^*(\varepsilon'')\} > 1 - \left(\frac{\omega}{3} + \frac{\omega}{3} + \frac{\omega}{3}\right) = 1 - \omega,$$

où ω est un nombre arbitraire.

D'ailleurs d'après l'hypothèse

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \eta(\varepsilon) = 0.$$

Donc il faut $\eta(\varepsilon) = a\varepsilon$ pour ε assez petit, où a est un quelque nombre réel.

Considérons la signification de la proposition. Le graphique de la fonction $y = \theta(x + \varepsilon)$, A, est la figure translatée à gauche seulement de ε du graphique de $y = \theta(x)$. Le graphique de la fonction $y = \theta(x) + a\varepsilon$, B, est la figure translatée en haut (ou bas) seulement de $a \cdot \varepsilon$ du graphique de $y = \theta(x)$.

$$E(\varepsilon) = \{x \mid \theta(x + \varepsilon) = \theta(x) + a\varepsilon\}$$

est l'ensemble de x-coordonné de $A \cap B$. Autrement dit, $E(\varepsilon)$ est l'ensemble translatée à gauche de x-coordonné de $X \cap Y$, où X est le graphique de la function $y = \theta(x)$ et Y est la figure translatée vers la direction $\tan^{-1}a$ seulement de $\sqrt{1 + a^2}\,\varepsilon$. Il est remarquable que a est un nombre constant et indépendant de ε. Alors $x \in E(\varepsilon)$ est équivalent à $(x + \varepsilon, \theta(x) + a\varepsilon) \in X$.

Constituons l'ensemble S de la manière suivante. A partir de chaque point $(x, \theta(x)) \in X$ on tire la demi-droite vers la direction $\tan^{-1}a$, soit $l(x)$. Si $l(x)$ contient le point $(x^*, \theta(x^*))$ de X à distance $\varepsilon^* \sqrt{1 + a^2}$ du point $(x, \theta(x))$, on met le point (x^*, ε^*) sur (x, ε)-plan. (Fig. 1) Soit S l'ensemble de tous les points (x^*, ε^*). Soit $P(\varepsilon^*)$ la projection sur x-axe de l'intersection de S et la droite $\varepsilon = \varepsilon^*$. $P(\varepsilon^*) = \{x \mid (x, \varepsilon^*) \in S\}$. Soit $Q(x^*)$ la projection sur ε-axe de l'intersection de S et la droite $x = x^*$. Alors mes $P(\varepsilon^*) =$ mes $E(\varepsilon^*)$ pour tout ε^*.

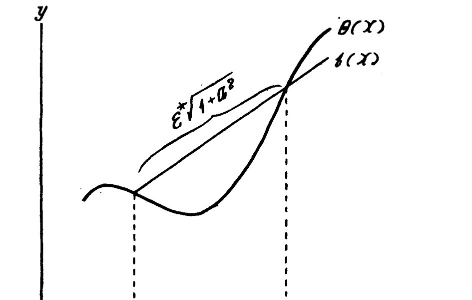

Fig. 1

A la fin, l'hypothèse de la proposition est la suivante. Pour chaque nombre positif σ, il existe un nombre $\varepsilon_\sigma > 0$ tel que $\varepsilon_\sigma > \varepsilon > 0$ entraine

$$1 > \text{mes } P(\varepsilon) > 1 - \sigma.$$

Si nous montrons que mes $Q(x^*) > 0$ pour quelque x^*, la proposition est démontrée.

Si S est un ensemble général, cela n'est absolument pas vrai dans l'axiom de Zermelo. Mais, si S est un ensemble mesurable, cela est évident d'après le théorème de Fubini[2]. En effet, pour un ensemble mesurable S.

$$\begin{aligned}\text{mes (plan)}\, S &= \int \text{mes (linéaire)} Q(x) dx \\ &= \int \text{mes (linéaire)} P(\varepsilon) d\varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Par suite pour quelque x mes (lin.) $Q(x) > 0$. Donc il suffit de montrer que S est un ensemble mesurable.

Pour cela, considérons dans l'espace (x, y, ε) le hexaèdre rectangle duquel les sommets sont $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,a,1)$, ..., $(1,1,a)$. (Fig. 2)

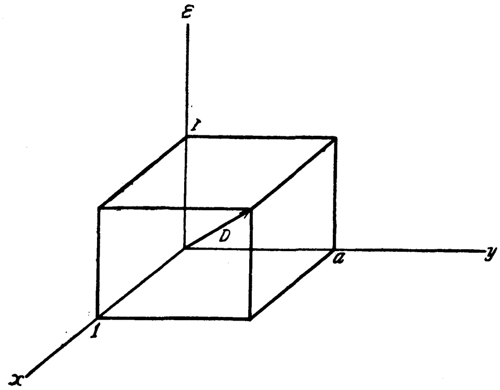

Fig. 2

Soit $\mathfrak{D}$ la direction de $(0,0,0)$ vers $(1,1,a)$. Mettons le graphique de $y = \theta(x)$ sur (x,y)-plan. A ce moment on enlève l'ensemble de mesure nul de x-axe tel que sur le reste, $K(\in \mathfrak{F}_\sigma)$, $\theta(x)$ est une fonction mesurable B. Soit $\theta^*(x)$ la restriction de $\theta(x)$ sur K. Constituons S^* de cette fonction $\theta^*(x)$ comme on contitue S de $\theta(x)$. Il suffit de démontrer que S^* est mesurable puisque mes $K = 1$.

Posons

$$E(x,y) = E\{(x,y) \mid y = \theta(x), x \in K\}.$$

A partir de chaque point de $E(x,y)$, on tire la droite parallel à ε-axe, soit M. Dans même espace à partir de chaque point de $E(x,y)$, on tire la demi-droite vers la direction $\mathfrak{D}$, soit N. La projection de $M \cap N$ sur (x, ε)-plan est S^*. (Fig. 3)

D'ailleurs $E(x,y)$ est l'ensemble borelien, puisque $K \in \mathfrak{F}_\sigma$ et $y = \theta^*(x)$ est un

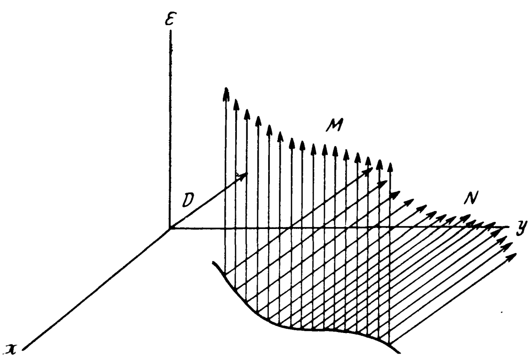

Fig. 3

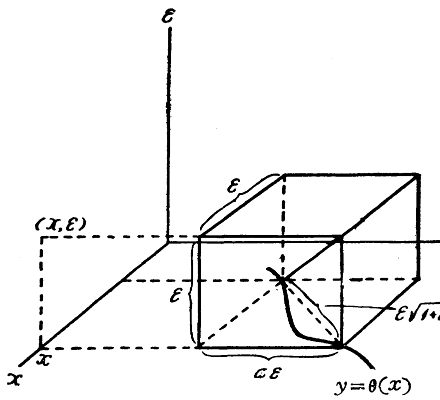

Fig. 4

2) SAKS, Theory of the integral.

ensemble mesurable B[3]. Par suite M et N sont les ensembles boreliens[4]. Donc $M \cap N$ est l'ensemble borelien, et S^* est l'ensemble analytique,[5] donc mesurable. c. q. f. d.

J'exprime ma reconnaissance sincère à professear Kunugui.

REMARQUE. Après avoir envoyé ce travail a l'éditeur, j'ai reçu un avis très intéressant, celui d'écrire la dernière partie de mon travail comme ci-dessous. Cela grâce à M. Shigeki Yano à qui l'éditeur en avait parlé. A tous les deux mes remerciements sincères.

DÉMONSTRATION. Posons

$$F(x, t) = \theta(x + t) - \theta(x),$$

$F(x, t)$ est une fonction mesurable de (x, t),

$$\varphi(t) \equiv \text{mes}\{x \,|\, \theta(x + t) = \theta(x),\ \ x \in (0, 1)\} = \text{mes}\,\{x \,|\, F(x, t) = 0\}$$

donc si t tendent vers $0, 0 < t < t_0$, il résulte $\varphi(t) > \frac{1}{2}$. Donc

$$\int_0^{t_0} \varphi(t)\, dt \geqq \frac{1}{2} t_0$$

Posons la fonction caractéristique de $\{(x, t) \,|\, F(x, t) = 0\}$ comme $c(x, t)$, il résulte

$$\varphi(t) = \int_0^1 c(x, t) dx.$$

Donc

$$\int_0^{t_0} dt \int_0^1 c(x, t) dx \geqq \frac{1}{2} t_0$$

et d'après le théorème de Fubini, il existe un certain x_0 tel que

$$\int_0^{t_0} c(x_0, t) dt > 0$$

C'est-à-dire

$$\text{mes}\{t \in (0, t_0) \,|\, F(x_0, t) = 0\} > 0.$$

Donc

$$\theta(x_0 + t) = \theta(x_0)$$

sur un ensemble de t de mesure positive, et $\theta(x)$ = const. sur un ensemble de x de mesure positive. c. q. f. d.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE HOKKAIDO, SAPPORO.

3) KURATOWSKI, Topologie 1.
4) KURATOWSKI, Topologie 1.
5) KURATOWSKI, Topologie 1