ÜBER EINE ERWEITERTE ASYMPTOTISCHE DARSTELLUNG DER LÖSUNG EINES SYSTEMS VON LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, WELCHE VON ZWEI PARAMETERN ABHÄNGEN

KEN-ICHI TAKAHASHI

(Received April 5, 1958)

1. Einleitung. In meiner früheren Abhandlung[1] habe ich die asymptotische Entwickelung der Lösung eines Systems von linearen homogenen Differentialgleichungen betrachtet, welche von zwei Parametern λ und μ abhängen:

$$\frac{dy_j}{dx} = \lambda^2\mu \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(x, \lambda, \mu) y_k, \quad (j = 1, 2),$$

deren charakteristische Gleichung eine zweifache Wurzel besitzt. Nämlich ich habe versucht eine Abhandlung des Herrn Prof. M. Hukuhara[2] zu erweitern. Dabei betrachtete ich es unter einer strengen Bedingung für Koeffizienten $a_{jk}(x, \lambda, \mu)$.

In dieser Abhandlung möchte ich den Begriff der asymptotischen Entwickelung erweitern, und eine asymptotische Entwickelung der Lösung eines Systems von linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\frac{dy_j}{dx} = \lambda^m\mu^{m'} \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(x, \lambda, \mu) y_k, \quad (m \text{ und } m' \text{ sind natürliche Zahlen, } j = 1, 2)$$

betrachten, welche von zwei Parametern abhängen.

2. Eine Erweiterung der asymptotischen Entwickelung. In diesem Paragraphen wollen wir den Begriff der bisherigen asymptotischen Entwickelung erweitern. Von jetzt an setzt man für n, n'; n_0, n_0'; n_1, n_1'; n_2, n_2' voraus, dass sie sämtlich natürliche Zahlen sind, dass n und n' u. s. w. voneinander prim sind, und dass die folgende Ungleichung gilt:

$$n'/n < n_2'/n_2 < n_1'/n_1 < n_0'/n_0.$$

Es seien L und L_0 zwei Halbstrahlen, welche bzw. den Koordinatenanfangspunkt und Punkte $P(n_0, -n_0'), Q(-n, n')$ hindurchgehen. Es sei nämlich:

$$L: y = -\frac{n_0'}{n_0} x, \quad (x \geqq 0),$$

---

1) Vgl. [2].
2) Vgl. [1].

$$(2.1) \qquad L_0 : y = -\frac{n'}{n}x, \quad (x \leqq 0).$$

Man ordnet einem Punkte $A(x,y)$ die Zahl $\lambda^y\mu^x$ zu, und bestimmt die Zahlen δ_1, δ_2; $\overline{\delta_1}$, $\overline{\delta_2}$; $\overline{\overline{\delta_1}}$, $\overline{\overline{\delta_2}}$ von der Art, dass

$$\delta_1 = n_0'/N_0,\ \ \delta_2 = n_0/N_0;\ \overline{\delta_1} = n_1'/N_1,\ \ \overline{\delta_2} = n_1/N_1;\ \overline{\overline{\delta_1}} = n_2'/N_2,\ \ \overline{\overline{\delta_2}} = n_2/N_2$$

ist, wobei $N_i = nn_i' - n_i n', (i = 0,1,2)$ ist. Offenbar sind δ_1 und δ_2 u.s.w. positiv. Es sei L_r ein Halbstrahl, welcher durch einen Punkt P_r $(r\delta_2, -r\delta_1)$ hindurchgeht und zu L_0 parallel ist, wo r eine natürliche Zahl ist. Es sei also

$$(2.2) \qquad L_r : y + r\delta_1 = -\frac{n'}{n}(x - r\delta_2), \quad (x \leqq r\delta_2).$$

Man kann die folgenden Tatsachen leicht beweisen:

(i) *Auf L_r, $(r = 0, 1, \ldots\ldots\ldots)$ gibt es unendlich viele Gitterpunkte. D.h. es gibt unendlich viele ganze Wurzeln, welche* (2.1) *und* (2.2) *erfüllen.* Denn man kann nach Betrachtung von (2.2) und $n\delta_1 - n'\delta_2 = 1$ die Beziehung $n'x + ny + r = 0$, $(r = 0, 1, \ldots\ldots\ldots)$ herleiten.

(ii) *Zwischen L_r und L_{r+1}, $(r = 0, 1, \ldots\ldots\ldots)$ gibt es keinen Gitterpunkt. D.h. für eine ganze Zahl x gibt es keine ganze Zahl y, welche die folgende Ungleichung erfüllt*:

$$(2.3) \qquad -\frac{n'}{n}(x - (r+1)\delta_2) - (r+1)\delta_1 < y < -\frac{n'}{n}(x - r\delta_2) - r\delta_1.$$

Denn man kann nach $n\delta_1 - n'\delta_2 = 1$ ohne Schwierigkeit die Ungleichung $-(n'x + r) - 1 < ny < -(n'x + r)$ zeigen.

Definition 1. Wir definieren das Zeichen K_r folgendermassen. Wenn P_r $(r\delta_2, -r\delta_1)$ ein Gitterpunkt ist, so bestimmt man x_r und y_r durch $x_r = r\delta_2$, $y_r = -r\delta_1$. Sonst nimmt man x_r und y_r als Koordinaten des Gitterpunktes P_r^* an, der zum Punkte P_r $(r\delta_2, -r\delta_1)$ nähest liegt und auf der Geraden L_r liegt. Dann definiert man $K_r(n, n'; n_0, n_0'; \lambda; \mu)$ durch $K_r(n, n'; n_0, n_0'; \lambda, \mu) = \lambda^{y_r}\mu^{x_r}$. Von hier an schreibt man der Einfachheit halber an Stelle von $K_r(n, n'; n_0, n_0'; \lambda, \mu)$ kurz K_r. Da nach (2.1) und (2.2) $y = -(n'x + r)/n$ ist, so kann man andererseits x_r und y_r folgendermassen bestimmen:

$$\begin{cases} x_r = \text{Max}\ (\textit{Ganze Zahlen } x \textit{ dafür, dass } x \leqq \delta_2 r \textit{ gilt, und } (n'x + r)/n \textit{ eine} \\ \qquad \textit{ganze Zahl wird.}), \\ y_r = -(n'x_r + r)/n. \end{cases}$$

Definition 2. Ebenso wie bei der Definition 1 definieren wir $K_{r,1}$ und $K_{r,2}$ folgendermassen. Man erhält $K_r(n, n', n_1, n_1'; \lambda, \mu)$ und $K_r(n, n'; n_2, n_2'; \lambda, \mu)$, wenn man in der Definition 1 n_0, n_0', δ_1 und δ_2 bzw. durch n_1, n_1', $\overline{\delta_1}$, $\overline{\delta_2}$ und n_2, n_2', $\overline{\overline{\delta_1}}$, $\overline{\overline{\delta_2}}$ ersetzt. Von jetzt an schreibt man der Einfachheit halber an

Stelle von $K_r(n, n'; n_1, n_1'; \lambda, \mu)$ und $K_r(n, n'; n_2, n_2'; \lambda, \mu)$ bzw. $K_{r,1}$ und $K_{r,2}$.

Ohne Schwierigkeit kann man die folgenden Tatsachen beweisen.

(iii) *Ist $P(x,y)$ ein auf L_r liegender Gitterpunkt, so gilt $\lambda^y \mu^x = (\lambda^{n'}\mu^{-n})^k K_r$, wo k entweder eine natürliche Zahl oder* 0 *ist*. Denn es gelten nach Definition von x_r und y_r die Beziehungen:

$$x = x_r - nk, \quad y = y_r + n'k.$$

(iv) *Es gilt $K_r K_s = (\lambda^{n'}\mu^{-n})^k K_{r+s}$, wo k entweder eine natürliche Zahl oder* 0 *ist. Wenn mindestens eine von den beiden natürlichen Zahlen r und s ein Multiplum von N_0 ist, dann wird $k = 0$.*

Beweis. Es sei $K_r = \lambda^{y_r}\mu^{x_r}$, und $K_s = \lambda^{y_s}\mu^{x_s}$. Da x_r, x_s, $(n'x_r + r)/n$ und $(n'x_s + s)/n$ sämtlich ganze Zahlen sind, und die Ungleichungen $x_r \leqq \delta_2 r$ und $x_s \leqq \delta_2 s$ gelten, so sind $x_r + x_s$ und $(n'(x_r + x_s) + r + s)/n$ auch ganze Zahlen und gilt die Ungleichung $x_r + x_s \leqq \delta(r + s)$. Daher wird der Punkt $P(x_r + x_s, y_r + y_s)$ ein auf L_{r+s} liegender Gitterpunkt. Man kann also nach (iii) das gegebene Resultat erhalten. Ist r ein Multiplum von N_0, so wird $\delta_2 r + x_s$ eine ganze Zahl, und gilt die Ungleichung $\delta_2 r + x_s \leqq \delta_2(r + s)$. Da $(n'(\delta_2 r + x_s) + (r + s))/n$ nach Voraussetzung eine ganze Zahl, und $(n'(x_s + k_0) + s)/n$ keine ganze Zahl ist, so erhält man

$$\delta_2 r + s = \mathrm{Max}(\text{Ganze Zahlen } x, \text{ wofür } x \leqq \delta_2(r + s) \text{ gilt, und } (n'x + r + s)/n \text{ ganz wird.}),$$

wenn es eine natürliche Zahl gebe, welche die Ungleichung $x_r + k_0 \leqq \delta_2 s$ erfüllt. Es muss also $x_{r+s} = \delta_2 r + x_s$ und $y_{r+s} = \delta_1 r - y_s$ sein. Wenn s ein Multiplum von N_0 ist, so kann man ebenso wie beim obigen Falle das gegebene Resultat beweisen.

(v) *Es gelten $K_r = (\lambda^{n'}\mu^{-n})^k K_{r,1}$ und $K_r = (\lambda^{n'}\mu^{-n})^{k'} K_{r,2}$, wo k und k' entweder natürliche Zahlen oder* 0 *sind.*

Beweis. Setzt man hier

$x_{r,1} = \mathrm{Max}(\text{Ganze Zahlen } x, \text{ wofür } x \leqq \overline{\delta_2} r \text{ gilt, und } (n'x + r)/n \text{ eine ganze Zahl wird.})$,

so hat man nach $\delta_2 < \overline{\delta_2}$ die Ungleichung $x_r \leqq x_{r,1}$. Man erhält daher sogleich das erste gegebene Resultat, wenn man in (iii) K_r durch $K_{r,1}$ ersetzt. Ebenso kann man die zweite Beziehung beweisen, w. z. b. w.

Definition 3. Wir wollen die bisherige asymptotische Entwickelung folgendermassen erweitern.

(A) Es gilt die folgende Beziehung zwischen den Ordnungen von λ und μ:

$$\varepsilon|\lambda|^{\sigma_1} \leqq |\mu| \leqq K|\lambda|^{\sigma_2} \text{ für } |\arg \lambda, \mu| < \theta, |\lambda|, |\mu| > R, \tag{2.4}$$

wo ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist, K und R hinreichend grosse positive Zahlen sind, und σ_1 und σ_2 durch $\sigma_1 = n'/n$, $\sigma_2 < n_0'/n_0$, $(\sigma_1 < \sigma_2)$ gegeben werden. In dieser Abhandlung möchten wir nur den Fall betrachten, dass die Ungleichung (2.4) immer besteht. Von hier an seien K und R

hinreichend grosse Zahlen.

(B) Es sei eine von x, λ und μ abhängige Funktion $f(x,\lambda,\mu)$ für $|\lambda|$, $|\mu| > R$, $|\arg \lambda, \mu| < \theta$ stetig, und $f_r(x,\lambda,\mu)$ dort stetig und beschränkt. Die Funktionen $f(x,\lambda,\mu)$ und $f_r(x,\lambda,\mu)$ lassen sich folgendermassen formell entwickeln:

$$(2.5) \qquad f(x,\lambda,\mu) \sim \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x,\lambda,\mu),$$
$$f_r(x,\lambda,\mu) \sim \sum_{s=0}^{\infty} f_{rs}(x)\,(\lambda^{n'}\mu^{-n})^s,$$

wo $f_{rs}(x)$ für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ genügend oft differentierbar ist. Von jetzt an schreibt man der Einfachheit halber an Stelle von der Bereich $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $|\lambda|, |\mu| > R$, $|\arg \lambda, \mu| < \theta$ und $|\lambda|, |\mu| > R$, $|\arg \lambda, \mu \;| < \theta$ bzw. Δ und D.

(C) Es gelte die folgende Ungleichung für alle natürlichen Zahlen N:

$$|f(x,\lambda,\mu) - \sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x,\lambda,\mu)| \leqq K(|\lambda|^{-\delta_1}|\mu|^{\delta_2})^N \quad \text{für } \Delta.$$

In diesem Falle sagen wir dass $f(x,\lambda,\mu)$ sich in Bezug auf (2.4) für Δ, λ, $\mu \to \infty$ in der Gestalt rechter Seite von (2.5) asymptotisch entwickeln lässt. Der Einfachheit halber schreibt man an Stelle von $|\lambda|^{-\delta_1}|\mu|^{\delta_2}$, $|\lambda|^{-\bar{\delta}_1}|\mu|^{\bar{\delta}_2}$ und $|\lambda|^{-\bar{\bar{\delta}}_1}|\mu|^{\bar{\bar{\delta}}_2}$ bzw. δ, $\bar{\delta}$ und $\bar{\bar{\delta}}$. Wenn $g(x,\lambda,\mu)$ und $h(x,\lambda,\mu)$ für Δ stetig sind, so nennen wir $g(x,\lambda,\mu) + h(x,\lambda,\mu) \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x,\lambda,\mu)$ „eine asymptotische Entwickelung von $g(x,\lambda,\mu) + h(x,\lambda,\mu) f(x,\lambda,\mu)$ für Δ, $\lambda, \mu \to \infty$." Von jetzt an lässt man „in Bezug auf (2.4)" fallen.

Man kann die folgenden Tatsachen leicht beweisen.

(vi) *Es gilt die folgende Ungleichung*:

$$\delta^r \leqq K\delta^s \quad \textit{für } D,$$

wo r und s ($r \geqq s$) entweder natürliche Zahlen oder 0 *sind.* Denn da (2.4) die Ungleichung $|\mu|^{n_0}\;|\lambda|^{-\sigma_2 n_0} \leqq K$ für D liefert, und nach $\sigma_2 n_0 < n_0'$ die Ungleichung $|\mu|^{n_0}|\lambda|^{-n'_0} \leqq |\mu|^{n_0}|\lambda|^{-\sigma_0 n_0}$ für D gilt, so erhält man ohne weiteres durch Betrachtung von $(r-s)/N_0 \geqq 0$ und $\delta^{r-s} = (|\lambda|^{-n'_0}|\mu|^{n_0})^{(r-s)/N_0}$ das gegebene Resultat.

(vii) *Es ist* $|K_r| \leqq K\delta^r$ *für D.* Denn da es gilt:

$$\begin{aligned} |K_r|\delta^{-r} &= |\lambda|^{(-n'x_r - r + n\delta_1 r)/n}|\mu|^{x_r - \delta_2 r} \\ &= |\lambda|^{n'(\delta_2 r - x_r)/n}|\mu|^{-(\delta_2 r - x_r)} \\ &= (|\lambda|^{n'}|\mu|^{-n})^{(\delta_2 r - x_r)/n} \quad \text{für } D, \end{aligned}$$

und es nach (2.4) die Ungleichung $|\lambda|^{n'}|\mu|^{-n} \leqq K$ für D besteht, so hat man nach Betrachtung von $\delta_2 r - x_r \geqq 0$ das gegebene Resultat.

(viii) *Es seien $f(x,\lambda,\mu)$ und $g(x,\lambda,\mu)$ für Δ stetig, und $f_r(x,\lambda,\mu)$ und $_r(x, \lambda,\mu)$ auch dortg stetig und beschränkt. Die Funktionen $f(x,\lambda,\mu)$ und*

$g(x, \lambda, \mu)$ *lassen sich ferner folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x, \lambda, \mu) \qquad \textit{für } \Delta, \lambda, \mu \to \infty,$$

$$g(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r=0}^{\infty} K_r g_r(x, \lambda, \mu) \qquad \textit{für } \Delta, \lambda, \mu \to \infty.$$

(viii)$_1$ *Die Funktion* $f(x, \lambda, \mu) + g(x, \lambda, \mu)$ *lässt sich folgenderweise asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) + g(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r=0}^{\infty} K_r(f_r(x, \lambda, \mu) + g_r(x, \lambda, \mu)) \textit{ für } \Delta, \ \lambda, \mu \to \infty.$$

Denn die Funktion $f(x, \lambda, \mu) + g(x, \lambda, \mu)$ ist nach Voraussetzung für Δ stetig, $f_r(x, \lambda, \mu) + g_r(x, \lambda, \mu)$ auch dort stetig und beschränkt, und es gilt für alle natürlichen Zahlen N die folgende Abschätzung:

$$|f(x, \lambda, \mu) + g(x, \lambda, \mu) - \sum_{r=0}^{N-1} K_r(f_r(x, \lambda, \mu) + g_r(x, \lambda, \mu))| \leqq K \ \delta^N \text{ für } \Delta,$$

w. z. b. w.

(viii)$_2$ *Die Funktion* $f(x, \lambda, \mu) g(x, \lambda, \mu)$ *lässt sich folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) g(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r=0}^{\infty} K_r h_r(x, \lambda, \mu) \textit{ für } \Delta, \lambda, \mu \to \infty.$$

Dabei hat man

$$\sum_{+j=r} K_i f_i(x, \lambda, \mu) K_j g_j(x, \lambda, \mu) = K_r \sum_{i+j=r} f_i(x, \lambda, \mu) g_j(x, \lambda, \mu) \, (\lambda^{n'} \mu^{-n})^{\alpha_{ij}}$$

$(\alpha_{ij} (\geqq 0)$ *ist eine ganze Zahl.*),

$$h_r(x, \lambda, \mu) = \sum_{i+j=r} f_i(x, \lambda, \mu) \, g_j(x, \lambda, \mu) \, (\lambda^{n'} \mu^{-n})^{\alpha_{ij}}$$

gesetzt.

Beweis. Da es gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x, \lambda, \mu) \sum_{r=0}^{N-1} K_r g_r(x, \lambda, \mu) \\ = & \sum_{r=0}^{N-1} \Big(\sum_{i+j=r} K_i f_i(x, \lambda, \mu) K_j g_j(x, \lambda, \mu) \Big) \\ & + \sum_{r=N}^{2(N-1)} \Big(\sum_{i+j=r} K_i f_i(x, \lambda, \mu) K_j g_j(x, \lambda, \mu) \Big) \\ = & \sum_{r=0}^{N-1} K_r h_r(x, \lambda, \mu) + \sum_{r=N}^{2(N-1)} K_r h_r^*(x, \lambda, \mu), \end{aligned}$$

wo

$$h_r^*(x, \lambda, \mu) = \sum_{i+j=r} (\lambda^{n'}\mu^{-n})^{\alpha_{ij}} f_i(x, \lambda, \mu) g_j(x, \lambda, \mu),$$

$$(f_i(x, \lambda, \mu), g_i(x, \lambda, \mu) = 0 \text{ für } i > N+1)$$

ist, so hat man sofort

$$\left| \sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x, \lambda, \mu) \sum_{r=0}^{N-1} K_r g_r(x, \lambda, \mu) - \sum_{r=0}^{N-1} K_r h_r(x, \lambda, \mu) \right| \leqq K\delta^N \quad \text{für } \Delta. \tag{2.6}$$

Andererseits gilt

$$|f(x, \lambda, \mu) g(x, \lambda, \mu) - \sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x, \lambda, \mu) \sum_{r=0}^{N-1} K_r g_r(x, \lambda, \mu)| \leqq K\delta^N \quad \text{für } \Delta.$$

Aus (2.6) folgt demnach sogleich, dass es für alle natürlichen Zahlen N die folgende Ungleichung gilt:

$$|f(x, \lambda, \mu) g(x, \lambda, \mu) - \sum_{r=0}^{N-1} K_r h_r(x, \lambda, \mu)| \leqq K\delta^N \quad \text{für } \Delta, \quad \text{w. z. b. w.}$$

(viii)$_3$ *Wenn* $|f_0(x, \lambda, \mu)| \geqq c > 0$ *ist, und* $1 \Big/ \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x, \lambda, \mu)$ *sich folgendermassen formell entwickeln lasst:*

$$1 \Big/ \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r=0}^{\infty} K_r h_r(x, \lambda, \mu),$$

so lässt sich $1/f(x, \lambda, \mu)$ *folgenderweise asymptotisch entwickeln:*

$$1/f(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r=0}^{\infty} K_r h_r(x, \lambda, \mu) \text{ für } \Delta, \lambda, \mu \to \infty.$$

Beweis. Es ist

$$1 \Big/ \sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x, \lambda, \mu)$$

$$= \frac{1}{f_0(x, \lambda, \mu)} \left(\sum_{s=0}^{N-1} \left(\sum_{r=1}^{N-1} K_r g_r(x, \lambda, \mu) \right) + \frac{\left(\sum_{r=1}^{N-1} K_r g_r(x, \lambda, \mu) \right)^N}{1 - \sum_{r=1}^{N-1} K_r g_r(x, \lambda, \mu)} \right),$$

wo $g_r(x, \lambda, \mu) = -f_r(x, \lambda, \mu)/f_0(x, \lambda, \mu)$ ist. Setzt man hier

$$1 \Big/ \sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x, \lambda, \mu) = \sum_{r=0}^{N-1} K_r h_r(x, \lambda, \mu) + \sum_{r=N}^{2(N-1)} K_r h_r^*(x, \lambda, \mu) \tag{2.7}$$

$$+\frac{\left(\sum_{r=1}^{N-1} K_r g_r(x,\lambda,\mu)\right)^N}{f_0(x,\lambda,\mu)\left(1-\sum_{r=1}^{N-1} K_r g_r(x,\lambda,\mu)\right)},$$

so gilt es nach der Beschränktheit und der Stetigkeit von $h_r^*(x,\lambda,\mu)$ die folgende Abschätzung:

$$\left|\sum_{r=N}^{2(N-1)} K_r h_r^*(x,\lambda,\mu)+\frac{\left(\sum_{r=1}^{N-1} K_r g_r(x,\lambda,\mu)\right)}{f_0(x,\lambda,\mu)\left(1-\sum_{r=1}^{N-1} K_r g_r(x,\lambda,\mu)\right)}\right| \leqq K\delta^N \text{ für } \Delta. \tag{2.8}$$

Falls $N=1$ ist, so sind die zweite und dritte Glieder der rechten Seite von (2.7) gleich 0, und falls $N=2$ ist, so ist das zweite Glied gleich 0. Aus (2.7) und (2.8) folgt

$$\left|\frac{1}{\sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x,\lambda,\mu)}-\sum_{r=0}^{N-1} K_r h_r(x,\lambda,\mu)\right| \leqq K\delta^N \text{ für } \Delta. \tag{2.9}$$

Da es andererseits gilt:

$$\left|\frac{1}{f(x,\lambda,\mu)}-\frac{1}{\sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x,\lambda,\mu)}\right| \leqq K\delta^N \text{ für } \Delta,$$

so ergibt sich nach (2.9) die folgende Abschätung:

$$\left|\frac{1}{f(x,\lambda,\mu)}-\sum_{r=0}^{N-1} K_r h_r(x,\lambda,\mu)\right| \leqq K\delta^N \text{ für } \Delta \text{ , w. z. b. w.}$$

(ix) *Es sei $f(x,\lambda,\mu)$ für Δ stetig, und es lasse $f(x,\lambda,\mu)$ im bisherigen Sinne folgendermassen asymptotisch entwickeln:*

$$f(x,\lambda,\mu)\sim\sum_{r,s=0}^{\infty} f_{rs}(x)\lambda^{-r}\mu^{-s} \text{ für } \Delta,\quad \lambda,\ \mu\to\infty,$$

wo $f_{rs}(x)$ für $\alpha\leqq x\leqq\beta$ genügend oft differentierbar ist.

(ix)$_1$ *Setzt man*

$$f_r(x,\lambda,\mu)=\sum_s f_{-(y_r+n's),\,-(x_r-ns)}(x)\,(\lambda^{n'}\mu^{-n})^s,\quad (y_r+n's,\, x_r-ns\leqq 0),$$

so lässt sich $f(x,\lambda,\mu)$ folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$f(x,\lambda,\mu)\sim\sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x,\lambda,\mu) \text{ für } \Delta,\quad \lambda,\ \mu\to\infty. \tag{2.10}$$

Beweis. Es ist klar, dass $f(x, \lambda, \mu)$ sich in der rechten Seite von (2.10) formell entwickeln lässt. Nimmt man eine natürliche Zahl K' für eine willkürliche natürliche Zahl N von der Art an, dass

$$K'-1=\mathrm{Min}\left(\text{Ganze Zahlen } x, \text{ wofür } x \geqq \max\left(\frac{N-1}{n}, \frac{N-1}{n'}\right) \text{ ist.}\right)$$

ist, so hat man sofort

$$N/n, N/n' \leqq K'. \tag{2.11}$$

Da nach Voraussetzung

$$\left|f(x, \lambda, \mu)-\sum_{r+s\leqq K'-1} f_{rs}(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}\right| \leqq K(|\lambda|^{-K'}+|\mu|^{-K'}) \text{ für } \Delta \tag{2.12}$$

gilt, so folgt aus (2.11) sogleich

$$\begin{cases} |\mu|^{-K'} \leqq K|\lambda|^{-N/n} & \text{für } D, \\ |\lambda|^{-K'} \leqq K|\lambda|^{-N/n} & \text{für } D. \end{cases} \tag{2.13}$$

Da es nach $n\delta_1-n'\delta_2=1$ die Beziehung $\lambda^{-1/n}=\lambda^{-\delta_1+\sigma\delta_2}$ gilt, und nach (2.4) die Beziehung $|\lambda|^{\sigma_1\delta_2} \leqq K|\mu|^{\delta_2}$ für D, so ergibt sich

$$|\lambda|^{-1/n} \leqq K\delta \qquad \text{für } D. \tag{2.14}$$

Aus (2.12), (2.13) und (2.14) folgt

$$\left|f(x, \lambda, \mu)-\sum_{r+s\leqq K'-1} f_{rs}(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}\right| \leqq K\delta^N \text{ für } \Delta. \tag{2.15}$$

Setzt man andererseits

$$\mathrm{I} \equiv \sum_{r+s\leqq K'-1} f_{rs}(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}-\sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x, \lambda, \mu),$$

so lässt sich das zweite Glied im ersten Glied enthalten. Daher enthält I nur endliche Anzahl von Gliedern $f_{-\eta,-\xi}(x)\lambda^{\xi}\mu^{\eta}$, welche den auf L_r, $(r \geqq N)$ liegenden Gitterpunkten (η, ξ), $(\eta, \xi \geqq 0)$ entsprechen. Da nach (iii) und (vii) die Ungleichung $|\mathrm{I}| \leqq K\delta^N$ für Δ gilt, so folgt aus (2.15)

$$\left|f(x, \lambda, \mu)-\sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x, \lambda, \mu)\right| \leqq K\delta^N \quad \text{für } \Delta, \text{ w.z.b.w.}$$

(ix)$_2$ *Gilt* $f_{-\eta,-\xi}(x)=0$ *für ganze Zahlen* ξ *und* η, *welche mindestens eine der folgenden Ungleichungen erfüllen*:

$$\eta+r_0>-\frac{n'}{n}(\xi+s_0), \quad \eta+r_0>-\frac{n_0'}{n_0}(\xi+s_0),$$

wo r_0 *und* s_0, $(\geqq 0)$ *ganze Zahlen sind, so lässt sich* $f(x, \lambda, \mu)$ *folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) \sim \lambda^{-r_0}\mu^{-s_0}\sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x, \lambda, \mu) \quad \textit{für } \Delta, \quad \lambda, \mu \to \infty, \tag{2.16}$$

wenn man ebenso wie bei (ix)$_1$

$$f_r(x, \lambda\, \mu)=\sum_s f_{-(y_r+n's-r_0), -(x_r-ns-s_0)}(x)\,(\lambda^{n'}\mu^{-n})^s,$$

$$(y_r+n's-r_0,\ x_r-ns-s_0 \leqq 0)$$

setzt.

BEWEIS. Es ist klar, dass $f(x, \lambda, \mu)$ sich in der rechten Seite von (2.16) formell entwickeln lässt. Es sei N eine natürliche Zahl.

(a) Der Fall dass $\delta_2(N-1)-s_0 \geqq 0$ ist. Man bestimme eine natürliche Zahl K' derart, dass

$$K'-1=\mathrm{Min}\ (\text{Ganze Zahlen } x, \text{ wofür, } x \geqq \mathrm{Max}\left(\frac{M+N-1}{n}, \frac{M+N-1}{n}\right) \text{ ist.})$$

ist, wo $M=nr_0+n's_0$ ist. Nach Voraussetzung erhält man

$$\left|f(x,\lambda,\mu)-\sum_{r+s\leqq K'-1} f_{rs}(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}\right| \leqq K(|\lambda|^{-K'}+|\mu|^{-K'}) \text{ für } \Delta. \tag{2.17}$$

Ebenso wie bei $(\mathrm{ix})_1$ und (2.13) erhält man

$$\left|\sum_{r+s\leqq K'-1} f_{rs}(x)\lambda^{-r}\mu^{-s}-\lambda^{-r_0}\mu^{-s_0}\sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x,\lambda,\mu)\right| \leqq K|\lambda|^{-(M+N)/n} \text{ für } \Delta, \tag{2.18}$$

$$|\lambda|^{-K'}+|\mu|^{-K'} \leqq K|\lambda|^{-(M+N)/n} \quad \text{für } D. \tag{2.19}$$

Da es aus $n_1\delta_1-n_1'\delta_2=1$, $M=nr_0+n's_0$ und $\delta_2 N-s_0>0$ folgt, dass

$$\delta_1 N+r_0-\frac{M+N}{n}=\sigma_1(\delta_2 N-s_0)>0$$

ist, so erhält man nach (2.4)

$$|\lambda|^{\delta_1 N+r_0-(M+N)/n} \leqq K|\lambda|^{\delta_2 N-s_0} \quad \text{für } D,$$

d. h.

$$|\lambda|^{-(M+N)/n} \leqq K|\lambda|^{-r_0}|\mu|^{-s_0}\delta^N \text{ fur } D. \tag{2.20}$$

Aus (2.17), (2.18), (2.19) und (2.20) folgt sogleich

$$\left|f(x,\lambda,\mu)-\lambda^{-r_0}\mu^{-s_0}\sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x,\lambda,\mu)\right| \leqq K|\lambda|^{-r_0}|\mu|^{-s_0}\delta^N \text{ für } \Delta, \text{ w. z. b. w.}$$

(b) Der Fall dass $\delta_2(N-1)-s_0<0$ ist. Nimmt man eine hinreichend grosse natürliche Zahl $\bar{N}$ von der Art an, dass $\delta_2(\bar{N}-1)-s_0 \geqq 0$ gilt, so liefert (a) sogleich

$$\left|f(x,\lambda,\mu)-\lambda^{-r_0}\mu^{-s_0}\sum_{r=0}^{\bar{N}-1} K_r f_r(x,\lambda,\mu)\right| \leqq K|\lambda|^{-r_0}|\mu|^{-s_0}\delta^{\bar{N}} \text{ für } \Delta. \tag{2.21}$$

Da $\left|\sum_{r=N}^{\bar{N}-1} K_r f_r(x,\lambda,\mu)\right| \leqq K\delta^N$ für Δ gilt, und nach $\bar{N}>N$ und (vi) die Ungleichung $\delta^{\bar{N}} \leqq K\delta^N$ für D gilt, so ergibt sich nach (2.21) die folgende Ungleichung:

$$\left|f(x,\lambda,\mu)-\lambda^{-r_0}\mu^{-s_0}\sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x,\lambda,\mu)\right| \leqq K|\lambda|^{-r_0}|\mu|^{-s_0}\delta^N \text{ für } \Delta, \text{ w. z. b. w.}$$

$(\mathrm{ix})_3$ *Ist* $r_0=\tau+r_0'$, *wo* τ *positiv, und* r_0' *eine natürliche Zahl oder* 0 *ist, so lässt sich* $\lambda^\tau f(x,\lambda,\mu)$ *folgendermassen asymptotisch entwickeln:*

$$\lambda^{\tau} f(x, \lambda, \mu) \sim \lambda^{-r_0'} \mu^{-s_0} \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x, \lambda, \mu) \quad \text{für } \Delta, \quad \lambda, \mu \to \infty.$$

Denn da es nach $(\text{ix})_2$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\left| f(x, \lambda, \mu) - \lambda^{-(\tau + r_0')} \mu^{-s} \sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x, \lambda, \mu) \right| \leqq K |\lambda|^{-(\tau + r_0')} |\mu|^{-s_0} \delta^N \text{ für } \Delta,$$

so erhält man sofort

$$\left| \lambda^{\tau} f(x, \lambda, \mu) - \lambda^{-r_0'} \mu^{-s_0} \sum_{r=0}^{N-1} K_r f_r(x, \lambda, \mu) \right| \leqq K |\lambda|^{-r_0'} |\mu|^{-s_0} \delta^N \text{ für } \Delta, \quad \text{w. z. b. w.}$$

(x) *Es besteht die folgende Beziehung*:

$$\lambda^m \mu^{m'} K_{N+m_0+r} = (\lambda^{n'} \mu^{-n})^k K^{N+r,1}, \quad (r = 0, 1 \ldots\ldots\ldots),$$

wo k der 0 oder einer positiven ganzen Zahl gleich ist, m und m' natürliche Zahlen sind, und $N + m_0$ eine Multiplum von N_0 ist. Die natürliche Zahlen n_1 und n_1' werden durch

$$(2.22) \qquad n_1'/n_1 = \bar{\delta}_1/\bar{\delta}_2, \quad \bar{\delta}_1 = (\delta_1(N + m_0) - m)/N, \quad \bar{\delta}_2 = \delta_2(N + m_0) + m')/N$$

gegeben. Denn da $\lambda^m \mu^{m'} K_{N+m_0} = K_{N,1}$ gilt, so erhält man nach (iv) und (v)

$$\begin{aligned} \lambda^m \mu^{m'} K_{N+m_0+r} &= \lambda^m \mu^{m'} K^{N+m_0} K_r = K_{N,1} K_r = (\lambda^{n'} \mu^{-n})^{k'} K_{N,1} K_{r,1} \\ &= (\lambda^{n'} \mu^{-n})^k K_{N+r,1}, \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

(xi) *Es sei $f(x, \lambda, \mu)$ für Δ stetig, $f_r(x, \lambda, \mu)$ dort beschränkt, und $f(x, \lambda, \mu)$ lasse sich folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) \sim \lambda^m \mu^{m'} \sum_{r=0}^{\infty} K_r f_r(x, \lambda, \mu) \quad \text{für } \Delta, \quad \lambda, \mu \to \infty,$$

wo m und m' natürliche Zahlen sind. Wir stellen die folgenden Voraussetzungen:

(a) *Es ist $f_r(x, \lambda, \mu) = 0$, $(r = 0, \ldots\ldots\ldots, N + m_0 - 1)$*

(b) *$N + m_0$ ist ein Multiplum von N_0.*

(c) *Man nimmt N hinreichend gross an, so dass die Ungleichung $\sigma_2 < n_1'/n_1$ gilt, deren rechte Seite durch (2.22) gegeben wird. In diesem Falle lässt sich $f(x, \lambda, \mu)$ folgendermassen asymptotisch entwickeln*:

$$f(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r=N}^{\infty} K_{r,1} f_r^*(x, \lambda, \mu) \text{ für } \Delta, \quad \lambda, \mu \to \infty.$$

Dabei ist es

$$K_{r,1} f_r^*(x, \lambda, \mu) = \lambda^m \mu^{m'} K_{r+m_0} f_r(x, \lambda, \mu), \quad (r = N, \ldots\ldots\ldots),$$

und ist $f_r^*(x, \lambda, \mu)$ nach (x) für Δ stetig und beschränkt, und lässt es sich folgendermassen formell entwickeln:

$$f_r^*(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{s=0}^{\infty} f_{rs}^*(x) (\lambda^{n'} \mu^{-n})^s,$$

wo $f_{rs}^*(x)$ für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ genügend oft differentierbar ist.

Beweis. Es gilt nach Voraussetzung für alle natürlichen Zahlen $\bar{N}$ die folgende Ungleichung:

$$\left| f(x, \lambda, \mu) - \lambda^m \mu^{m'} \sum_{r=N+m_0}^{\bar{N}+N+m_0-1} K_r f_r(x, \lambda, \mu) \right|$$
$$\leqq K|\lambda|^m |\mu|^{m'} \delta^{\bar{N}+N+m_0} \quad \text{für } \Delta,$$

d. h.

$$\left| f(x, \lambda, \mu) - \sum_{r=N}^{\bar{N}+N-1} K_{r,1} f_r^*(x, \lambda, \mu) \right| \tag{2.23}$$
$$\leqq K|\lambda|^m |\mu|^{m'} \delta^{\bar{N}+N+m_0} \quad \text{für } \Delta.$$

Andererseits kann man

$$|\lambda|^m |\mu|^{m'} \bar{\delta}^{\bar{N}+N+m_0} \leqq K \bar{\delta}^{\bar{N}+N} \quad \text{für } D \tag{2.24}$$

beweisen. Zu diesem Zwecke genügt es zeigen, dass

$$\mathrm{I} \equiv |\lambda|^{m-\delta_1(\bar{N}+N+m_0)+\bar{\delta}_1(\bar{N}+N)} |\mu|^{m'+\delta_2(\bar{N}+N+m_0)-\bar{\delta}_2(\bar{N}+N)} \leqq K \quad \text{für } D$$

gilt. Da es

$$m' + \delta_2(\bar{N} + N + m_0) - \bar{\delta}_2(\bar{N} + N)$$
$$= m' + \delta_2(\bar{N} + N + m_0) - \frac{\delta_2(N + m_0) + m'}{N} (\bar{N} + N) < 0$$

gilt, so aus (2.4) folgt $\mathrm{I} \leqq K|\lambda|^\alpha$, $(\alpha = \sigma_1(m' + \delta_2(\bar{N} + N + m_0) - \bar{\delta}_2(\bar{N} + N)) + (m - \delta_1(\bar{N} + N + m_0) + \bar{\delta}_1(\bar{N} + N)))$ für D. Da man ohne Schwierigkeit $\alpha = 0$ beweisen kann, so hat man (2.24), und folgt aus (2.23) und (2.24)

$$\left| f(x, \lambda, \mu) - \sum_{r=N}^{\bar{N}+N-1} K_{r,1} f_r^*(x, \lambda, \mu) \right| \leqq K \bar{\delta}^{\bar{N}+N} \quad \text{für } \Delta, \quad \text{w. z. b. w.}$$

3. Reduktion. Wir denken uns ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen, welche von zwei Parametern λ und μ abhängen:

$$\frac{dy_j}{dx} = \lambda^m \mu^{m'} \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(x, \lambda, \mu) y_k, \quad (j = 1, 2), \tag{3.1}$$

wo m und m' natürliche Zahlen sind. Mit Benutzung einer Matrize lässt sich (3.1) folgendermassen umschreiben:

$$dY/dx = \lambda^m \mu^{m'} A(x, \lambda, \mu) Y.$$

Wir stellen die folgenden Voraussetzungen:

(i) $A(x, \lambda, \mu)$ ist für Δ stetig, und es lässt sich folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$A(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r,s=0}^{\infty} \underset{rs}{A}(x) \lambda^{-r} \mu^{-s} \quad \text{für } \Delta, \ \lambda, \ \mu \to \infty,$$

wo $\underset{rs}{A}(x)$ für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ genügend oft differentierbar ist.

(ii) Es ist $a_{21}(x, \lambda, \mu) = 1$, $a_{22}(x, \lambda, \mu) = 0$.

(iii) Die Matrize $\underset{00}{A}(x)$ besitzt eine kanonische Form $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Daraus folgt, dass die charakteristische Gleichung von (3.1) $|\underset{00}{A}(x) - \rho E| = 0$ eine zweifache Wurzel $\rho = 0$ besitzt.

(iv) Es gibt mindestens eine natürliche Zahl r_i derart, dass $\underset{0r_i}{a_{1i}}(x) \neq 0$, $(i = 1, 2)$ ist.

(v) Es gibt mindestens eine natürliche Zahl r_i derart, dass $\underset{r_i0}{a_{1i}}(x) \neq 0$, $(i = 1, 2)$ ist.

Wendet man die Transformation

$$Y = P_1(\lambda)\overline{Y}, \qquad P_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{-\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (\tau > 0)$$

auf (3.1) an, so geht (3.1) in

$$(3.2) \qquad d\overline{Y}/dx = \lambda^m \mu^{m'} \overline{A}(x, \lambda, \mu)\overline{Y}$$

über, wo $\overline{A}(x, \lambda, \mu) = P_1(\lambda)^{-1}A(x, \lambda, \mu)P_1(\lambda)$ ist.

Man kann Gitterpunkte $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots\ldots\ldots, P_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1})$ und $P_l(x_l, y_l)$ von der Art annehmen, dass sie die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) Es gilt $x_i > x_j, y_i < y_j$, $(i < j;\ x_1 = y_l = 0 \quad ; i, j = 1, \ldots\ldots\ldots, l)$,

(b) Es ist $\underset{-y_i, -x_i}{a_{12}}(x) \neq 0$, $(i = 1, \ldots\ldots\ldots, l)$,

(c) Es ist $\underset{-Y, -X}{a_{12}}(x) = 0$ für $Y > \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(X - x_i) + y_i$, $(i = 1, .., l-1)$,

(d) Es ist $\underset{-Y, -X}{a_{12}}(x) = 0$ für $Y = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(X - x_i) + y_i$ *und* $X > x_i$ *oder* $X < x_{i+1}$, $(i = 1, \ldots, l-1)$.

Bei (c) und (d) sind X und Y beide negative ganze Zahlen oder 0. Wir nennen das Polygon $P_1 \ldots P_l$ ein durch die Koeffizienten von $a_{12}(x, \lambda, \mu)$ gebildetes Polygon. Ebenso kann man durch die Koeffizienten von $a_{11}(x, \lambda, \mu)$ ein Polygon $Q_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1) \ldots Q_{l'}(\overline{x}_{l'}, \overline{y}_{l'})$, $(\overline{x}_1 = \overline{y}_{l'} = 0)$ bilden. Man bestimme τ, so dass die drei Punkte $A(0, -\tau)$, $B(x_{l-1}, y_{l-1} + \tau)$ und $C(x_l, \tau)$ auf einer Gerade liegen. Nämlich es sei

$$\tau = \begin{vmatrix} y_{l-1} & x_{l-1} \\ 0 & x_l \end{vmatrix} \Big/ 2 \begin{vmatrix} x_{l-1} & 1 \\ x_l & 1 \end{vmatrix}.$$

Man nehme hier l'' von der Art an, dass es zu einer natürlichen Zahl i gleich ist, für welche $(\tau - \overline{y}_i)/(x_l - \overline{x}_i)$ max. wird und $x_l - \overline{x}_i < 0$ ist. Wenn solche Zahl i sich nicht eindeutig bestimmen lässt, dann nimmt man min. i an. Von hier an wollen wir nur den Fall behandeln, dass τ eine ganze Zahl, $\overline{y}_1 > -\tau$, und $l'' \geqq 3$ ist. Man bestimmt $n, n'; n_0, n_0'$ durch

$$\frac{n'}{n} = \frac{\overline{y}_{i+2} - \overline{y}_{i+1}}{\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_{i+2}}, \quad \frac{n_0'}{n_0} = \frac{\overline{y}_{i+1} - \overline{y}_i}{\overline{x}_i - \overline{x}_{i+1}}, \ (1 \leqq i \leqq l'' - 2).$$

Die Funktion $\overline{A}(x, \lambda, \mu)$ lässt sich nach $(\mathrm{ix})_2$ und $(\mathrm{ix})_3$ folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$\overline{A}(x, \lambda, \mu) \sim \lambda^{-r_0}\mu^{-s_0} \sum_{r=0}^{\infty} K_r \underset{r}{\overline{A}}(x, \lambda, \mu) \text{ für } \Delta, \quad \lambda, \mu \to \infty,$$

wobei man $\bar{y}_{i+1} = -r_0$, $\bar{x}_{i+1} = -s_0$ setzt, und $\underset{r}{\bar{A}}(x, \lambda, \mu)$ ein Polynom von $\nu (= \lambda^{n'}\mu^{-n})$ mit genügend oft differentierbaren Koeffizienten für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ ist. Von jetzt an schreibt man der Einfachheit halber ein Polynom von ν mit genügend oft differentierbaren Koeffizienten kurz $p(\nu)$. Sei es $P(\nu)$ eine Matrize mit den Elementen $p(\nu)$, so lässt sich $\bar{A}(x, \lambda, \mu)$ auch folgendermassen dar stellen:

$$\bar{A}(x, \lambda, \mu) \sim \lambda^{-r_0}\mu^{-s_0} \sum_{r=0}^{\infty} K_r P_r(\nu) \quad \text{für } \Delta, \quad \lambda, \mu \to \infty.$$

Man behandelt den Fall, dass $m - r_0$ und $m' - s_0$ positiv sind.

Wendet man die Transformation

$$\lambda = \lambda' t^n, \quad \mu = \mu' t^{n'}, \quad (\lambda', \mu'\,;\ \text{konstant}) \tag{3.3}$$

auf (3.2) an, so geht (3.2) in

$$dY/dx = t^{m_0}\bar{\bar{A}}(x, \lambda', \mu', t)Y \tag{3.4}$$

über, wo

$$\bar{\bar{A}}(x, \lambda', \mu', t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \underset{-m_0+r}{\bar{\bar{A}}}(x, \lambda', \mu')t^{-r},$$

$$\underset{-m_0+r}{\bar{\bar{A}}}(x, \lambda', \mu) = \theta'\ K'_r P_r(\nu'), \quad (r = 0, 1, \ldots\ldots..),$$

$$m_0 = n(m - r_0) + n'(m' - s_0)$$

ist. Dabei sei es $\theta = \lambda^{m-r_0}\mu^{m'-s_0}$, $\theta' = \lambda'^{m-r_0}\mu'^{m'-s_0}$ und $K'_r = K_r(n, n'\,;\ n_0, n'_0\,;\ \lambda', \mu')$. Ferner setzen wir für $\underset{-m_0 11}{\bar{a}}(x, \lambda', \mu')$, $(= \theta' p(\nu'))$ voraus, dass es für Δ nicht 0 ist. Das Glied des nullten Grades dieses Polynoms $p(\nu')$ ist nicht 0. Insbesondere stellt man diese Polynom durch $\hat{p}(\nu')$ dar. Da die Matrize $\underset{-m_0}{\bar{\bar{A}}}(x, \lambda', \mu')$ kanonisch ist, und die charakteristische Gleichung von (3.4) voneinander verschiedene Wurzeln $\underset{-m_0 11}{\bar{a}}(x, \lambda', \mu')$ und 0 besitzt, so kann man also auf (3.4) die Theorie der Differentialgleichung anwenden, welche von einem Parameter abhängt.

Wendet man die Transformation

$$Y = P(x, \lambda', \mu', t)Z, \quad P(x, \lambda', \mu', t) = \sum_{r=0}^{N+m_0} \underset{r}{P}(x, \lambda', \mu')t^{-r}, \quad (\underset{0}{P}(x, \lambda', \mu') = E) \tag{3.5}$$

auf (3.4) an, wo N eine später zu bestimmende passende natürliche Zahl ist, so geht (3.4) in

$$dZ/dx = t^{m_0}(F(x, \lambda', \mu', t) + B(x, \lambda', \mu', t))Z$$

über, wo

$$F(x, \lambda', \mu', t) = \sum_{r=0}^{N+m_0} \underset{-m_0+r}{B}(x, \lambda', \mu')t^{-r},$$

$$B(x, \lambda', \mu', t) \sim \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} \underset{-m_0+r}{B}(x, \lambda', \mu')t^{-r}$$

ist. Wie eine kurze Berechnung zeigt, gilt es zwischen den Koeffizienten die folgende Beziehung:

$$(3.6)\quad \underset{-m_0+r}{B}(x,\lambda',\mu') = \underset{-m_0}{\overline{\overline{A}}}(x,\lambda',\mu')\underset{r}{P}(x,\lambda',\mu') - \underset{r}{P}(x,\lambda',\mu')\underset{-m_0}{\overline{\overline{A}}}(x,\lambda',\mu')$$
$$+ \mathrm{Pol}\,(\underset{r-1}{P}(x,\lambda',\mu'), \underset{-m_0+r}{P'}(x,\lambda',\mu'), \underset{-m_0+r}{\overline{\overline{A}}}(x,\lambda',\mu')),\ (r=0,\ldots\ldots),$$

wo $\mathrm{Pol}\,(\underset{r-1}{P}(x,\lambda',\mu'), \underset{-m_0+r}{P'}(x,\lambda',\mu'), \underset{-m_0+r}{\overline{\overline{A}}}(x,\lambda',\mu'))$ ein Polynom von $\underset{s}{P}(x,\lambda',\mu')$, $(s=0, \ldots, r-1)$, $\underset{s}{P'}$ und $\underset{s}{\overline{\overline{A}}}$, $(s=-m_0,\ldots, -m_0+r)$ ist, d.h.

$$\mathrm{Pol}\,(\underset{r-1}{P}(x,\lambda',\mu'), \underset{-m_0+r}{P'}(x,\lambda',\mu'), \underset{-m_0+r}{\overline{\overline{A}}}(x,\lambda',\mu'))$$
$$= \sum_{s=0}^{r}\sum_{k=0}^{r-s} \underset{s}{Q}(x,\lambda',\mu')\underset{-m_0+k}{\overline{\overline{A}}}(x,\lambda',\mu')\underset{r-s-k}{P}(x,\lambda',\mu')$$
$$- \sum_{s=0}^{r-m_0-1} \underset{s}{Q}(x,\lambda',\mu')\underset{r-m_0-s}{P'}(x,\lambda',\mu')$$
$$- (\underset{-m_0}{\overline{\overline{A}}}(x,\lambda',\mu')\underset{r}{P}(x,\lambda',\mu') - \underset{r}{P}(x,\lambda',\mu')\underset{-m_0}{\overline{\overline{A}}}(x,\lambda',\mu'))$$

ist, in dem man $P(x,\lambda',\mu',t)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \underset{r}{Q}(x,\lambda',\mu')t^{-r}$, $(\underset{0}{Q}(x,\lambda',\mu') = E)$ setzt. Daher kann man nach (3.6) $\underset{r}{P}(x,\lambda',\mu')$ nacheinander so bestimmen, dass die Matrizen $\underset{-m_0+r}{B}(x,\lambda',\mu)$, $(r=1,\ldots, N+m_0)$ diagonal werden.

Durch vollständige Induktion kann man beweisen, dass

$$(3.7)\quad \begin{cases} \underset{r}{p_{ij}}(x,\lambda',\mu') = K_r'\psi_r(\nu'), & (i \neq j;\ r=1,\ldots N+m_0), \\ \underset{-m_0+r}{b_{ij}}(x,\lambda',\mu') = \theta' K_r'\psi_r(\nu'), & (i,j=1,2;\ r=1,\ldots) \end{cases}$$

gilt. Der Einfachheit der Berechnung halber stellt man mit $\psi(\nu)$ alle rationalen Funktionen von ν dar, deren Koeffizienten für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ genügend oft differentierbar sind, und deren Nenner $(\hat{p}(\nu))^k$, $(k(>1)$: natürliche Zahl) sind. Es sei $\Psi(\nu)$ eine Matrize mit den Elementen $\psi(\nu)$. Es seien $\Psi(\nu')$ und $\psi(\nu')$ rationale Funktionen von ν', welche man bzw. in $\Psi(\nu)$ und $\psi(\nu)$ durch die Vertauschung von ν und ν' hat. Da man die diagonalen Elemente von $\underset{r}{P}(x,\lambda',\mu')$ willkürlich bestimmen darf, so nimmt man $\underset{r}{p_{jj}}(x,\lambda',\mu') = 0$, $(j=1,2,\ r=1, \ldots, N+m_0)$ an. Führt man (3.3) in $t^{m_0}F(x,\lambda',\mu',t)$ ein, so wird es zu $\theta\sum_{r=0}^{N+m_0} K_r\Psi_r(\nu)$, $(\equiv \mathfrak{F}(x,\lambda,\mu))$. Führt man (3.3) in $t^{m_0}B(x,\lambda'\mu',t)$ ein, so erhält man $\mathfrak{B}(x,\lambda\,\mu)$, welche sich folgendermassen asymptotisch entwickeln lässt:

$$\mathfrak{B}(x,\lambda,\mu) \sim \theta \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} K_r\Psi_r(\nu) \text{ für } \Delta,\quad \lambda,\mu\to\infty.$$

Denn man kann nach (3.7) eine asymptotische Transformation erhalten, wenn man (3.3) in (3.5) einführt.

4. Formale Lösung. In diesem Paragraphen denken wir uns eine formale Lösung der Differentialgleichung

(4.1) $$dZ/dx = (\mathfrak{F}(x, \lambda, \mu) + \mathfrak{B}(x, \lambda, \mu))Z.$$

Wir stellen die folgenden Voraussetzungen:

(i) $\mathfrak{F}(x, \lambda, \mu)$, deren diagonale Elemente $\mathfrak{f}_1(x, \lambda, \mu)$ und $\mathfrak{f}_2(x, \lambda, \mu)$ voneinander verschieden sind, ist für Δ stetig und diagonal. Es ist

$$\mathfrak{F}(x, \lambda, \mu) = \theta \sum_{r=0}^{N+m_0} K_r \Psi_r(\nu).$$

Man setze $F_i(x, \lambda, \mu) = \int \mathfrak{f}_i(x, \lambda, \mu) dx$, $(i = 1, 2)$.

(ii) $\mathfrak{B}(x, \lambda, \mu)$ ist für Δ stetig, und es lässt sich folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$\mathfrak{B}(x, \lambda, \mu) \sim \theta \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} K_r \Psi_r(\nu) \text{ für } \Delta, \quad \lambda, \mu \to \infty.$$

Wendet man erstens die Transformation (3.3) auf (4.1) an, so geht (4.1) in

(4.2) $$dZ/dx = (\widetilde{F}(x, \lambda', \mu', t) + \widetilde{B}(x, \lambda', \mu', t))Z$$

über. Dabei gilt

$$\widetilde{F}(x, \lambda', \mu', t) \equiv \mathfrak{F}(x, \lambda' t^{n'}, \mu' t^{n'}) = t^{m_0} \sum_{r=0}^{N+m_0} \widetilde{B}_{-m_0+r}(x, \lambda', \mu') t^{-r},$$

$$\widetilde{B}(x, \lambda', \mu', t) \equiv \mathfrak{B}(x, \lambda' t^n, \mu' t^{n'}) \sim t^{m_0} \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} \widetilde{B}_{-m_0+r}(x, \lambda', \mu') t^{-r},$$

wenn man $\widetilde{B}_{-m_0+r}(x, \lambda', \mu') = \theta' K_r' \Psi_r(\nu')$ setzt. Ferner durch die Transformation

$$Z = \overline{P}(x, \lambda', \mu', t)\overline{Z}, \quad P(x, \lambda', \mu', t) \sim E + \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} \overline{P}_r(x, \lambda', \mu') t^{-r}$$

geht (4.2) in

(4.3) $$dZ/dx = (F(x, \lambda', \mu', t) + B(x, \lambda', \mu', t))\overline{Z}$$

über, wo

$$\overline{F}(x, \lambda', \mu', t) = \widetilde{F}(x, \lambda', \mu', t),$$

$$\overline{B}(x, \lambda', \mu', t) \sim t^{m_0} \sum_{r=N+m_0+1}^{\infty} B_{-m_0+r}(x, \lambda', \mu') t^{-r}$$

ist. Ebenso wie beim Paragraphen 3, wie eine kurze Berechnung zeigt, gilt die folgende Beziehung:

(4.4) $$\overline{B}_{-m_0+r}(x, \lambda', \mu') = \widetilde{B}_{-m_0+r}(x, \lambda', \mu') \overline{P}_r(x, \lambda, \mu') - \overline{P}_r(x, \lambda', \mu') \widetilde{B}_{-m_0+r}(x, \lambda', \mu')$$
$$+ \mathrm{Pol}\,(\overline{P}_{r-1}(x, \lambda', \mu'), \ \overline{P}_{-m_0+r}(x, \lambda', \mu'), \ \widetilde{B}_{-m_0+r}(x, \lambda', \mu')), \ (r = N + m_0 + 1, \ldots).$$

Dabei ist offenbar

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pol}\,(\underset{r-1}{\overline{P}}(x,\lambda',\mu'),\underset{-m_0+r}{\overline{P}'}(x,\lambda',\mu'),\underset{-m_0+r}{\widetilde{B}}(x,\lambda',\mu'))\\ &=\sum_{s=0}^{r}\sum_{k=0}^{r-s}\underset{s}{\overline{Q}}(x,\lambda',\mu')\underset{-m_0+k}{\widetilde{B}}(x,\lambda',\mu')\underset{r-s-k}{\overline{P}}(x,\lambda',\mu')-\sum_{s=0}^{r-m_0-1}\underset{s}{\overline{Q}}(x,\lambda',\mu')\underset{r-m_0-s}{\overline{P}'}(x,\lambda',\mu')\\ &-(\underset{-m_0}{\widetilde{B}}(x,\lambda',\mu')\,\underset{r}{\overline{P}}(x,\lambda',\mu')-\underset{r}{\overline{P}}(x,\lambda',\mu')\underset{-m_0}{\widetilde{B}}(x,\lambda',\mu')),\\ &\overline{P}(x,\lambda',\mu',t)^{-1}\sim E+\sum_{r=N+m_0+1}^{\infty}\underset{r}{\overline{Q}}(x,\lambda',\mu')t^{-r}.\end{aligned}$$

Man kann nach (4.4) $\underset{r}{\overline{P}}(x,\lambda',\mu')$, $(r=N+m_0+1,\ldots.)$ aufeinander so bestimmen, dass $\underset{-m_0+r}{\overline{B}}(x,\lambda',\mu')$, $(r=N+m_0+1,\ldots.)$ alle diagonale Matrizen werden. Da man die diagonalen Elemente von $\underset{r}{\overline{P}}(x,\lambda',\mu')$ willkürlich annehmen darf, so bestimmt man $\underset{r}{\overline{p}}_{jj}(x,\lambda',\mu')=0$, $(i=1,2;\ r=N+m_0+1,\ldots.)$.

Durch vollständige Induktion ist es klar, dass es gilt

$$\begin{aligned}&\underset{r}{\overline{p}}_{ij}(x,\lambda',\mu')=K_r'\psi_r(\nu'),\quad(i\neq j;\ r=\ N+m_0+1,\ldots.),\\ &\underset{-m_0+r}{\overline{b}}_{ii}(x,\lambda',\mu')=\theta'K_r'\psi_r(\nu'),\quad(i=1,2;\ r=N+m_0+1,\ldots.).\end{aligned}$$

Wendet man die Transformation

$$\begin{aligned}&\overline{Z}=\overline{\overline{P}}(x,\lambda',\mu',t)\overline{\overline{Z}},\\ &\overline{\overline{P}}(x,\lambda',\mu',t)\sim E+\sum_{r=N+1}^{\infty}\underset{r}{\overline{\overline{P}}}(x,\lambda',\mu')t^{-r},\quad(\underset{r}{\overline{\overline{P}}}(x,\lambda',\mu'):\ \text{diagonal})\end{aligned}$$

auf (4.3) an, so geht (4.3) in

$$d\overline{\overline{Z}}/dx=(\overline{\overline{F}}(x,\lambda',\mu',t)+\overline{\overline{B}}(x,\lambda',\mu',t))\overline{\overline{Z}}$$

über, wo

$$\begin{aligned}&\overline{\overline{F}}(x,\lambda',\mu',t)=\widetilde{F}(x,\lambda',\mu',t),\\ &\overline{\overline{B}}(x,\lambda',\mu',t)\sim t^{m_0}\sum_{r=N+m_0+1}^{\infty}\underset{-m_0+r}{\overline{\overline{B}}}(x,\lambda',\mu')t^{-r}\end{aligned}$$

ist. Wie eine kurze Berechnung zeigt, gilt

$$\begin{aligned}(4.5)\qquad&\underset{-m_0+r}{\overline{\overline{B}}}(x,\lambda',\mu')=\underset{-m_0+r}{\overline{B}}(x,\lambda',\mu')-\underset{-m_0+r}{\overline{\overline{P}}'}(x,\lambda',\mu')\\ &\qquad+\mathrm{Pol}\,(\underset{-m_0-N+r-1}{\overline{\overline{P}}}(x,\lambda',\mu'),\ \underset{-m_0+r-N-1}{\overline{\overline{P}}'}(x,\lambda',\mu')),\qquad(r=N+m_0+1,\ldots.),\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pol}(\underset{-m_0-N+r-1}{\overline{\overline{P}}}(x,\lambda',\mu'),\ \underset{-m_0-N+r-1}{\overline{\overline{P}}'}(x,\lambda',\mu'))=-\sum_{s=N+1}^{-m_0+r-N-1}\underset{s}{\overline{\overline{Q}}}(x,\lambda',\mu')\,\underset{-m_0+r-s}{\overline{\overline{P}}'}(x,\lambda',\mu'),\\ &\overline{\overline{P}}(x,\lambda',\mu',t)^{-1}\sim E+\sum_{r=N+1}^{\infty}\underset{r}{\overline{\overline{Q}}}(x,\lambda',\mu')t^{-r}\end{aligned}$$

ist. Nach (4.5) kann man $\underset{-m_0+r}{\overline{\overline{P}}}(x,\lambda',\mu')$, $(r=N+m_0+1,\ldots)$ aufeinander so bestimmen, dass $\underset{-m_0+r}{\overline{\overline{B}}}(x,\lambda',\mu')=0,(r=N+m_0+1,\ldots)$ gilt. Man stelle eine stetige und beschränkte Funktion für Δ kurz durch $\overline{\psi}(\nu)$ dar. Es sei $\overline{\Psi}(\nu)$ eine Matrize mit den Elementen $\overline{\psi}(\nu)$. Es seien $\overline{\Psi}(\nu')$ und $\overline{\psi}(\nu')$ Funktionen von ν', welche man bzw. in $\overline{\Psi}(\nu)$ und $\overline{\psi}(\nu)$ durch die Vertauschung von ν und ν' erhält. Durch vollständige Induktion kann man

$$\underset{s(N+1)+p}{\overline{\overline{P}}}(x,\lambda',\mu')=\theta'^{s}K'_{s(N+m_0+1)+p}\overline{\Psi}(\nu'),\ (s=1,\ldots;\ 0\leqq p\leqq N)$$

beweisen. Nimmt man eine hinreichend grosse Zahl N von der Art an, dass $N+m_0+1$ ein Multiplum von N_0 wird, und bestimmt man n_1 und n_1' durch

$$(4.6)\qquad \begin{cases} n_1'/n_1=\overline{\delta}_1/\overline{\delta}_2,\\ \overline{\delta}_1=\dfrac{\delta_1(N+m_0+1)-(m-r_0)}{N+1},\ \overline{\delta}_2=\dfrac{\delta_2(N+m_0+1)+(m'-s_0)}{N+1}, \end{cases}$$

so ergibt sich die Ungleichung $\sigma_2<n_1'/n_1<n_0'/n_0$. Man kann daher nach (x)

$$\underset{s(N+1)+p}{\overline{\overline{P}}}(x,\lambda',\mu')=K'_{s(N+1)+p,1}\overline{\Psi}(\nu'),\ (s=1,\ldots;\ 0\leqq p\leqq N),$$

d. h.

$$\underset{r}{\overline{\overline{P}}}(x,\lambda',\mu')=K'_{r,1}\overline{\Psi}(\nu'),\ (r=N+1,\ldots)$$

beweisen. Daher besitzt (4.2) eine formale Lösung

$$Z\sim\Big(E+\sum_{r=N+1}^{\infty}\underset{r}{\widetilde{P}}(x,\lambda',\mu')t^{-r}\Big)\overline{\overline{Z}},$$

wo

$$\underset{r}{\widetilde{P}}(x,\lambda',\mu')=\sum_{s=0}^{r}\underset{s}{\overline{P}}(x,\lambda',\mu')\underset{r-s}{\overline{\overline{P}}}(x,\lambda',\mu'),$$

$$\underset{r}{\overline{P}}(x,\lambda',\mu')=0,\ (r=1,\ldots,N+m_0),\quad \underset{r}{\overline{\overline{P}}}(x,\lambda',\mu')=0,\ (r=1,\ldots,N)$$

ist. Da man nach (iv) und (v) die Beziehungen $K_s'=\nu'^kK_{s,1}'$ und $K_{s,1}'K_{r-1,1}'=K_{r1}'\nu'^k$ erhält, so folgt sogleich

$$\underset{r}{\widetilde{P}}(x,\lambda',\mu')=\sum_{s=0}^{r}K_s'\Psi_s(\nu')K_{r-s,1}'\overline{\Psi}_{r-s}(\nu')=K_{r,1}'\overline{\Psi}(\nu').$$

Da (4.2) also eine formale Lösung

$$(4.7)\qquad z_j\sim\exp(F_k'(x,\lambda',\mu',t))\sum_{r=0}^{\infty}K_{r1}'\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x,\lambda',\mu')t^{-r},\ (j=1,2)$$

besitzt, wo

$$\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x,\lambda',\mu')=\overline{\psi}(\nu'),\ (r=1,\ldots),$$

$$F_k'(x,\lambda',\mu',t)=F_k(x,\lambda't^n,\mu't^{n'})$$

ist, so erhält man eine formale Lösung von (4.1)

$$z_j \sim \exp(F_k(x,\lambda,\mu)) \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,1} \underset{r}{\hat{p}_{jk}}(x,\lambda,\mu), \quad (j=1,2),$$

wenn man die Transformation (3.3) auf (4.7) anwendet.

5. **Existenzsatz.** Nochmals denken wir uns (4.1). Dabei setzt man (i) und (ii) des Paragraphen 4 voraus. Wendet man die Transformation

(5.1) $$z_j = \exp(F_k(x,\lambda\,\mu))\,\mathfrak{y}_j, \quad (j=1,2)$$

auf (4.1) an, so geht (4.1) in

(5.2) $$d\mathfrak{Y}/dx = (\mathfrak{F}^*(x,\lambda,\mu) + \mathfrak{B}(x,\lambda,\mu))\mathfrak{Y}$$

über, wobei es offenbar $\mathfrak{F}^*(x,\lambda\,\mu) = \mathfrak{F}(x,\lambda\,\mu) - \mathfrak{f}_k(x,\lambda\,\mu)E$ ist. Es seien $\mathfrak{f}_j^*(x,\lambda\,\mu)$, $(j=1,2)$ die diagonale Elemente von $\mathfrak{F}^*(x,\lambda,\mu)$. Aus (i) und (ii) des Paragraphen 4 folgen die folgenden Tatsachen.

(i) $\mathfrak{F}^*(x,\lambda\,\mu)$, deren diagonale Elemente voneinander verschieden sind, ist für Δ stetig und diagonal. Es ist

$$\mathfrak{F}^*(x,\lambda,\mu) = \theta \sum_{r=0}^{N+m_0} K_r \Psi_r(\nu).$$

Man setze $F_i^*(x,\lambda,\mu) = \int \mathfrak{f}_i^*(x,\lambda,\mu)dx$, $(i=1,2)$.

(ii) (5.2) besitzt die folgende formale Lösung:

(5.3) $$\mathfrak{y}_j \sim \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,1} \underset{r}{\hat{p}_{jk}}(x,\lambda,\mu), \quad (j=1,2),$$

wo $\hat{p}_{jk}(x,\lambda\,\mu) = \bar{\Psi}(\nu)$ ist.

Ferner stellt man in diesem Paragraphen die folgende Voraussetzung:

(iii) Es gilt

$$\Re\mathfrak{f}_j^*(x,\lambda,\mu) \geqq 0 \quad \text{für } \alpha \leqq x \leqq x_j, \quad (j=1,2),$$
$$\Re\mathfrak{f}_j^*(x,\lambda,\mu) \leqq 0 \quad \text{für } x_j \leqq x \leqq \beta, \quad (j=1,2).$$

Nach (xi) lässt sich $\mathfrak{B}(x,\lambda,\mu)$ auch folgendermassen asymptotisch entwickeln:

(5.4) $$\mathfrak{B}(x,\lambda,\mu) \sim \sum_{r=N+1}^{\infty} K_{r,1}\Psi_r(\nu) \text{ für } \Delta, \quad \lambda,\mu \to \infty,$$

wobei natürliche Zahlen n_1 und n_1' durch (4.6) gegeben werden.

Wendet man die Transformation

$$\mathfrak{y}_j = \sum_{r=0}^{M+N+1} K_{r,1} \underset{r}{\hat{p}_{jk}}(x,\lambda,\mu) + u_j, \quad (j=1,2)$$

auf (5.2) an, so geht (5.2) in

(5.5) $$\frac{du_j}{dx} = \mathfrak{f}_j^*(x,\lambda,\mu)u_j + \sum_{k=1}^{2} \mathfrak{b}_{jk}(x,\lambda,\mu)u_k + \mathfrak{b}_j(x,\lambda,\mu), \quad (j=1,2)$$

über, wo M eine später zu bestimmende natürliche Zahl ist, und

$$(5.6)\qquad \mathfrak{b}_j(x,\lambda,\mu)=\mathfrak{f}_j^*(x,\lambda,\mu)\sum_{r=0}^{M+N+1}K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x,\lambda,\mu)$$
$$+\sum_{l=1}^{2}(\mathfrak{b}_{jl}(x,\lambda\ \mu)\sum_{r=0}^{M+N+1}K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{lk}(x,\lambda,\mu))$$
$$-\sum_{r=0}^{M+N+1}K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}'}_{jk}(x,\lambda,\mu),\ (j=1,2)$$

ist. Da $\mathfrak{b}_{jk}(x,\lambda\ \mu)$, $(j,k=1,2)$ nach Voraussetzung für Δ, $\lambda,\mu\to\infty$ asymptotisch sind, so werden $\mathfrak{b}_j(x,\lambda\ \mu)$, $(j=1,2)$ auch nach (5.6) für Δ, $\lambda,\mu\to\infty$ asymptotisch. Da andererseits $u_j\sim\sum_{r=M+N+2}^{\infty}K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x,\lambda\ \mu)$, $(j=1,2)$ eine formale Lösung von (5.5) ist, so muss es formell

$$\frac{du_j}{dx}-\mathfrak{f}_j^*(x,\lambda\ \mu)u_j-\sum_{k=1}^{2}\mathfrak{b}_{jk}(x,\lambda,\mu)u_k$$
$$\sim\sum_{r=M+N+2-m_0}^{\infty}K_{r,2}\Psi_r(v),\ (j=1,2)$$

sein. Nimmt man ebenso wie im Falle (x) eine hinreichend grosse Zahl M von der Art an, dass $M+N+2$ ein Multiplum von N_1 wird, und natürliche Zahlen n_2 und n_2' von der Art, dass

$$n_2'/n_2=\overline{\overline{\delta}}_1/\overline{\overline{\delta}}_2,$$
$$\overline{\overline{\delta}}_1=\frac{\overline{\delta}_1(M+N+2)-m}{M+N+2-m_0},\quad \overline{\overline{\delta}}_2=\frac{\overline{\delta}_2(M+N+2)+m'}{M+N+2-m_0}$$

gilt, so ergibt sich die Ungleichung $\sigma_2<n_2'/n_2$. Daher kann man $\mathfrak{b}_j(x,\lambda,\mu)$, $(j=1,2)$ folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$(5.7)\qquad \mathfrak{b}_j(x,\lambda,\mu)\sim\sum_{r=M+N+2-m_0}^{\infty}K_{r,2}\Psi_r(v)\ \text{für}\ \Delta,\ \lambda,\mu\to\infty,\ (j=1,2).$$

Aus (5.4) und (5.7) folgt

$$|\mathfrak{b}_{jk}(x,\lambda,\mu)|\leqq H\overline{\delta}^{N+1}\quad \text{für}\ \Delta,\ (j=1,2),$$
$$|\mathfrak{b}_j(x,\lambda,\mu)|\leqq K\overline{\overline{\delta}}^{M+N+2-m_0}\ \text{für}\ \Delta,\ (j=1,2),$$

wo H eine hinreichend grosse positive Zahl ist. Von hier an umschreibt man der Einfachheit halber an Stelle von $\overline{\delta}^{N+1}$ und $\overline{\overline{\delta}}^{M+N+2-m_0}$ bzw. $\overline{\delta}^*$ und $\overline{\overline{\delta}}^*$

Wendet man die Transformation

$$u_j=v_j\exp(F_j^*(x,\lambda\ \mu)),\ (j=1,2)$$

auf (5.5) an, so geht (5.5) in

$$(5.8)\qquad \frac{dv_j}{dx}=\sum_{k=1}^{2}\mathfrak{b}_{jk}(x,\lambda,\mu)e^{F_k^*(x,\lambda,\mu)-F_j^*(x,\lambda,\mu)}v_k+\mathfrak{b}_j(x,\lambda,\mu)e^{-F_k^*(x,\lambda,)\mu}$$

über. Setzt man

$G_j(x, \lambda, \mu) = \overline{\overline{\delta}}^* \exp(\Re F_j^*(x, \lambda, \mu) + |x - x_j|), \quad (j = 1, 2),$
so gilt es offenbar für eine hinreichend grosse positive Zahl L die folgende Ungleichung:

$$(5.9) \quad L \operatorname{sgn}(x - x_j) \frac{\partial G_j(x, \lambda, \mu)}{\partial x} > \Big(\sum_{k=1}^{2} LH\delta^* e^{|x-x_k|} + K\Big) \exp(-\Re F^*(x, \lambda, \mu)) \overline{\overline{\delta}}^*, \quad (j = 1, 2).$$

Daher muss eine Lösung von (5.8), welche die folgende Anfangsbedingung erfüllt:

$$(5.10) \qquad v_j(x_j) = v_j^0, \quad |v_j^0| \leqq LG_j(x_j, \lambda, \mu), \quad (j = 1, 2)$$

die folgende Ungleichung erfüllen:

$$(5.11) \qquad |v_j| \leqq LG_j(x, \lambda, \mu), \quad (j = 1, 2).$$

Ohne Schwierigkeit wird es gezeigt, dass solche Lösung von (5.8) eindeutig ist. Aus (vii) des Paragraphen 1 folgt

$$(5.12) \qquad |K_{1,1}| \leqq K\overline{\delta} \text{ für } D.$$

Bestimmt man δ_0 durch

$$\delta_0 = \overline{\delta}_2 \Big(\frac{\delta_1}{\overline{\delta}_2} - \frac{\overline{\delta}_1}{\overline{\overline{\delta}}_2}\Big),$$

so erhält man nach Betrachtung von (2.4) und $\sigma_2 - (\overline{\delta_1}/\overline{\delta_2}) < 0$

$$(5.13) \qquad |\lambda^{\delta_0}\lambda^{-\overline{\delta}_1}\mu^{\overline{\delta}_2}| = |(\lambda^{-\overline{\overline{\delta}}_1}\mu^{\overline{\overline{\delta}}_2})^{\overline{\delta_2}, \overline{\overline{\delta_2}}}| \leqq K|\lambda|^{\overline{\delta_2(\sigma_2 - \overline{\overline{\delta_1}}/\overline{\overline{\delta_2}})}} \leqq K \text{ für } D.$$

Aus (5.12) und (5.13) folgt

$$(5.14) \qquad |K_{1,1}\lambda^{\delta_0}| \leqq K \text{ für } D.$$

Da nach Voraussetzung $\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x, \lambda, \mu)$ für Δ beschränkt ist, so werden $K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu)\lambda^{\delta_0 r}$, $(r = 1, \ldots; j = 1, 2)$ nach (5.4) für D beschränkt. D.h. es gilt

$$(5.15) \qquad |K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu)\lambda^{\delta_0 r}| \leqq M_{jk} \text{ für } D, (j = 1, 2;\ r = 0, 1, \ldots).$$

Man setze $M_r = \operatorname*{Max}_{j=1,2} (M_{jr})$.

Ebenso wie beim Falle der Differentialgleichung[3], welche von einem Parameter abhängt, bestimmt man Funktionen $f_r(\lambda), (r = 0, 1, \ldots)$, so dass

$$f_r(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\int_\lambda^\infty \exp(-a_r z^\sigma)\, z^{-2}\, dz & \text{für } r \geqq M' \\ 0 & \text{für } r < M' \end{cases}$$

ist, wo σ eine hinreichend kleine positive Zahl ist, und M' durch

$$(5.16) \qquad M' = \text{Min}(\text{Ganze Zahlen } x, \text{ wofür } x \geqq 1/\delta_0 \text{ gilt.})$$

bestimmt wird. Für solche Funktionen $f_r(\lambda)$, $(r = 0, 1, \ldots)$ lassen sich die folgenden Tatsachen leicht beweisen.

(a) Man kann eine hinreichend kleine Zahl a_r (> 0) von der Art annehmen,

3) Vgl [1].

dass $|\lambda^{-1}-f_r(\lambda)| \leqq 1/M_r$ für D gilt.

(b) Wie gross die natürliche Zahl n auch sein mag, werden $\lambda^n f_r(\lambda), (r = 1, \ldots .)$ für $D, \lambda \to \infty$ gegen 0 gleichmässig konvergent.

Man setze

$$\varphi_j(\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,1} \underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu)\lambda(\lambda^{-1}-f_r(\lambda)), \quad (j = 1, 2). \tag{5.17}$$

Da $K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu)\lambda(\lambda^{-1}-f_r(\lambda)) = K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu)$ für $D, (r < M'; j = 1, 2)$ gilt und aus (5.14), (a) und (5.15) die Ungleichung $|K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu)\lambda(\lambda^{-1}-f_r(\lambda))| \leqq |\lambda|^{-(r-M')\delta_0}$ für D, $(r \geqq M'; j = 1, 2)$ folgt, so wird die rechte Seite von (5.17) für D gleichmässig konvergent und $\varphi_j(\lambda)$ dort stetig. Andererseits gilt für willkürliche natürliche Zahl N'' die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \varphi_j(\lambda) - \sum_{r=0}^{N''} K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu) &= -\lambda \sum_{r=M'}^{M''} K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu) f_r(\lambda) \\ &+ \sum_{r=N''+1}^{M''} K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu) \\ &+ \sum_{r=M''+1}^{\infty} K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu)\lambda(\lambda^{-1}-f_r(\lambda)), \quad (j = 1, 2), \end{aligned}$$

wobei M'' eine später zu bestimmende natürliche Zahl ist, und $M'' \geqq M', N'$ ist. Nimmt man eine hinreichend grosse Zahl N''' von der Art an, dass $|\lambda|^{-(N'''-1)} \leqq K\bar{\delta}^{N''+1}$ für D gilt, so werden $f_r(\lambda)\lambda^{N'''}$, $(r = M', \ldots . M'')$, wie M'' gross sein mag, nach (b) für $D, \lambda \to \infty$ gegen 0 gleichmässig konvergent. Es gilt nach der Beschränktheit von $K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu)$ für D die folgende Abschätzung:

$$\left| \lambda \sum_{r=M'}^{M''} K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu) f_r(\lambda) \right| \leqq K\, \bar{\delta}^{N''+1} \text{ für } D.$$

Es ist klar, dass die Ungleichung $\left| \sum_{r=N''+1}^{M''} K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu) \right| \leqq K\bar{\delta}^{N''+1}$ für D gilt.

Nimmt man eine hinreichend grosse Zahl M'' von der Art an, dass $\delta_0(M''+1-M') \geqq N'''-1$ gilt, so gilt

$$\left| \sum_{r=M''+1}^{\infty} K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu)\lambda(\lambda^{-1}-f_r(\lambda)) \right| \leqq K\bar{\delta}^{N''+1} \text{ für } D.$$

Da es also für alle natürlichen Zahlen N'' die folgende Abschätzung gilt:

$$\left| \varphi_j(\lambda) - \sum_{r=0}^{N''} K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j, \lambda, \mu) \right| \leqq K\bar{\delta}^{N''+1} \text{ für } D,$$

so lassen sich $\varphi_j(\lambda), (j=1,2)$ folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$\varphi_j(\lambda) \sim \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j,\lambda,\mu) \text{ für } D, \quad \lambda,\mu\to\infty. \qquad (j=1,2).$$

Hieraus folgt

$$\left|\left(\varphi_j(\lambda) - \sum_{r=0}^{M+N+1} K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j,\lambda,\mu)\right)e^{-\overset{*}{F}_j(x_j\,\lambda,\mu)}\right| \leqq LG_j(x_j,\lambda,\mu), \ (j=1,2).$$

Die Lösung von (5.8) v_j, welche die folgende Anfangsbedingung erfüllt:

$$v_j(x_j) = \left(\varphi_j(\lambda) - \sum_{r=0}^{M+N+1} K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x_j,\lambda,\theta)\right)e^{-\overset{*}{F}_j(x_j,\lambda,\mu)}, (j=1,2),$$

muss die Ungleichung (5.11) erfüllen. Da es also für die Lösung von (5.2) $\mathfrak{y}_j$, welche die Anfangsbedingung $\mathfrak{y}_j(x_j) = \varphi_j(\lambda), (j=1,2)$ erfüllt, die Abschätzung

$$\left|\left(\mathfrak{y}_j - \sum_{r=0}^{M+N+1} K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{rjk}(x,\lambda,\mu)\right)e^{-\overset{*}{F}_j(x,\lambda,\mu)}\right|$$
$$\leqq LG_j(x,\lambda,\mu) \text{ für } \Delta, \ j=1,2)$$

gilt, so muss für alle natürlichen Zahlen $\hat{N}$ die Ungleichung

$$\left|\mathfrak{y}_j - \sum_{r=0}^{\hat{N}-1} K_{r,2}\underset{r}{\hat{p}}{}^*_{jk}(x,\lambda\ \mu)\right| \leqq K\bar{\delta}^{\hat{N}} \text{ für } \Delta, \quad (j=1,2)$$

gelten. D.h. $\mathfrak{y}_j$ lässt sich folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$\mathfrak{y}_j \sim \sum_{r=0}^{\infty} K_{r,2}\underset{r}{\hat{p}}{}^*_{jk}(x,\lambda,\mu) \text{ für } \Delta, \quad \lambda,\mu\to\infty, \ (j=1,2),$$

wobei man $K_{r,1}\underset{r}{\hat{p}}_{jk}(x,\lambda,\mu) = K_{r,2}\underset{r}{\hat{p}}{}^*_{jk}\ (x,\lambda,\mu)$ setzt. Daher muss die Lösung z_j von (4.1), welche die Anfangsbedingung

$$z_j(x_j) = \exp(F_k(x_j,\lambda,\mu))\,\varphi_j(\lambda), \ (j=1,2)$$

erfüllt, sich folgendermassen asymptotisch entwickeln lassen:

$$z_j \sim \exp(F_k(x,\lambda,\mu))\sum_{r=0}^{\infty} K_{r,2}\underset{r}{\hat{p}}{}^*_{jk}(x,\lambda,\mu) \text{ für } \Delta, \quad \lambda,\mu\to\infty, \ (j=1,2).$$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] M. HUKUHARA, Sur propriétés asymptotiques des solut'ons d'un système d'équations différentielles linéalires contenant un parameter, Memo. Fac. Eng. Kyûshû Univ. 8(1937), 249-280.

[2] K. TAKAHASHI, Ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen, welche von zwei Parametern abhängen, Tôhoku Math. J. 8(1956), 258-267.

UNIVERSITÄT DER LANDWIRTSCHAFT UND TECHNOLOGIE ZU TOKIO.