SUR LA NOTION DE LA PERFECTION

YOSIHISA IZUMI et TÔRU WADA

(Received December 14, 1954)

Puisque les notions de la perfection et de la non-contradiction d'un système d'axiomes du calcul des propositions sont toujours définies quant aux matrices, le rapport entre ces notions peut être réduit à celui entre ses matrices.

Désignons par S un ensemble qui contient toutes les propositions variables $a, b, c, \cdots, x, y, z,$ et qui est fermé concernant les opérations $\vee, \cdot, -, \rightarrow, \sim$, et par $A, B, C, \cdots, X, Y, Z$ les sous-ensembles de S, et par M_i un produit de tous les ensembles qui contiennent toutes les formules satisfaisant une matrice m_i à i valeurs $(2 \leq i \leq \aleph_0)$, et par $Fl(A)$ un produit de tous les ensembles qui contiennent A et qui sont fermés concernant les règles de substitution et de modus ponens.

Nous définissons une série des matrices comme suit:

Désignons par $V(m_i)$ le domaine des variables d'une matrice m_i, par $W(m_i)$ l'image de $V(m_i)$. m_n est sériel, c.-à-d. m_n forme une série $\{m_n\}$, si l'on a $V(m_n) = W(m_n)$ pour tous n tels que $2 \leq n \leq \aleph_0$, pourvu que la valeur désignée de m_n soit toujours 0. Toutes les matrices sont sérielles ou non-sérielles.

Exemples des matrices sérielles.

La matrice du système d'axiomes du calcul des propositions de Hilbert [1] et celle du système d'axiomes du calcul des propositions trivalentes de J. Lukasiewicz [2] appartiennent à une même série des matrices, parce que leur matrices sont comme suit:

Hilbert

Lukasiewicz

$\vee$	0	1	2	…………
0	0	0	0	
1	0	1	2	
2	0	2	2	
⋮				⋱

$\cdot$	0	1	2	…………
0	0	1	2	
1	1	1	1	
2	2	1	2	
⋮				⋱

$\rightarrow$	0	1	2	…………
0	0	1	2	
1	0	0	0	
2	0	2	0	
⋮				⋱

x	$\bar{x}$
0	1
1	0
2	2
	⋮

Mais la matrice du système d'axiomes de J. Lukasiewicz et celle du système d'axiomes de A. Heyting [3] n'appartiennent pas à une même série des matrices, parce que l'axiome de A. Heyting

$$(x \to y).(x \to \bar{y}) \to \bar{x}$$

ne satisfait pas à la matrice citée plus haut de J. Lukasiewicz, c.-à-d. cet axiome prend la valeur 2 par cette matrice lorsque x prend la valeur 0 et y prend la valeur 2.

Au contraire l'axiome de J. Lukasiewicz

$$(\bar{x} \to \bar{y}) \to (y \to x)$$

prend la valeur 2 par la matrice suivante [4] de A. Heyting

Hilbert

Heyting

$\vee$	0	1	2	………
0	0	0	0	
1	0	1	2	
2	0	2	2	
⋮				⋱

$\cdot$	0	1	2	………
0	0	1	2	
1	1	1	1	
2	2	1	2	
⋮				⋱

$\to$	0	1	2	………
0	0	1	2	
1	0	0	0	
2	0	1	0	
⋮				⋱

x	$\bar{x}$
0	1
1	0
2	1
⋮	⋮

lorsque x prend la valeur 2 et y prend la valeur 0.

Exemple d'une matrice non-sérielle.

La matrice que A. Heyting a employée pour démontrer l'indépendance d'un de ses axiomes n'est pas sérielle comme suit [5]; c.-à-d. on a $W(m_3) \subsetneqq V(m_3)$.

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	0

$\cdot$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	0

$\to$	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	0
2	0	1	1

x	$\bar{x}$
0	1
1	0
2	1

Lorsque l'on a $W(m_i) \subsetneqq V(m_i)$, les valeurs qui ne paraissent pas dans $W(m_i)$ ne sont nécessaires que pour la démonstration de l'indépendance, et lorsque l'on a $V(m_i) \subsetneqq W(m_i)$, on ne peut pas démontrer la non-contradiction d'un système d'axiomes par cette matrice, c'est pourquoi les systèmes d'axiomes qui s'emploient en effet ont toujours les matrices sérielles.

Nous démontrerons une propriété d'une série des matrices.

THÉORÈME 1. *$M_{n+1} \subset M_n$, pour $2 \leq n \leq \aleph_0$.*

DÉMONSTRATION. On se sert de l'induction mathématique.

Fixons un m_2 et considérons tous m_3 qui contiennent ce m_2. Alors, si l'on a $\bigcap_i m_3^i = m_2$, on aura $\bigcup_i M_3^i = M_2$. D'autre part, il existe évidemment $\bigcap_i m_3^i = m_2$ pour une série des matrices. Par conséquent, on a

(1) $$M_3 \subset M_2.$$

Nous supposons que

(2) $$\text{si l'on a } m_{n-1} = \bigcap_i m_n^i, \text{ on aura } M_{n-1} = \bigcup_i M_n^i,$$

et nous démontrerons que

(3) $$\text{si l'on a } m_n = \bigcap_i m_{n+1}^i, \text{ on aura } M_n = \bigcup_i M_{n+1}^i.$$

En prenant M_n^a qui est un de M_n, on tire de (2), à cause de la série des matrices,

(4) $$M_n^a \subset M_{n-1}.$$

M_n^a est un produit de tous les ensembles qui contiennent toutes les propositions qui prennent toujours la valeur 0 par la matrice m_n^a. En mettant dans l'ensemble $(M_{n-1} - M_n^a)$ toutes les propositions qui ne prennent pas toujours la valeur 0 par la matrice m_n^a, nous supposons qu'elles prennent la valeur 1. Si l'on prend M_{n-1} pour S, le rapport entre M_{n-1} et M_n^a sera égal à celui entre S et M_2. Puisque l'on a (1) pour M_2, on aura (3) pour M_{n+1}. Q. E. D.

Définissons la non-contradiction de A (que nous considérons comme un système d'axiomes du calcul des propositions) par la formule

Df 1 $$(\exists M_i)\ (Fl(A) \subset M_i),$$

par conséquent, la contradiction de A par la formule

$$(\overline{\exists M_i})\ (Fl(A) \subset M_i),$$

et la perfection faible de A par la formule

Df 2 $$(\exists M_i)\ (M_i \subset Fl(A)),$$

et de plus, la perfection forte de A par la formule

Df 3 $$(\forall M_n)\ (M_n \subset Fl(A)), \quad 2 \leq n \leq \aleph_0.$$

THÉORÈME 2. *Si A est fortement parfait concernant une série $\{m_n\}$, A est faiblement parfait concernant toutes les matrices apparaissant dans $\{m_n\}$.*

DÉMONSTRATION. D'après les Df 2, 3.

THÉORÈME 3. *Si A est faiblement parfait concernant une matrice m_i apparais-*

sant dans une série $\{m_n\}$, *A est aussi faiblement parfait concernant* m_{n+1}.

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème 1.

Df 4 $$A \sim B \equiv A \subset Fl(B).\ B \subset Fl(A).$$

THÉORÈME 4. *Si* A *et* B *sont fortement parfaits concernant une série* $\{m_n\}$, *on a* $A \sim B$.

DÉMONSTRATION. D'après la Df 3 et le Théorème 1.

D'après la définition d'une matrice normale [2], il est évident que toutes les matrices sérielles dans lesquelles est contenue la matrice du système d'axiomes de Hilbert sont normales. L'adéquatité d'une matrice m_t à A signifie $Fl(A) \subset M_t$ et $M_t \subset Fl(A)$.

THÉORÈME 5. *Si une matrice normale* m_t *est adéquate à* A *et à* B, *on a* $A \sim B$.

RÉFÉRENCES

[1] HILBERT ET ACKERMANN, Grundzüge der theoretischen Logik, (1949), 23.

[2] J. LUKASIEWICZ ET A. TARSKI, Untersuchungen über den Aussagenkalkül. Comptes Rendus de séances de la Soc. des Sci. et des Lettr. de Varsovie, 23(1930), 30-50.

[3] A HEYTING, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss., phys.-math. kl. (1930), 42-65.

[4] A. HEYTING, ibid, p. 56.

[5] A. HEYTING, ibid, p. 54.

L'UNIVERSITÉ DE TÔHOKU, SENDAI.