SUR DES HYPERSURFACES ET QUELQUES GROUPES D'ISOMETRIES D'UN ESPACE RIEMANNIEN

TADASHI NAGANO

(Received June 18, 1958)

1. Introdcution. Récemment K. Yano a étudié, parmi les autres, un champ de Killing u qui est une normale à une hypersurface B (en tout point de B) d'un espace riemannien M ([7]).

Nous voulons trouver la condition pour l'existence de u et la relation entre u et le groupe d'isométries de M.

Soit B une hypersurface complète et régulièrement plongée dans M, et soit u un champ de Killing qui engendre un groupe G à un paramètre, tel que, en tout point p de B, $u(p)$ est orthogonal à B.

Le paragraphe 2 est consacré à la démonstration du premier théorème: M est complet, B est totalement géodésique, et $G(B)$ coïncide avec M, où $G(B)=\{\lambda(p):\lambda\in G, p\in B\}$. (le théorème 2.1).

Le paragraphe 3 établit la caractérisation de M dans le cas où u ne s'annule en aucun point de B; M est un espace fibré de la fibre B_0 et associé à l espace fibré principal G sur G/H, où H est un sous-groupe fermé de G dont tout élément laisse invariante une composante connexe B_0 de B (le théorème 3.1). La réciproque est aussi vraie. (Voir le théorème 3.6). Dans [7], B est la frontière d'un ouvert, qui est compacte. Avec cette hypothèse, (1) M est compact, si u s'annule à quelque point de B: (2) les composantes connexes de B seront énumérées, etc. (le théorème 3.5).

Dans le paragraphe 4, nous étudierons la relation entre G et le groupe connexe maximal connexe d'isométries $I(M)$ de M. Le fait le plus intéressant est que G est contenu dans le centre de $I(M)$, si M est compact. A grâce de ce fait, on obtient une décomposition de $I(M)$ et, quand $I(M)$ est transitif, de M. (le théorème 4.1). Une décomposition analogue est possible, si u et le groupe d'holonomie satisfont quelques conditions (le théorème 4.8). On démontre ceci au moyen d'un théorème qui énonce la relation entre le groupe d'holonomie et le groupe d'isométries [10]. (Voir le théorème Y dans 4).

Il m'est agréable de dire ici toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur K. Yano, sans qui ce mémoir n'aurait pas apparu.

2. Le premier théorème. Par un espace riemannien nous entendrons toujours un espace riemannien connexe de classe C^∞. Soit (ϕ, B) une sous-variété plongée dans un espace riemannien M, où ϕ est l'injection de B dans M ([3]). Nous conviendrons de dire que B est connexe ou complète, etc. par rapport à la topologie ou la structure uniforme de B et non par rapport à la topologie induite de $\phi(B)$, etc. Sous cette convention nous supprimons ϕ. Par définition, un groupe connexe G d'isométries est *orthogonal* à B, si, pour tout point $p \in B$, l'espace tangent T_G en p de l'orbite $G(p)$ est orthogonal à l'espace tangent T_B de B en p dans l'espace tangent T_M de M au même point $p \in M$, et si G ne réduit pas à l'élément neutre. G sera dit un *orthosupplément* de B, si en outre T_G est l'orthosupplément de T_B, c'est-à-dire on a

$$T_G \perp T_B \quad \text{et} \quad T_M = T_G + T_B \quad \text{(la somme directe).}$$

Par une hypersurface de M nous entendrons une sous-variété dont la dimension égale dim $M-1$.

THÉORÈME 2.1. *Si B est une hypersurface complète d'un espace riemannien M et si G est un groupe d'isométries de M orthogonal à B, alors* (1) *M est complet,* (2) *B est totalement géodésique,* (3) *M coïncide avec $G(B)$, et* (4) *dim $G=1$.*

Nous commençons la démonstration par prouver quelques lemmes:

LEMME 2.2. *Soit u un champ de Killing non-trivial sur un espace riemannien M et soit N le sous-ensemble $\{p\,; p \in M,\ u(p)=0\}$ de M. Alors chaque composante connexe de N est une sous-variété totalement géodésique à dimension au plus dim$M-2$ qui est régulièrement plongée dans M.*

Chaque point $p \in N$ a un vosinage U dont tout point est joint à p par exactement une géodésique toute contenue dans U. On peut supposer que U est une boule, i.e. il existe un nombre positif ν tel que U est l'ensemble $\{q \in M$; la distance $d(q,p) < \nu\}$. Si ν est petit, u est *complet* sur U, c'est-à-dire u engendre un groupe G à un paramètre d'isométries de U. Soit $q\,(\neq p)$ un point de $N \cap U$, la géodésique $\gamma \subset U$ qui passe par q et p est invariante par λ pour tout $\lambda \in G$. Donc λ fixe tout point de γ, ce qui entraîne que $\gamma \subset N$. Or les vecteurs en p qui sont invariants par G forment un espace vectoriel, il en résulte que $U \cap N$ est géodésique à p. Par ailleurs, comme p était un point quelconque de N, on en déduit que chaque composante connexe N' de N est totalement géodésique et une sous-variété fermée dans le sens de Chern ([3] p. 63). En particulier, elle est régulièrement plongée. Finalement, si dim$M-2<$ dimN', N' est un ouvert ou une hypersurface. Dans le dernier cas, chaque vecteur normal est aussi invariant par u, et, par suite, N' est ouverte. Or N est fermée, donc N' est fermée et ouverte, d'où $N'=M$, ce qui n'est pas.

LEMME 2.2'. *Soit λ une isométrie d'un espace M qui n'est pas l'identité. Alors l'ensemble $N \subset M$ des points fixes de λ jouit des propriétés énoncées dans le lemme 2.2., si λ n'est pas une reflexion par rapport à une hypersurface.*

En échangeant "$u(p)=0$" contre "λ fixe p" dans la démonstration du lemme 2.2, on obtiendra la preuve.

LEMME 2.3. *Soit G groupe des rotations à un paramètre de l'espace euclidien E^n tel qu'il existe un hyperplan E^{n-1} satisfaisant à deux conditions suivantes:* (1) *Si un point $p \in E^{n-1}$ n'est pas le point fixe de G, l'orbite $G(p)$ n'est pas tangente à E^{n-1} en p et* (2) *G ne fixe que des points de E^{n-1}. Alors l'ensemble*

$G(E^{n-1})$ coïncide avec E^n.

On voit que N est connexe, et d'après le lemme 2.2, N est une multiplicité plane. Soit F le complément de N dans E^{n-1}. On suppose d'abord que N n'a contient que le point d'origine o. Désignons par $d(p,q)$ la distance entre p et q $(p,q \in E^n)$. La sphère $S^{n-2} = \{p \in E^{n-1} : d(o,p) = 1\}$ est compacte, et évidemment $G(F)$ est ouvert. Donc il existe un nombre positif ν tel que $d(p, q) < \nu$ entraîne $q \in G(F)$ pour $(p,q) \in S^{n-1} \times E^n$. Si on note H le groupe des homothéties : $(x^i) \in E^n \to (cx^i)$ $(0 < c)$, tout élément de H commute avec celui de G, ce qui montre que $d(p,q) < \nu d(p,o)$ entraîne $q \in G(F)$, pour (p,q) dans $F \times E^n$. Soit r le point d'adhérence de $G(F)$, i.e. la limite d'une suite $\{q_k\} \subset G(F)$. Chaque q_k est transformé dans F par une isométrie $\lambda_k \in G$. Si r n'appartient pas à $G(F)$, $\lambda_k(r)$ n'y appartient plus, et l'on a $d(q_k, r) = d(\lambda_k(q_k), \lambda_k(r)) \geqq \nu d(\lambda_k(q_k), o) = \nu d(q_k, o)$. Il en résulte que q_k converge à o, d'où $r = 0$, autrement dit, la frontière de $G(F)$ est $N = \{o\}$. Par conséquent on a $G(E^{n-1}) = G(F) \cup \{o\} = E^n$. Dans le cas où $N \neq \{o\}$, E^n est la somme directe $N + E'$ des sous-espaces G-invariants. E^{s+1} est la somme directe $N + E' \cap E^{n-1}$. Appliquant le lemme à E', son hypersurface $E' \cap E^{n-1}$ et le groupe (désigné par G aussi) induit sur E' de G, on voit que, pour chaque $p' \in E'$, il existe $\lambda \in G$ tel que $\lambda(p') \in E' \cap E^{n-1}$. Donc, pour tout $p = (q,p') \in E^n = N + E'$, on a $\lambda(p) = (q, \lambda(p')) \in E^{n-1}$, ce qui achève la démonstration.

LEMME 2.4. *Si un champ de Killing u est orthogonal à une géodésique γ en un point, alors u l'est en chaque point de γ.*

En effet, soit v le vecteur tangent de γ; le produit intérieur $u^i v_i$ est constant sur γ (Voir théorème 1.1, Yano [8]).

LEMME 2.5. (*il s'agit des propriétés locales*). *Si un groupe local G d'isométries d'un espace riemannien M est un orthosupplément d'une sous-variété B, alors M est le produit direct $B \times G(p)$, p étant un point quelconque de B, et chaque sous-variété $B \times \{x\} \subset B \times G(p)$ est totalement géodésique.* (*Voir Yano* [7]).

Visiblement M est le produit direct de B et de $G(p)$. G est un orthosupplément de $B \times \{x\}$. D'après le lemme 2.4, si une géodésique γ est orthogonal à $G(q)$ en un point $q \in \gamma$, alors γ est orthogonal à $G(q')$ en tout point $q' \in \gamma$, d'où toute sous-variété $B \times \{x\}$ est totalement géodésique.

LEMME 2.6. (*Il s'agit des propriétés locales*). *Avec les hypothèses du lemme précédent, désignons par π la projection canonique de M sur B qui applique $q \in M$ en un point $\pi(q)$ dans $G(q) \cap B$. Alors toute courbe α dans M a la longueur qui égale ou dépasse celle de la courbe $\pi \circ \alpha$ projetée dans B.*

En vertu du lemme 2.5, il existe un système des coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$ de M tel que 1) B est donnée par $x^1 = \ldots = x^m = 0$, et $G(q)$ par $x^{m+1} = \text{const.}, \ldots, x^n = \text{const.}$, 2) $g^B_{ij} = g_{ij}$ sur B $(i, j \leqq m)$, où g^B_{ij} et g_{ij} sont les composantes des tenseurs métriques de B et de M respectivement, donc 3) $\partial_\gamma g_{ij} = 0$, si $i, j \leqq m < \gamma$, et 4) $g_{i\gamma} = 0$, si $i \leqq m < \gamma$. Il en résulte pour la courbe (différentiable)

$\alpha(x(t))$ et $\pi\circ\alpha\,.\,(y(t))$ ($x^i = y^i$; $1 \leqq i \leqq m$),

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} g_{\lambda\mu}(x)dx^\lambda dx^\mu \geqq \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(x)dx^i dx^j = \sum_{\lambda\mu=1}^{n} g^B_{ij}(y)dy^i dy^j.$$

ce qui achève la démonstration.

LEMME 2.7. *Si un groupe G d'isométries est orthogonal à une hypersurface complète B dans M, alors, sur quelque voisinage V de B dans M, G ne fixe que des points de B.*

Vu les lemmes 2.5 et 2.2, B est totalement géodésique. Soit p un point quelconque de B. Dans un voisinage connexe et convexe $U_p \subset M$ de p, il existe $q \in U_p \cap B$ que G ne fixe pas à cause du lemme 2.2. Si G fixe un point $r \in U_p$, on joint r à q par une géodésique γ dans U_p. En raison du lemme 2.4, G est orthogonal à γ, ce qui entraîne que γ est localement contenu dans B. Comme B est complète, B contient γ tout entière, en particulier r appartient à B. En posant $V = \bigcup_{p\in B} U_p$, on établit le lemme.

LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1. En appliquant les lemmes 2.2 et 2.4, on obtient (2). A un $p \in B$ que G ne fixe pas (l'existence d'un tel point est assuré par le lemme 2.2), le sous-groupe d'isotropie G_p laisse invariante l'orbite $G(p)$, donc le vecteur normal de B à p, aussi l'hypersurface totalement géodésique B. Comme G_p est normal à B grâce au lemme 2.4, il en résulte que G_p est discret, ce qui montre (4). D'après le lemme 2.5, chaque point $p \in B$ que G ne fixe pas possède un voisinage contenu dans $G(B)$. Si G fixe le point $p \in B$, G induit un groupe des rotations G' sur l'espace tangent T de M à p. Vu le lemme 2.7, chaque géodésique qui départ de p et se détache de B n'est pas G-invariante, d'où chaque vecteur à p qui n'est pas tangent à B n'est pas G'-invariant. Il existe un difféomorphisme ϕ (un système des coordonnées normales) d'un voisinage $U \subset T$ de p sur un voisinage $V \subset M$ de p qui induit un isomorphisme de G' sur G et qui applique toute géodésique ($\ni p$) de U en une géodésique de V. Donc $\phi^{-1}(V \cap B)$ est un ouvert d'un hyperplan $E^{n-1} \subset T$. Maintenant on voit que toutes les conditions du lemme 2.3 sont satisfaites pour $T = E^n$ et G'. Par conséquent $G(B)$ contient un voisinage $\subset M$ de p, et on en conclut que $G(B)$ est ouvert.

Soit $\gamma : [0,1[\to G(B)$ une géodésique à longueur finie. Du lemme 2.6, il résulte immédiatement que B contient une courbe $\bar\gamma$ tel que $\bar\gamma(t)$ appartient à l'orbite $G(\gamma(t))$ pour tout $t \in [0, 1[$ et que la longueur de $\bar\gamma$ ne dépasse pas celle de γ. Comme B est complète et $\bar\gamma$ a la longueur finie, le domaine de définition de $\bar\gamma$ peut être étendu à $[0,1]$, et l'on obtient ainsi une courbe γ'. Puisque $G(B)$ est ouverte et $\gamma'([0,1])$ est compact, il existe un nombre positif ν tel que p appartient à $G(B)$, si on a $d(p,q) \leqq \nu$ pour la paire $(p,q) \in M \times \gamma'$ $([0,1])$. Choisissons un point $\gamma(t_0)$ tel que

$$\sup_{t_0 < \ < 1} d(\gamma(t_0),\ \gamma(t)) < \nu.$$

Alors l'isométrie $\lambda \in G$ qui applique $\gamma(t_0)$ en $\bar\gamma(t_0)$ envoie $\gamma([t_0,1])$ dans le ν-

voisinage $\{p \in M; d(p, q) \leqq \nu\}$ d'un point $q \in \gamma([0, 1[)$. (Voir le lemme 2.6). Donc la limite $\lim_{t\to 1} \lambda\circ\gamma(t)$ existe, et $\lambda^{-1} \lim_{t\to 1} \lambda\circ\gamma(t) = \lim_{t\to 1} \gamma(t)$, ce qui montre que $G(B)$ est complète, d'après le théorème de Hopf-Rinow. Or elle est ouverte, il s'ensuit que $M = G(B)$ et M est complet, ce qui achève la démonstration du théorème 2.1.

Le lemme suivant unpublié dû à Tsunero Takahashi a permis à l'auteur d'améliorer la démonstration du théorème 3.1.

LEMME 2.8. *Soit B une sous-variété totalement géodésique d'un espace riemannien M. Si u est un champ de Killing sur M, la projection v de u sur B est un champ de Killing sur B, où v est la projection dans le sens que, pour $p \in B$, en envisageant $v(p)$ comme un vecteur tangent de M, $u(p) - v(p)$ est orthogonal à B.*

On peut prouver ce lemme facilement au moyen du système des coordonnées dans la démonstration du lemme 2.6.

3. Le second théorème et la réciproque. Dans le théorème suivant, la dimension de la sous-variété n'est pas nécessairement égale à dim $M - 1$.

THÉORÈME 3.1. *Soient M un espace riemannien, B' une sous-variété connexe de M, et G un groupe connexe d'isométries de M qui est un orthosupplément de B'. Alors* (1) *il existe la sous-variété B maximale connexe et totalement géodésique qui contient B' comme un ouvert. Si en outre* (*a*) *B est régulièrement plongée dans M,* (*b*) *l'ensemble $G(B')$ coïncide avec M, alors*: (2) *le sous-groupe H maximal de G qui laisse B invariante est fermé dans G, et* (3) *M a la structure d'espace fibré $(M, G/H, B)$ de base G/H et de fibre B qui est associé à l'espace fibré principal $(G, G/H, H)$.*

D'après le lemme 2.5, B' est totalement géodésique, d'où résulte l'existence (1) de B. G est orthogonal à B, car G est un *orthosupplément* d'un ouvert B' de B et, si la projection v sur B d'un champ u de Killing sur M s'annule dans un ouvert de B, v s'annule sur B à cause des lemmes 2.8 et 2.2.

En vertu de (b) et de (1), il en résulte que (4) *G est un orthosupplément de B*. On a naturellement $G(B) = M$. D'après le lemme 2.5, il en résulte que (5) *pour tout $p \in M$, il existe un difféomorphisme ϕ de $U \times V \subset G \times B$ sur $W \subset M$ qui applique (λ, x) en $\lambda\mu(x)$, où μ est un élément de G tel que* $\mu^{-1}(p) \in B$, U est un voisinage de l'identité e de G, V celui de $\mu^{-1}(p)$ dans B, et W celui de p dans M.

On va démontrer que B est fermée. Soit p un point d'adhérence de B. Dans les notations ci-dessus, chaque composante connexe de $B \cap W$ est fermée dans W, car B est la sous-variété maximale jouissant des propriétés de (1). Si p n'appartient pas à B, il existe donc des composantes connexes de $B \cap W$ en nombre dénombrable, que l'on note $B_1, B_2, \ldots$. Grâce à (5), il existe $\lambda_n \in U$ tel que $B_n = \lambda_n\mu(V)$, et l'on peut supposer que la suite $\{\lambda_n\}$ ($\lambda_m \neq \lambda_n$ si $m \neq n$) converge vers e, on déduit que B n'est pas localement connexe dans la topologie induite, contrairement à l'hypothèse (a). Donc $p \in B$, d'où B est fermée, ce qui entraîne que H est fermé. (On sait en effet que la topologie du groupe G des transformations isométrique de Lie sur une variété métrique M est plus fine que la topologie de la convergence compacte, en anglais *the compact-open topology*, qui coïncide avec la topologie de la convergence simple. Voir [2] ou [1]).

G est donc muni d'une structure d'espace fibré principal $(G, G/H, H)$. Considérons une application β de $G \times B$ dans M qui applique (λ, x) en $\lambda(x)$. β est sur, car on a $G(B) = M$.

En définissant l'opération de $\eta \in H$ sur $G \times B$ par $\eta(\lambda, x) = (\lambda\eta^{-1}, \ \eta(x))$, on envisage H comme un groupe des transformations de $G \times B$. On va prouver que M est homéomorphe à l'espace $(G \times B)/H$ des classes d'intransitivité de H, ce qui établira l'assertion (3) (Voir [5] p. 33).

Démontrons d'abord que l'image réciproque par β d'un point de M est une classe d'intransitivité $\subset G \times B$, c'est-à-dire que deux éléments (λ, x)et (μ, y) de $G \times B$ sont appliqués en un même point de M si et seulement s'il existe $\eta \in H$ tel que $\lambda = \mu\eta$ et $\eta(x) = y$. La réciproque étant claire, on n'a qu'à vérifier que $\lambda(x) = \mu(y)$ entraîne l'existence de η ci-dessus. Sous cette hypothèse, $\mu^{-1} \lambda(B) \cap B$ n'est pas vide. En utilisant (1) et (4), on en tire que G est un orthosupplément de $\mu^{-1} \lambda(B)$, et, par suite, $\mu^{-1} \lambda(B) = B$, d'où $\eta = \mu^{-1} \lambda \in H$, aussi $\lambda = \mu\eta$ et $\eta(x) = y$. En vertu de (5), β est ouverte. Comme β est continue, on est donc ramené à voir que M est homéomorphe à $(G \times B)/H$.

COROLLAIRE 3.2. *Si en outre B est une hypersurface, alors* (6) *H est discret et cyclique, et* (7) *le revêtement universel de M est le produit direct d'une hypersurface et d'une droite.*

En effet H est alors un groupe fermé ($\neq G$) d'un groupe G à un paramètre, et la projection de l'espace fibré M sur la base G/H induit un homomorphisme du groupe fondamental $\pi_1(M)$ *sur* $\pi_1(G/H)$.

COROLLAIRE 3.3. *Si un groupe connexe G d'isométries d'un espace riemannien M est un orthosupplément d'une hypersurface connexe et complète B qui est régulièrement plongée dans M, alors les conclusions du théorème* 3.1 *et du corollaire* 3.2 *subsistent.*

COROLLAIRE 3.4. *En conservant les hypothèses du corollaire précédent sauf que G soit un orthosupplément de B, supposons que G est orthogonal à B. Alors il existe une sous-variété fermée N à dimension $< \dim M - 1$ tel que $M' = M - N$ a une structure d'un espace fibré $(M', G/H, B - N)$.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 2.2 et du corollaire 3.3.

K. Yano a considéré l'hypersurface B qui est la frontière d'un ouvert connexe relativement compact N et à laquelle un groupe d'isométries G est orthogonal. Maintenant nous pouvons savoir quelques détails sur la topologie de B et de N;

THÉORÈME 3.5. *Soit N un ouvert connexe d'un espace riemannien M, dont la frontière B est une hypersurface compacte. On suppose qu'il existe un groupe G*

d'isométries orthogonal à B. Alors 1) *dans le cas où G n'est pas orthosupplément de B, i. e. G fixe au moins un point de B, M est compact, B étant connexe,* 2) *dans le cas contraire, M est complet; l'ouvert N est homéomorphe au produit topologique d'une composante connexe de B et de l'intervalle* $[0, 1]$; *B a au plus deux composantes connexes; elle en a une, si et seulement si N n'est pas relativement compact ou $M = N \cup B$.*

DÉMONSTRATION. Soit B_0 une composante connexe quelconque de B. Comme B_0 est compacte, B_0 est complète. Il en résulte que, d'après le théorème 2.1, M est complet, M égale $G(B_0)$, et B est totalement géodésique. Il en résulte que, pour deux composantes connexes B_0 et B_0' de B, il existe $\lambda \in G$ tel que $\lambda(B_0) \cap B_0'$ n'est pas vide, donc que $\lambda(B_0) = B_0'$. Dans le cas 1), on note p un point fixe de M pour G. On suppose que $p \in B_0$. Soit $\{p_n\}$ une suite arbitraire infinie des points de M, alors il existe $\lambda_n \in G$ tel que $\lambda_n(p_n) = q_n$ appartient à B_0. Comme B_0 est compacte, on peut supposer que $\{q_n\}$ est convergente. Or la distance $d(p, p_n)$ égale $d(\lambda_n(p), \lambda_n(p_n)) = d(p, q_n)$, il s'en suit que $\{p_n\}$ est bornée, d'où $\{p_n\}$ a un point d'adhérence, car M est complet. Donc M est compact. Soit $\lambda(B_0)$ une composante connexe arbitraire de B. Le point fixe $p = \lambda(p)$ appartient à $\lambda(B_0)$, d'où $B_0 \cap \lambda(B_0)$ n'est pas vide, ce qui montre que B est connexe. Comme B_0 est compacte, B_0 est régulièrement plongée dans M et complète; par suite, le théorème 3.1 est appliquable dans le cas 2). On est ramené donc à voir que M a une structure d'espace fibré à fibre B_0 et associée à l'espace fibré principal $(G, G/H, H)$ où H est un sous-groupe discret. Soit π la projection de l'espace fibré M sur la base G/H. On vérifie immédiatement que $B = \pi^{-1} \circ \pi(B)$ et $N = \pi^{-1} \circ \pi(N)$, d'où en particulier B a le même nombre de composantes connexes que $\pi(B)$. $\pi(N)$ est un sous-ensemble propre ouvert et connexe de la variété $G/H = \pi(M)$ connexe à une dimension. Donc $\pi(N)$ est homéomorphe à un intervalle ouvert, ce qui entraîne que $N = \pi^{-1} \circ \pi(N)$ est homéomorphe à $B_0 \times]0, 1[$, et que B a au plus deux composantes. B en a une si et seulement si $\pi(N)$ n'est pas relativement compact ou $\pi(M) = \pi(N) \cup \pi(B)$. (La compacité relative de $\pi(N)$ et celle de N sont équivalentes.)

THÉORÈME 3.6. *Soient B un espace riemannien, et H un groupe cyclique d'isométries de B. G désignera un groupe connexe de Lie à une dimension dont H est un sous-groupe fermé. Notons M l'espace fibré à fibre B associé à l'espace fibré principal $(G, G/H, H)$. Alors;* 1) *il existe une métrique riemannienne sur M telle que G est un orthosupplément de B envisagé comme un sous-espace de M,* 2) *à cette métrique de M correspond biunivoquement une fonction à valeur strictement positive sur B que H laisse invariante.*

Donné un groupe cyclique H, il existe bien un groupe G qui jouit des propriétés énoncées en haut. On désigne par u la transformation infinitésimale de G. Soit L une fonction > 0 sur B invariante par H (Choisir, par exemple, $L = 1$ sur B). (L est dite invariante par H, quand on a $L \circ \lambda = L$ pour tout $\lambda \in H$.) Alors une métrique riemannienne de M est uniquement déterminée par les conditions: (1) l'injection de B dans M conserve la métrique riemannienne, (2) $u(p)$ a la longueur $L(p)$ pour un point quelconque p de B, (3) $u(p)$ est orthogonal à B pour un point quelconque p de B.

Inversement d'une métrique riemannienne sur M du théorème on détermine une fonction L de 2) sous la condition (2).

REMARQUE. u est parallèle par rapport à la métrique définie par $L\equiv 1$.

4. Le groupe d'isométries. Si une variété (riemannienne) M est compacte, tout champ u des vecteurs sur M est complet, i.e. il engendre un groupe global G à un paramètre. Donné une sous-variété B de M, on désigne par $H, I(M), L$ et $I(B, H, L)$, le sous-groupe de G qui laisse B invariant, le groupe maximal connexe d'isométries de M, une fonction sur B qui fait correspondre la longueur de $u(x)$ à tout $x \in B$, et le groupe maximal connexe d'isométries de B qui laissent L et commutent avec toutes les transformations dans H envisagées comme celles de B. Alors on a le

THÉORÈME 4.1. *Soient M un espace riemannien compact, B une hypersurface connexe et compacte, et G un groupe d'isométries qui est un orthosupplément de B. Alors, dans les notations ci-dessus, (A) $I(M)$ est localement isomorphe à $G \times I(B, H, L)$, (B) u est un champ des vecteurs parallèles dans l'orbite $I(M)$ (p) de $p \in M$. (C) $I(M)$ est isomorphe à $G/H \times I_B(M)$; $I_B(M)$ sera défini devant le lemme 4.5.*

Le théorème est une conséquence des lemmes suivants, dans lesquelles on conservera les hypothèses du théorème. D'abord on note que l'on peut supposer sans déranger la généralité que B est connexe et qu'on peut appliquer les théorèmes 2.1 et 3.1 à M.

LEMME 4.2. *Le champ des vecteurs $v_i = u_i/(u_a u^a)$ est harmonique, c'est-à-dire on a*

$$(1)\quad \nabla_j v_i = \nabla_i v_j \qquad et \qquad (2)\quad \nabla_a v^a = 0.$$

Du fait que u est un champ de Killing, on obtient

$$\nabla_a v^a = (\nabla_a u^a)/(u^b u_b) - u^a \nabla_a (u^b u_b)/(u^i u_i)^2 = 0.$$

Soit $\lambda(t)$ la transformation dans G qui correspond à la valeur t du paramètre canonique. Si on applique chaque $x \in M$ en le nombre réel t tel que x appartient à $\lambda(t)(B)$. Alors t est une fonction différentiable locale, (en effet $t(x)$ est défini à un constant additif près,) mais la différentielle dt est une forme globale. On voit aisément que dt n'est autre que v_i, d'où (1).

REMARQUE. Dans cette démonstration on ne s'est pas servi de la compacité de M. Par suite, si en outre la base de l'espace fibré M est un tore, le premier groupe de de Rham $H^1(M)$ ne réduit pas à 0. Si la base n'est pas un tore, M est homéomorphe au produit topologique de B et d'une droite.

LEMME 4.3. *u appartient au centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $I(M)$, i.e. $I(M)$ laisse u invariant.*

On peut supposer que M est orientable. Il est bien connu qu'une forme harmonique est alors invariante par $I(M)$ [9]. Donc d'après le lemme 4.2,

u est la base d'un idéal de $\mathfrak{g}$. Comme M est compact, $I(M)$ l'est aussi ([4]). Il en résulte que u appartient au centre de $\mathfrak{g}$.

LEMME 4.4. *Si une isométrie μ dans $I(M)$ jouit de la propriété que $\mu(B) \cap B$ n'est pas vide, alors $\mu(B)$ coïncide avec B tout entier.*

En effet μ applique une fibre quelconque en une autre, puisque G est un orthosupplément d'une hypersurface complète et connexe B et u qui engendre G est invariant par μ d'après le lemme précédent.

Notons $I_B(M)$ le sous-group maximal de $I(M)$ qui laisse B invariante.

LEMME 4.5. *En appliquant chaque paire $(\lambda, \mu) \in G \times I_B(M)$ en $\lambda\mu \in I(M)$, on obtient un homomorphisme ϕ sur, dont le noyau est isomorphe à H. Donc $G/H \times I_B(M)$ est isomorphe à $I(M)$.*

D'après le lemme 4.3, ϕ est un homomorphisme. Pour tout $\alpha \in I(M)$ et un point $p \in B$, il existe une $\lambda \in G$ telle qu'on a $\lambda^{-1}\alpha(p) \in B$, à cause du théorème 2.1. En vertu du lemme 2.4, $\lambda^{-1}\alpha$ appartient à $I_B(M)$, et par conséquent ϕ est sur. Si $\phi(\lambda, \mu)$ est l'identité, on a $\lambda = \mu^{-1} \in G \cap I_B(M) = H$. Inversement, pour $\eta \in H$, η^{-1} appartient à $I(M)$, donc à $I_B(M)$. Autrement dit, (η, η^{-1}) appartient à $G \times I_B(M)$ et visiblement au noyau de ϕ.

LEMME 4.6. *$I(B, H, L)$ est isomorphe à la composante connexe de l'identité de $I_B(M)$.*

Soit λ un élément quelconque de $I_B(M)$. Alors la restriction de λ à B définit une isométrie $\beta(\lambda)$ de B. On obtient ainsi un homomorphisme β de $I_B(M)$ dans le groupe d'isométries de B. Compte tenu du lemme 2.2′, on vérifie que β est un isomorphisme dans, ou bien β a le noyau d'ordre 2. Dans le dernier cas on remarque que le noyau n'est pas contenu dans la composante connexe $I_B(M)$ de l identité de $I(M)$; car, du fait que G est un orthosupplément de B, on voit que B est bilatérale, d'où la reflexion par rapport à B n'appartient pas à $I_B^0(M)$. Comme G est contenu dans le centre de $I(M)$ (lemme 4.3), $I_B^0(M)$ est appliquée dans $I(B, H, L)$ par β. On n'a qu'à prouver que l'homomorphisme $d\beta$ de l'algèbre de Lie induit de β est sur. Soit $\hat{w}$ un champ quelconque des vecteurs de B contenu dans l'algèbre de Lie de $I(B, H, L)$. Puisque $\hat{w}$ est invariant par $\beta(H)$, il existe uniquement un champ des vecteurs w sur M satisfaisant aux conditions : 1) w s'identifie à $\hat{w}$ sur B, et 2) w est invariant par G. Il résulte de là que w laisse invariant (i.e. w est tangent à) chaque fibre B_x, et w est un champ de Killing sur B_x. Par ailleurs w conserve la longueur de u, en raison de l'invariance de L par $I(B, H, L)$. Vu la condition 1) et le fait que G est un orthosupplément de B_x, on en déduit que w est un champ de Killing, qui est complet, car M est compact. On a $d\beta(w) = \hat{w}$.

LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.1. (A) et (C) résultent du lemme 4.5 et du lemme 4.6 immédiatement. On prouve (B) d'abord dans le cas où $I(M)$ est transitif. Comme $I(M)$ laisse u invariant, la longueur de u est constante sur M, d'où toutes les trajectoires de u sont géodésiques. Or elles sont normales aux fibres totalement géodésiques, ce qui entraîne que u est parallèle. Dans le cas général on peut appliquer à chaque orbite $I(M)(q)$ ce qu'on vient d'établir, car $I(M)(q)$ est aussi compact.

COROLLAIRE 4.7. *Si M est un espace riemannien homogène et compact, et si un groupe connexe d'isométries G est un orthosupplément d'une hypersurface* B *connexe compacte, alors M est localement le produit riemannien de B et de $G(p)$ $(p \in B)$, et $I(M)$ est localement le produit de G et du groupe d'isométries de B qui commutent avec H, où H est le sous-groupe de G qui laisse B invariante.*

REMARQUE. Le lemme 4.6 reste valable quand on suppose que B est complète et régulièrement plongée dans M, au lieu de la compacité de B et de M. Pour la démonstration on a besoin de la proposition suivante: sur un espace riemannien complet tout champ de Killing est complet. On trouvera la démonstration dans un autre mémoir [10]. S. Kobayashi a établit un théorème plus général [6].

Nous appelerons *la décomposition de de Rham* la décomposition en somme directe de l'espace tangent $T(x)$ d'un espace riemannien M en $x \in M$:

$$\text{(D)} \qquad T(x) = T_0(x) + T_1(x) + \dots + T_m(x),$$

si (1) le groupe homogène d'holonomie Ψ laisse $T_\alpha(x)$ invariant $(0 \leqq \alpha \leqq m)$, (2) le groupe homogène restreint d'holonomie σ est trivial sur $T_0(x)$, (3) σ ne fixe aucun vecteur $(\neq 0)$ de $T_\beta(x)$ $(0 < \beta)$ et (4) Ψ est irréductible sur $T_\beta(x)$ $(0 < \beta)$. Cette décomposition est toujours possible.

K. Yano et l'auteur ont établit le théorème suivant [10]:

THÉORÈME Y. *Soit (D) la décomposition de de Rham d'uu espace riemannien connexe M, et soit M_α une sous-variété intégrale de la distribution: $x \to T_\alpha(x)$ $(0 \leqq \alpha \leqq m)$. Si M est complet, l'algèbre de Lie $I^L(M)$ du groupe d'isométries $I(M)$ est la somme directe:*

$$I^L(M) = I_0^L(M) + \dots + I_m^L(M),$$

où $I_\alpha^L(M)$ est la sous-algèbre maximale qui laisse M_α invariante.

THÉORÈME 4.8. *Soient M un espace riemannien, B une hypersurface connexe complète et régulièrement plongée dans M, et G un groupe d'isométries de M qui est un orthosupplément de B. Si la longueur du champ u des vecteurs qui engendre G est constante sur M, et si le groupe homogène restreint d'holonomie σ fixe une direction au plus, alors les conclusions du théorème* 4.1 *subsistent encore.*

Par hypothèse, les trajectoires de u sont des géodésiques. En appliquant les théorèmes 2.1 et 3.1, on en déduit que M est couvert d'une famille des hypersurfaces totalement géodésiques et d'une famille des géodésiques orthogonales aux hypersurfaces, d'où (B). Donc u donne la seule direction invariante par σ et Ψ. En appliquant le théorème Y, on voit que u appartient au centre de l'algèbre de Lie de $I(M)$. Par conséquent on a $I(M) = G \cdot I_B(M,)$

d'où (C). Compte tenu de la remarque au-dessus du théorème Y, on en conclut (A).

AJOUTÉ EN ÉPREUVE. Prof. S. Itô et S. Takenouchi ont établit le lemme 2.3 sans l'hypothèse (1) dans le cas où la groupe d'isométries G n'est pas nécessairement un groupe des rotations, au moyen de la théorie des fonctions presque-périodiques.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] R. ARENS, Topologies for homeomorphism groups. Amer. J. Math. 68(1946) 595-610.

[2] N. BOURBAKI, Topologie générale, chap. X, Actualités Sci. et Ind. n° 1084 Paris, 1949.

[3] S. S. CHERN, Lecture note on differential geometry, 1952.

[4] D. VAN DANTZIG UND B. L. VAN DER WAERDEN, Über metrisch homogene Räume, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ., 6(1928) 367-376.

[5] C. EHRESMANN, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de topologie (espaces fibrés). 1951.

[6] S. KOBAYASHI, Espaces à connexion de Cartan complets, Proc. Jap, Acad. 30 (1954) 709-710.

[7] K. YANO, Harmonic and Killing vectors in compact orientable Riemannian spaces with boundary, à apparaître dans Ann. of Math.

[8] K. YANO, The theory of Lie derivatives and its applications, Amsterdam 1957.

[9] K. YANO AND S. BOCHNER, Curvature and Betti numbers, Ann. of Math. Studies, 32(1953).

[10] K. YANO AND T. NAGANO, The de Rham decomposition isometries and affine transformations in a Riemannian space, à apparaître.

L'UNIVERSITÉ DE TOKIO