SUR LE DEGRÉ DE LA PERFECTION

YOSIHISA IZUMI

(Received December 14, 1954)

Le but de cette note est de montrer un exemple contraire à deux théorèmes de M. A. Rose concernant le degré de la perfection.

M. A. Tarski [1] a défini le degré de la perfection d'un ensemble A des propositions et il l'a représenté par $\gamma(A)$.

Désignons par S un ensemble qui contient toutes les variables propositionnelles $x, y, z, \cdots$, et qui est fermé concernant les opérations $\vee$, $\bullet$, $-$, $\rightarrow$, $\sim$. Alors, on a $\gamma(S) = 1$. Si nous prenons comme un sous-ensemble de S l'ensemble H qui se décide par le système d'axiomes du calcul propositionnel de Hilbert, on a $\gamma(H) = 2$.

M. A. Rose a récemment démontré le Théorème suivant :

Théorème RII [2]. On a $\gamma(R) = 3$ pour un sous-ensemble R de S qui satisfait les conditions suivantes ;

(1) R est parfait dans un sens faible du mot,

(2*) $\sim$, $\eqsim$ sont seulement les symboles primitifs, dont les matrices sont comme suit :

$x \sim y$		y: 0	y: 1
x	0	0	1
	1	1	0

$x \eqsim y$		y: 0	y: 1
x	0	1	0
	1	0	1

(3) On a la règle de substitution,

(4*) Au lieu de la règle de modus ponens, on déduire $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$.

Dans la démonstration du Théorème RII, M. A. Rose a utilisé les deux théorèmes suivants, c.-à-d. le

Théorème RI [3]. Si un sous-ensemble E de S satisfait les conditions suivantes

(1) E est parfait dans un sens faible du mot,

(2) L'implication peut être définie par les symboles primitifs,

(3) On a la règle de substitution,

(4) On a la règle de modus ponens,

E est parfait dans un sens fort du mot,

et le

Théorème de Rasiowa [2]. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que une formule f soit identiquement vraie dans l'ensemble R satisfaisant les conditions (1), (2*), (3), (4*) du Théorème RII sont que :

(1) le symbole $\eqsim$ n'apparaît aucune fois en f ou n'y apparaît qu'un nombre pair de fois.

(2) chaque variable propositionnelle apparaît toujours en f un nombre pair de fois.

Désignons par $Fl(A)$ l'ensemble qui contient A et qui est fermé concernant les règles de substitution et de modus ponens.

Si nous comparaisons $Fl(R)$ avec $Fl(H)$, nous avons le

LEMME 1. $Fl(R) \subsetneqq Fl(H)$.

DÉMONSTRATION. Le symbole $\eqsim$ peut être défini par $\sim$ et par $-$, c.-à-d. nous avons $x \eqsim y \equiv \overline{x \sim y}$. Et, les raisonnements satisfaisant (4*) satisfont la règle de modus ponens de H. Par conséquent, on a $Fl(R) \subset Fl(H)$. D'autre part, puisque le symbole $\rightarrow$ ne peut pas être défini par les symboles $\sim$, $-$, les formules identiquement vraies contenant les syboles $\rightarrow$, $\bullet$, $\vee$ ne sont pas contenues dans $Fl(R)$. Par conséquent, on a $Fl(R) \neq Fl(H)$.

LEMME 2. $Fl(L) \subsetneqq Fl(H)$.

DÉMONSTRATION. Le système d'axiomes du calcul des propositions trivalentes de Lukasiewicz et de Wajsberg [4] a deux symboles primitifs $\rightarrow$, $-$, dont les matrices sont comme suit :

$x \rightarrow y$		y: 0	1	2
	0	0	1	2
x	1	0	0	0
	2	0	2	0

x	$\bar{x}$
0	1
1	0
2	2

Les symboles $\vee$, $\bullet$ sont définis comme suit:

$$x \vee y \equiv (x \rightarrow y) \rightarrow y,$$

$$x \bullet y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}.$$

Le symbole $\sim$ ne se trouve pas dans ce système d'axiomes de Lukasiewicz et de Wajsberg, mais nous pouvons l'ajouter à ce système par la matrice suivante

$x \sim y$		y: 0	1	2
	0	0	1	2
x	1	1	0	2
	2	2	2	0

Nous désignons par L un sous-ensemble de S qui se décide par le système d'axiomes de Lukasiewicz et de Wajsberg et qui contient le symbole $\sim$.

D'après les matrices des symboles, on a évidemment $Fl(L) \subset Fl(H)$. D'autre part, puisque la formule $x \rightarrow x$ n'est pas contenue dans $Fl(L)$, on a $Fl(L) \neq Fl(H)$.

Jusqu'ici il y a eu deux méthodes pour faire les sous-ensembles de $Fl(H)$, c.-à-d. (1) la première méthode qui a fait $Fl(R)$ de $Fl(H)$ par la restriction du nombre des symboles apparaissant dans H, (2) la deuxième méthode qui a fait $Fl(L)$ de $Fl(H)$ par la restriction des matrices des symboles apparaissant dans H.

Maintenant nous essayerons de restreindre le nombre des symboles de L d'une part, et de restreindre les matrices de R d'autre part.

LEMME 3. $Fl(L') \subsetneq Fl(L)$.

DÉMONSTRATION. Désignons par L' un sous-ensemble de L dont les symboles ne sont que $\sim$, $-$, pourvu que le symbole $-$ ne soit employé que sur les formules ayant la forme $x \sim y$. Puisque l'on ne peut pas définir les symboles $\vee, \bullet, \rightarrow$ par les symboles $-$, $\sim$, on a $Fl(L') \subsetneq Fl(L)$.

LEMME 4. $Fl(L') = Fl(R')$.

DÉMONSTRATION. Désignons par R' un sous-ensemble de R qui a les mêmes matrices trivalentes concernant les symboles $\sim$, $-$ que L. Alors, on a évidemment $Fl(L') = Fl(R')$.

LEMME 5. $Fl(R') = Fl(R)$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer le Lemme 5, nous démontrerons par induction le Théorème de Rasiowa.

Nous désignons par v une formule identiquement vraie (c.-à-d. une formule qui prend identiquement la valeur 0), et par s une formule identiquement fausse (c.-à-d. une formule qui prend identiquement la valeur 1). Par les matrices à deux valeurs des symboles $\sim$, $\approx$ apparaissant dans le Théorème RII, on a les conditions nécessaires et suffisantes pour les formules identiquement vraies comme suit:

(1a) $x \sim x$,
(2a) $s \sim s$,
(3a) $v \approx s$,
(4a) $v \sim v$,

et, en même temps, on a les conditions nécessaires et suffisantes pour les formules identiquement fausses comme suit:

(1b) $x \approx x$,
(2b) $v \approx v$,
(3b) $v \sim s$,
(4b) $s \approx s$.

D'autre part, on a, comme les matrices de R',

$x \sim y$		y = 0	1	2
x	0	0	1	2
	1	1	0	2
	2	2	2	0

$x \approx y$		y = 0	1	2
x	0	1	0	2
	1	0	1	2
	2	2	2	1

et, toutes les huit conditions citées plus haut (1a), (2a), (3a), (4a), (1b), (2b), (3b), (4b) sont aussi valables concernant ces matrices de R'. Si l'on désigne par f_2 une formule qui prend identiquement la valeur 2, la formule $f_2 \sim f_2$

prend la valeur 0, la formule $f_2 \simeq f_2$ prend la valeur 1. Mais, il est évident que l'on ne peut pas construire f_2 concernant ces matrices. Par conséquent, ces matrices n'augmentent pas les conditions nécessaires et suffisantes pour les fomules identiquement vraies et pour les formules identiquement fausses de R. Alors le Théorème de Rasiowa qui est valable dans R est aussi valable dans R'; c.-à-d. on a $Fl(R) = Fl(R')$.

Par les Lemmes 1, 2, 3, 4, 5, on a $Fl(R) \subsetneqq Fl(L)$.
Par conséquent, on a $\gamma(R) \geq 4$. L est un exemple contraire au Théorème R II.

L sera aussi un exemple contraire au Théorème RI, pourvu que les symboles primitifs de L soient $\vee$, $-$, $\sim$. Dans ce cas on peut définir le symbole $\rightarrow$ comme suit:

$$x \rightarrow y \equiv [\bar{x} \vee (x \sim y)] \vee y.$$

Références

[1] A. Tarski, Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik, Comptes Rendus de Séances de la Soc. des Sc. et des Lettr. de Varsovie, 23 (1930), 22–29.

[2] A. Rose, The degree of completeness of a partial system of the 2-valued Propositional Calculus, Math. Zeitsch., 54 (1951), 181–183.

[3] A. Rose, Strong completeness of fragments of the propositional calculus, Journal of Symbolic Logic, 16 (1951), 204.

[4] J. Lukasiewicz, Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls, Comptes Rendus de Séances de la Soc. des Sc. et des Lettr. de Varsovie, 23 (1930), 51–77.

[5] J. Lukasiewicz et A. Tarski, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, ibid., 23 (1930), 30–50.

[6] M. Wajsberg, Ein Axiomensystem des dreiwertigen Aussagenkalküls, ibid., 24 (1931), 146–148.

L'Université de Tôhoku, Sendai.