UNE GÉNÉRALISATION DU CALCUL DES JETS ET QUELQUES PROLONGEMENTS GÉNÉRALISÉS DE VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

MICHIAKI KAWAGUCHI

(Received May 20, 1960)
(Revised January 30, 1961)

Introduction. Le mot "calcul des jets" a fait son début dans l'article [1][1] de Ch. Ehresmann. En 1951, Ch. Ehresmann s'est intéressé surtout aux fondements de la géométrie différentielle. Il a défini d'une façon générale les éléments infinitésimaux et les structures infinitésimales qui forment l'objet de la géométrie différentielle. La notion fondamentale est celle de jets d'ordre r d'une variété différentiable V_n dans une autre V_m(Voir Ch. Ehresmann [1], [2], [3], [8]). La notion de jet donne en particulier celle de vitesse d'ordre r, d'élément de contact d'ordre r et celle de repère d'ordre r. ([1], [2], [6], [8]). L'ensemble des repères d'ordre r de V_n forme le prolongement principal $H^r(V_n)$ de V_n. On appelle prolongement d'ordre r de V_n tout espace fibré associé à $H^r(V_n)$ ([1], [3], [8]). Ces espaces admettent en effet une structure plus précise qu'une structure fibrée, et on l'appelle structure de prolongement. Leurs éléments sont les éléments infinitésimaux d'ordre r. Il a étudié l'espace $J^r(V_n,V_m)$ des jets d'ordre r de V_n dans V_m et un sous-espace de cet espace peut être considéré comme un système différentiel général pour lequel il a défini aussi la notion de prolongement. Ceci l'a conduit à définir la notion de jet non holonome ([9], [11]) et à y étendre le calcul des jets. On est conduit à une définition plus générale de la notion de prolongement de V_n: c'est celle de prolongement associé à un groupoïde de jets inversibles de V_n dans V_n([12]). Pour ces prolongements, on peut définir la notion de covariant différentiel ([7]). La théorie des jets non holonomes permet en particulier de faire la théorie des connexions infinitésimales d'ordre r ([13]).

D'autre part, H.V.Craig ([1] $\sim$ [3]) a traité presque le même objet géométrique avant les études de Ehresmann. En utilisant des coordonnées canoniques, il a considéré le changement d'expoints qui est une généralisation de celui de points, et il l'a déformé de telle sorte que ce changement soit linéaire par rapport aux expoints. Il a défini les extenseurs et a discuté son calcul.[2] D'ailleurs, A. Kawaguchi ([1], [3], [5], [7], [8]) a créé l'espace de Kawaguchi dont la

1) Les nombres entre crochets renvoient aux références à la fin de cet article.
2) Voir M. Kawaguchi [5], §2, §3.

notion correspond à celle de prolongements, en utilisant ce calcul d'extenseurs. Et il ([2], [4], [6]) a aussi développé ce calcul et plusieurs mathématiciens ont fait les travaux concernant ce calcul et cet espace.

Néanmoins, récemment, A.Kawaguchi ([10] ~ [13]) a commencé à traiter les changements non linéaires d'expoints sans rien déformer et il a défini les connexions non linéaires. Séparément, V. V. Vagner ([1], [2]) a fait les travaux concernant presque les mêmes objets géométriques à son point de vue.

Dans cet exposé nous avons l'intention de généraliser les théories de jets et de prolongements de variété V_n. Les paragraphes §1, §2, §3 sont d'abord consacrés à l'introduction de jets définis par Ch. Ehresmann lesquelles nous utiliserons dans les théories commencées depuis §4. A §4, nous définissons un jet infinitésimal entre deux variétés (V_p, V_q) et une variété V_n. Il est une généralisation de jet infinitésimal d'ordre r de V_p dans V_n et aussi de jet non holonome d'ordre r de V_p dans V_n. On l'appelle jet infinitésimal d'ordre (k_1, k_2) dans V_n. Ensuite, à §5, un jet infinitésimal entre deux ensembles de jets infinitésimaux d'ordre r est défini de telle sorte qu'on peut l'utiliser dans la définition de groupe d'isotropie dans la variété de jets d'ordre r à §6. Il existe trois espèces de groupe d'isotropie. Nous considérons à §7 l'ensemble de vitesses définies par le jet à §4. Il est désigné par $T_q^l(T_p^k(V_n))$, sur lequel on peut définir une structure fibrée, appelée prolongement d'ordre $(k; l)$ de V_n, qui est une généralisation de prolongement d'ordre r de V_n. Dans le cas particulier de cette structure, on peut aussi obtenir le prolongement non holonome d'ordre r. Aux paragraphes de §8 à §11, nous dévéloppons la théorie de jets de plusieures variétés dans une variété, c'est-à-dire, de jets d'ordre $(k_1, k_2, \cdots\cdots, k_s)$ et nous pouvons définir les prolongements d'ordre $(k_1, k_2, \cdots\cdots, k_s; l)$ de V_n. À §12 on fait des remarques sur les mêmes théories en cas de jets semi-holonomes d'ordre $(k_1, k_2, \cdots\cdots, k_s)$ et les prolongements parfaits d'ordre $(k_1, ,k_2, \cdots\cdots, k_s; l)$. Ces considérations de jets d'ordre $(k_1, k_2, \cdots\cdots, k_s)$ nous conduisent à une notion nouvelle de jets qui contient tout ensemble celle de jet ordinaire et celle de jet semi-holonome. On l'appelle jet mélangé d'ordre $(k_1, k_2, \cdots\cdots, k_s)$. De même, on peut définir le prolongement mélangé d'ordre $(k_1, k_2, \cdots\cdots, k_s; l)$ et on trouve quelques caractères qui n'existent pas aux autres prolongements de V_n. À la fin, nous ajoutons une définition des connexions d'ordre supérieur des prolongements de V_n. Dans cet exposé, les propositions signifient les caractères concernant le calcul des jets, et les théorèmes expriment les propriétés aux prolongements de V_n.

Dans les articles antérieurs de l'auteur (M. Kawaguchi [1] ~ [4]), en utilisant les changements linéaires d'expoints de Craig, on a traité presques les mêmes objets géométriques. L'extenseur généralisé appelé g-extenseur correspond au jet généralisé dans cet exposé. Mais, essentiellement cela est autre chose.

On peut dire que ce travail a vu le jour grâce à Monsieur Ch. Ehresmann qui m'a invité à Paris et a tout fait pour m'aider à étudier ses théories très profondes pendant deux annèes scolaires. Il n'a cessé de me prodiguer ses encouragements et ses conseils. Je suis heureux de publier ce travail et de pouvoir l'en remercier ici. De plus, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur S.Sasaki dont l'aide pour publier ce travail m'a été très précieuse.

1. Définitions de jet local et de jet infinitésimal. Nous considérons deux espaces topologiques E et E'. Soit f une application continue ayant pour source un voisinage quelconque d'un point x de E et pour but un sous-espace de E'. L'ensemble des applications continues pointées (f, x) de même x sera désigné par $C_x(E,E')$. On peut introduire une relation d'équivalence suivante: deux éléments (f,x) et (f',x) de $C_x(E, E')$ sont de même classe en x lorsque les restrictions f et de f' à un voisinage de x sont identiques. Nous appelons une classe d'équivalence pour cette relation un *jet local de E dans E', de source x et de but f(x)*, oú (f,x) est un élément quelconque de la classe et nous la désignons par $j^\lambda_x f$. Soit $J^\lambda(E, E')$ l'ensemble des jets locaux de E dans E'. La source de $X \in J^\lambda(E, E')$ sera désignée par $\alpha(X)$, son but par $\beta(X)$.

En particulier, prenons deux espaces numériques R_n, R_m au lieu de deux espaces topologiques. Soit f une application continue ayant pour source un voisinage de $x \in R_n$ et pour but un sous-espace de R_m. f sera appelé une application r fois différentiable (ou r-application) au point x lorsque f admet dans un voisinage de x des dérivées partielles continues de chaque espèce jusqu'à l'ordre r, par rapport aux coordonnées canoniques définies dans R_n. Si f est une r-application au point x, le jet local $j^\lambda_x f$ peut s'appeler *r-fois différentiable* et l'ensemble de $j^\lambda_x f$ sera noté $J^{\lambda,r}(R_n, R_m)$.

En vertu de la définition précédente, on peut définir *jet local r fois différentiable entre deux r-variétés* (variétés r fois différentiables). Soit V_n une r-variété qui admet une structure définie par un atlas complet A de R_n sur V_n compatible avec Λ^r_n, le pseudogroupe des automorphismes locaux r fois continument différentiables, partout rang n, de R_n. Soit de même V_m une variété dont la structure est définie par un atlas complet A' compatible avec Λ^r_m de R_m. Soit $J^{\lambda,r}(V_n, V_m)$ l'ensemble des jets locaux $h'Xh^{-1}$, où $h \in J^\lambda(A)$ (l'ensemble des jets locaux $j^\lambda_x g$ où $g \in A$), $h' \in J^\lambda(A')$, $X \in J^{\lambda,r}(R_n, R_m)$; c'est-à-dire, h est un *repère local* de V_n à la source de X, h' est un repère local de V_m au but de X. Un jet local qui est un élément de $J^{\lambda,r}(V_n, V_m)$ sera dit r fois différentiable. Si $j^\lambda_x f$ est r fois différentiable, l'application f sera appelée r-application au point x.

Un jet infinitésimal sera défini entre deux r-variétés ou deux espaces numériques. Nous énonçons d'abord celui entre deux espaces numériques R_n, R_m. Par $C_x^r(R_n, R_m)$ on désigne l'ensemble des r-applications pointées (f, x) où f est une r-application au point $x \in R_n$ dans R_m. Considérons une classe d'équivalence suivante : deux éléments (f, x) et (f', x) de $C_x^r(R_n, R_m)$ sont dits de même r-classe lorsque les dérivées partielles de même espèce de f et de f' admettent les mêmes valeurs au point x, pour toutes les dérivées partielles d'ordre $\leqq r$. Une classe d'équivalence pour cette relation sera appelée *jet infinitésimal (holonome) d'ordre r, ou r-jet, de R_n dans R_m*. Le r-jet de (f, x) sera noté $j_x^r f$. Le point x sera appelé *source du jet* et le point $f(x)$ *but du jet*. Soit $J^r(R_n, R_m)$ l'ensemble des jets infinitésimaux d'ordre r de R_n dans R_m. Nous pouvons définir deux applications canoniques α et β de $J^r(R_n, R_m)$ sur R_n et R_m comme suit:

$$\alpha(j_x^r f) = x, \qquad \beta(j_x^r f) = f(x).$$

Ensuite, nous définissons un jet infinitésimal entre deux r-variétés V_n, V_m. Nous pouvons introduire la relation d'équivalence suivante dans $C_x^r(V_n, V_m)$, l'ensemble des r-applications pointées de V_n dans V_m au point x de V_n: deux éléments (f, x) et (f', x) de $C_x^r(V_n, V_m)$ seront dits de même r-classe lorsque nous avons la relation

$$j^r(h'^{-1} f h) = j^r(h'^{-1} f' h),$$

où h est un repère local admissible de V_n au point x et h' celui de V_m au point $f(x)$, $f(x) = f'(x)$. Une classe d'équivalence de $C_x^r(V_n, V_m)$ pour cette relation sera appelée *jet infinitésimal d'ordre r* ou *r-jet de V_n dans V_m*. Le r-jet de (f, x) est noté $j_x^r f$. L'ensemble des r-jets de V_n dans V_m est désigné par $J^r(V_n, V_m)$. On peut définir les applications canoniques $\alpha(j_x^r f) = x$, $\beta(j_x^r f) = f(x)$, de $J^r(V_n, V_m)$ sur V_n et sur V_m. Le point x est appelé *source du jet* et le point $f(x)$ *but du jet*.

Soit L_{mn}^r l'ensemble des éléments de $J^r(R_n, R_m)$ dont la source et le but sont l'origine commune O de R_n et de R_m. Etant données (u^i) les coordonnées canoniques dans R_n et (u^j) celles dans R_m, tout $X \in L_{mn}^r$ est le r-jet de source O d'une application bien déterminée de la forme

$$u^j = a_{i_1}^j u^{i_1} + \frac{1}{2!} a_{i_1 i_2}^j u^{i_1} u^{i_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{r!} a_{i_1 \ldots\ldots i_r}^j u^{i_1} \cdots\cdots u^{i_r}, \tag{1.1}$$

où les coefficients $a_{i_1}^j, a_{i_1 i_2}^j, \ldots\ldots, a_{i_1 \ldots i_r}^j$ sont symétriques par rapport aux indices inférieurs. Les coefficients seront considérés comme les coordonnées canoniques de X et ce système de coordonnées détermine sur L_{mn}^r une structure de variété analytique réelle, et (1.1) est appelé *représentant tensoriel de* $X \in L_{mn}^r$. Nous appelons *rang de* X le rang de la matrice (a_i^j).

2. Groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre r de variété V_n et prolongements d'ordre r de V_n. *p^r-vitesse dans V_n d'origine x* est un élément de $J^r(R_p, V_n)$ de source O et de but x et $T_p^r(V_n)$ exprime l'ensemble de ces p^r-vitesses dans V_n. Un élément de $J^r(V_n, R_p)$ de source x et de but O est appelé p^r-covitesse de V_n d'origine x et $T^{*r}_p(V_n)$ désigne l'ensemble de ces p^r-covitesses de V_n. Appelons *repère d'ordre r de V_n* une n^r-vitesse de rang n de V_n. L'ensemble $H^r(V_n)$ de ces repères d'ordre r sera appelé *prolongement principal d'ordre r de V_n*. Une n^r-covitesse de rang n de V_n est appelé *corepère d'ordre r de V_n*. Il est clair que chaque corepère est l'inverse d'un repère. $\Pi^r(V_n)$ désigne l'ensemble des éléments inversibles (de rang n) de $J^r(V_n,V_n)$. Le sous-ensemble de $\Pi^r(V_n)$ dont la source et le but sont un point commun $x \in V_n$ est appelé *groupe d'isotropie infinitésimale en x d'ordre r de V_n*, et il est isomorphe au groupe $L_n^r(R_n, O)$ que nous désignerons par L_n^r.

Un espace fibré associé au prolongement principal $H^r(V_n)$ est appelé *prolongement d'ordre r de V_n*. Lorsque L_n^r est un groupe d'opérateurs sur l'espace F, il existe donc un prolongement de V_n de fibres isomorphes à F, et ce prolongement de symbole $E(V_n, F, L_n^r, H^r(V_n))$ est déterminé à un isomorphisme près. Par exemple, en prenant L_{np}^r pour la fibre F, nous pouvons définir un prolongement d'ordre r de V_n sur $T_p^r(V_n)$,et le symbole de la structure fibrée est désigné par

$$T_p^r(V_n)\,(V_n,\ L_{np}^r,\ L_n^r,\ H^r(V_n)).$$

Ainsi, on peut définir un prolongement d'ordre r de V_n sur $H^r(V_n)$ en prenant L_n^r pour la fibre F. Sa structure fibrée est exprimée par le symbole

$$H^r(V_n)\,(V_n,\ L_n^r,\ L_n^r,\ H'^r(V_n)).$$

3. Jets non holonomes et jets semi-holonomes. Prolongements parfaits d'ordre r de V_n. Nous considérons deux variétés V_n,V_m de classe $\geqq r = k + l$. La variété $J^k(V_n, V_m)$ des jets d'ordre k de V_n dans V_m est de classe $\geqq l$. $\alpha(X)$ désigne la source du jet X et $\beta(X)$ son but. Soit σ un relèvement local d'un ouvert de V_n dans $J^k(V_n, V_m)$. Alors, on peut définir un jet $j_x^l\sigma$ qui s'appelle *jet non holonome de V_n dans V_m* concernant $J^k(V_n, V_m)$. L'ensemble de ces jets est désigné par $\pi^l J^k(V_n, V_m)$. Soit Φ l'ensemble $J^1(V_n, V_m)$. Par récurrence on peut définir $\widetilde{J}^r(V_n, V_m)$, espace des jets *non holonomes généraux d'ordre r de V_n dans V_m*, en posant $\widetilde{\Phi}^0 = \Phi$, $\widetilde{\Phi}^{i+1} = \pi^1\widetilde{\Phi}^i$, $\widetilde{J}^r(V_n, V_m) = \widetilde{\Phi}^r$ $(i = 1,2,\ldots\ldots,r-1)$.

Soit $\overline{\pi}^1\Phi$ l'ensemble des éléments $j_x^1\rho$, où ρ est un relèvement local de V_n dans $\Phi = J^1(V_n, V_m)$ vérifiant la condition supplémentaire $j_x^1(j^{i-1}\circ\rho) = \rho(x)$. Par récurrence on définit encore l'ensemble $\overline{\Phi}^r = \overline{J}^r(V_n, V_m)$ en posant $\overline{\Phi}^1 = \Phi$, $\overline{\Phi}^{i+1} = \overline{\pi}^1\overline{\Phi}^i$, dont les éléments sont appelés *jets semi-holonomes d'ordre r de*

V_n *dans* V_m. $\overline{J}^r(V_n, V_m)$ est un sous-espace de $\widetilde{J}^r(V_n, V_m)$ et il contient $J^r(V_n, V_m)$. Par $\overline{L}^r_{mn}$, nous désignons l'ensemble des jets semi-holonomes d'ordre r de R_n dans R_m, de source O et de but O. Tout élément $y \in \overline{L}^r_{mn}$ admet un représentant tensoriel de la même forme que (1. 1). Mais, les coefficients ne sont pas nécessairement symétriques par rapport aux indices inférieurs.

Un jet semi-holonome $X \in \overline{J}^r(V_n, V_n)$ est inversible si le jet du premier ordre $j^1(X)$ est inversible, c'est-à-dire, X est de rang n. Les éléments inversibles de source et de but $x \in V_n$ forment un groupe $\overline{L}^r_x(V_n)$, isomorphe au groupe $\overline{L}^r_n = \overline{L}^r_n(R_n)$, qui contient L^r_n comme sous-groupe.

De même qu'au paragraphe précédent, nous pouvons définir *l'ensemble* $\overline{T}^r_p(V_n)$ *des vitesses semi-holonomes, l'ensemble* $\overline{T}^{*r}_p(V_n)$ des *covitesses semi-holonomes* et l'ensembles $\overline{H}^r(V_n)$ des *repères semi-holonomes de* V_n. Appelons *prolongement parfait de* V_n tout espace fibré associé à $\overline{H}^r(V_n)$. Sur $\overline{T}^r_p(V_n)$ nous pouvons aussi définir une structure de prolongement de V_n, mais de plus celle de prolongement parfait de V_n, c'est-à-dire, $\overline{T}^r_p(V_n)(V_n, \overline{L}^r_{mn}, L^r_n, H^r(V_n))$ et $\overline{T}^r_p(V_n)(V_n, \overline{L}^r_{mn}, \overline{L}^r_n, \overline{H}^r(V_n))$. Sur $\overline{H}^r(V_n)$, on peut aussi définir less tructures $\overline{H}^r(V_n)(V_n, \overline{L}^r_n, L^r_n, H'^r(V_n))$, $\overline{H}^r(V_n)(V_n, \overline{L}^r_n, \overline{L}^r_n, \overline{H}'^r(V_n))$. Pour qu'un prolongement ordinaire soit parfait, il faut et il suffit que la loi de composition $(s, y) \rightarrow sy$, où $s \in L^r_n$ et $y \in F$, s'étende à $\overline{L}^r_n$.

4. Jets d'ordre (k_1, k_2) de (V_p, V_q) dans V_n. Étant données V_n, V_p, V_q trois variétés de classe $\geqq r$ $(r = k_1 + k_2)$, l'ensemble $J^{k_1}(V_p, V_n)$ des k_1-jets de V_p dans V_n est une variété de classe $\geqq k_2$. Donc nous pouvons considérer un jet entre V_q et $J^{k_1}(V_p, V_n)$.

DÉFINITION. *Lorsque σ est une k_2-application d'un ouvert d'un point $x \in V_q$ dans $J^{k_1}(V_p, V_n)$, le jet $j^{k_2}_x \sigma$ qui appartient à $J^{k_2}(V_q, J^{k_1}(V_p, V_n))$ est appelé jet d'ordre (k_1, k_2) de (V_p, V_q) dans V_n.*

Nous avons immédiatement la

PROPOSITION 4. 1. *Si V_q est identique à V_p et l'application σ est aussi identiquement un relèvement local de V_q dans $J^{k_1}(V_p, V_n)$, on a un jet non holonome d'ordre $k_1 + k_2$ de V_p dans V_n.*

Alors, la notion de jet d'ordre (k_1, k_2) de (V_p, V_q) dans V_n est plus générale que celle de jet non-holonome de V_p dans V_n.

Pour concrétiser cette notion, nous allons donner le représentant tensoriel de ces jets généralisés. D'abord, nous considérons trois espaces numériques R_n, R_p, R_q qui définient V_n, V_p, V_q et sont munis des coordonnées canoniques $(u^i), (x^\alpha), (t^\beta)$, respectivement. De même que nous l'avons déjà énoncé à §1, $L^{k_1}_{np}$

exprime l'ensemble des éléments de $J^{k_1}(R_p, R_n)$ dont la source et le but sont l'origine commune O de R_p et de R_n. Pour tout $X \in L_{np}^{k_1}$ on trouve un représentant tensoriel de la forme

$$u^i = a^i_{\alpha_1} x^{\alpha_1} + \frac{1}{2!} a^i_{\alpha_1\alpha_2} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{k_1!} a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}} x^{\alpha_1} \ldots x^{\alpha_{k_1}}, \tag{4.1}$$

où les coefficients sont symétriques par rapport aux indices inférieurs.

REMARQUE. Désormais, dans les paragraphes de §4 à §11 nous supposons que les coefficients dans les formes tensorielles soient toujours symétriques par rapport aux indices inférieurs, au cas où nous ne faisons aucune remarque spéciale.

DÉFINITION. *Soit $\Phi^{k_2}(R_q, \Phi^{k_1}(R_p, R_n))$ ou simplement $L_{np\,q}^{k_1k_2}$ l'ensemble des éléments de $J^{k_2}(R_q\ J^{k_1}(R_p,R_n))$ dont la source est l'origine O de R_q et le but un élément de $L_{np}^{k_1}$ réalisé par la coordonnée canonique ($O \in R_n$, $O \in R_p$, $a^i_{\alpha_1}$, $a^i_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots\ldots, a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}}$) à l'aide de représentant tensoriel.*

Donc, nous avons la

PROPOSITION 4. 2. *Tout élément $X \in L_{np\,q}^{k_1k_2}$ est le k_2-jet d'une application bien déterminée de la forme*

$$\left\{\begin{aligned}
u^i &= a^i_{\beta_1} t^{\beta_1} + \frac{1}{2!} a^i_{\beta_1\beta_2} t^{\beta_1} t^{\beta_2} + \cdots + \frac{1}{k_2!} a^i_{\beta_1\ldots\beta_{k_2}} t^{\beta_1} \ldots t^{\beta_{k_2}},\\
x^\alpha &= b^\alpha_{\beta_1} t^{\beta_1} + \frac{1}{2!} b^\alpha_{\beta_1\beta_2} t^{\beta_1} t^{\beta_2} + \cdots + \frac{1}{k_2!} b^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_{k_2}} t^{\beta_1} \ldots t^{\beta_{k_2}},\\
u^i_{\alpha_1} &= a^i_{\alpha_1} + a^i_{\alpha_1\beta_1} t^{\beta_1} + \frac{1}{2!} a^i_{\alpha_1\beta_1\beta_2} t^{\beta_1} t^{\beta_2} + \cdots + \frac{1}{k_2!} a^i_{\alpha_1\beta_1\ldots\beta_{k_2}} t^{\beta_1} \ldots t^{\beta_{k_2}},\\
u^i_{\alpha_1\alpha_2} &= a^i_{\alpha_1\alpha_2} + a^i_{\alpha_1\alpha_2\beta_1} t^{\beta_1} + \frac{1}{2!} a^i_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} t^{\beta_1} t^{\beta_2} + \cdots\\
&\quad + \frac{1}{k_2!} a^i_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\ldots\beta_{k_2}} t^{\beta_1} \ldots t^{\beta_{k_2}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u^i_{\alpha_1\cdots\alpha_{k_1}} &= a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}} + a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\beta_1} t^{\beta_1} + \frac{1}{2!} a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\beta_1\beta_2} t^{\beta_1} t^{\beta_2} + \cdots\\
&\quad + \frac{1}{k_2!} a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\beta_1\ldots\beta_{k_2}} t^{\beta_1} \ldots t^{\beta_{k_2}},\\
&(i = 1, 2, \ldots\ldots, n),\ (\alpha = 1, 2, \ldots\ldots, p),\ (\beta = 1, 2, \ldots\ldots, q),
\end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

où nous retrouvons les coefficients $a^i_{\alpha_1}, a^i_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}}$ de la forme (4. 1) *de $X \in L_{np}^{k_1}$.*

On peut trouver les matrices suivantes dont les éléments sont les coefficients de (4. 2):

$$(a^i_{\beta_1}, a^i_{\beta_1\beta_2}, \dots, a^i_{\beta_1\dots\beta_{k_2}}) \quad \text{par la première forme,}$$
$$(b^\alpha_{\beta_1}, b^\alpha_{\beta_1\beta_2}, \dots, b^\alpha_{\beta_1\dots\beta_{k_2}}) \quad \text{par la deuxième forme,}$$
$$(4.3) \qquad \begin{pmatrix} a^i_{\alpha_1\beta_1}, a^i_{\alpha_1\beta_1\beta_2}, \dots, a^i_{\alpha_1\beta_1\dots\beta_{k_2}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a^i_{\alpha_1\dots\alpha_{k_1}\beta_1}, a^i_{\alpha_1\dots\alpha_{k_1}\beta_1\beta_2}, \dots, a^i_{\alpha_1\dots\alpha_{k_1}\beta_1\dots\beta_{k_2}} \end{pmatrix} \quad \text{par le reste.}$$

Nous désignons l'ensemble de la première matrice de (4. 3) par $M^{k_2}_{nq}$ et celui de la deuxième matrice par $M^{k_2}_{pq}$. De plus, l'ensemble de la dernière matrice est noté $M_{n\,p\,q}^{\,k_1k_2}$. Lorsque l'ensemble de la matrice $(a^i_{\alpha_1}, a^i_{\alpha_1\alpha_2}, \dots\dots, a^i_{\alpha_1\dots\alpha_{k_1}})$ des coefficients de (4. 1) est désigné par $M^{k_1}_{np}$, nous avons la

PROPOSITION 4. 3. *L'expression suivante de décomposition*

$$(4.4) \qquad L_{np\,q}^{k_1k_2} \equiv (O\in R_n,\ O\in R_p,\ O\in R_q,\ M^{k_1}_{np},\ M^{k_2}_{nq},\ M^{k_2}_{nq}\, M_{np\,q}^{k_1k_2})$$

est obtenue, c'est-à-dire, à l'aide de représentant tensoriel $L_{np\,q}^{k_1k_2}$ *peut s'exprimer par les membres à droite de* (4. 4).

En particulier, l'expression de $L^{k_1}_{np}$ est obtenue.

COROLLAIRE. *On a l'expression suivante de décomposition*

$$L^{k_1}_{np} \equiv (O \in R_n,\ O \in R_p,\ M^{k_1}_{np}),$$

c'est-à-dire, en vertu de représentant tensoriel, $L^{k_1}_{np}$ *peut s'exprimer par* $(O \in R_n,\ O \in R_p,\ M^{k_1}_{np})$.

Comme nous considérons toujours aux points $(O \in R_n,\ O \in R_p,\ O\in R_q)$, nous pouvons dire que la première matrice de (4. 3) représente un élément de $L^{k_2}_{nq}$ et la deuxième matrice de (4. 3) un élément de $L^{k_2}_{pq}$.

DÉFINITION. *On peut considérer le jet d'ordre* (k_1, k_2), *de source* $(O\in R_p, O \in R_q)$ *et de but* $(O \in R_n)$, *d'une application bien déterminée de la forme*

$$u^i = \sum_{\lambda=1}^{k_1} \frac{1}{\lambda!}\left(a^i_{\alpha_1\dots\alpha_\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k_2} \frac{1}{\mu!}\, a^i_{\alpha_1\dots\alpha_\lambda\beta_1\dots\beta_\mu} t^{\beta_1}\dots t^{\beta_\mu}\right) x^{\alpha_1}\dots x^{\alpha_\lambda}.$$

Soit $L'^{\,k_1k_2}_{n\,q\,p}$ *l'ensemble de ces jets.*

Alors, on peut regarder $X \in M^{\,k_1}_{n\,p}$ et la dernière matrice de (4. 3) comme exprimant un élément de $L'^{\,k_1k_2}_{n\,p\,q}$. Et nous avons la

PROPOSITION 4. 4. *L'expression suivante est obtenue,*

$$(4.4') \qquad L_{n\,p\,q}^{\,k_1k_2} : (L^{\,k_2}_{n\,q},\ L^{k_2}_{pq},\ L'^{\,k_1k_2}_{n\,p\,q}),$$

c'est-à-dire, l'ensemble $L_{n\,p\,q}^{k_1k_2}$ *est bien déterminé par* $L_{nq}^{k_2}$, $L_{pq}^{k_2}$, $L'^{k_1k_2}_{n\,p\,q}$. *Mais* $L_{np\,q}^{k_1k_2}$ *n'est pas identiquement* $(L_{nq}^{k_2}, L_{pq}^{k_2}, L'^{k_1k_2}_{n\,p\,q})$.

Quant à l'ensemble de jets non holonomes, nous allons traiter V_q comme V_p et la coordonnée (t) est identique à (x). Alors, le jet non holonome d'ordre $k_1 + k_2$ est obtenu.

PROPOSITION 4. 5. *Le jet non holonome d'ordre* $k_1 + k_2$ $X \in L_{n\,p\,p}^{k_1k_2}$ *est le* k_2*-jet d'une application déterminée de la forme*

$$(4.5)\quad \left\{\begin{aligned}
u^i &= \bar{a}^i_{\alpha_1}x^{\alpha_1} + \frac{1}{2!}\bar{a}^i_{\alpha_1\alpha_2}x^{\alpha_1}x^{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{k_2!}\bar{a}^i_{\alpha_1\cdots\alpha_{k_2}}x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_{k_2}},\\
u^i_{\alpha_1} &= a^i_{\alpha_1} + a^i_{\alpha_1,\alpha_2}x^{\alpha_2} + \frac{1}{2!}a^i_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3}x^{\alpha_2}x^{\alpha_3} + \cdots\\
&\quad + \frac{1}{k_2!}a^i_{\alpha_1\cdots\alpha_{k_2+1}}x^{\alpha_2}\cdots x^{\alpha_{k_2+1}},\\
u^i_{\alpha_1\alpha_2} &= a^i_{\alpha_1\alpha_2} + a^i_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3}x^{\alpha_3} + \frac{1}{2!}a^i_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4}x^{\alpha_3}x^{\alpha_4} + \cdots\\
&\quad + \frac{1}{k_2!}a^i_{\alpha_1\alpha_2,\cdots\alpha_{k_2+2}}x^{\alpha_3}\cdots x^{\alpha_{k_2+2}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
u^i_{\alpha_1\cdots\alpha_{k_1}} &= a^i_{\alpha_1\cdots\alpha_{k_1}} + a^i_{\alpha_1\cdots\alpha_{k_1},\alpha_{k_1+1}}x^{\alpha_{k_1+1}} + \cdots\\
&\quad + \frac{1}{k_2!}a^i_{\alpha_1\cdots\alpha_{k_1},\cdots\alpha_{k_2+k_1}}x^{\alpha_{k_1+1}}\cdots x^{\alpha_{k_2+k_1}},
\end{aligned}\right.$$

où les virgules $(\,,)$ *entre les indices inférieurs des coefficients signifient généralement* $a^i_{\alpha_1,\alpha_2} \neq a^i_{\alpha_1\alpha_2}$, $a^i_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3} \neq a^i_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3} \neq a^i_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, *etc., et les coefficients* $a^i_{\alpha_1\cdots\alpha_{s_1},\alpha_{s_1+1}\cdots\alpha_{s_2}}$ *sont symétriques par rapport aux* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_{s_1}$ *et par rapport aux* $\alpha_{s_1+1},\cdots\cdots,\alpha_{s_2}$, *mais pas nécessairement symétriques par rapport à tous les indices inférieurs* $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_{s_1}, \alpha_{s_1+1},\cdots\cdots,\alpha_{s_2}$.

Par conséquent, nous obtenons les propositions:

PROPOSITION 4. 6. *Nous avons l'expression suivante de décomposition*

$$(4.6)\qquad L_{n\,p\,p}^{k_1k_2} \equiv (O \in R_n,\ O \in R_p,\ M_{np}^{k_1},\ M_{np}^{k_2},\ M_{n\,p\,p}^{k_1k_2}).$$

PROPOSITION 4. 7. *L'ensemble de jets non holonomes d'ordre* $k_1 + k_2$, $L_{n\,p\,p}^{k_1k_2}$ *s'exprime par*

$$(4.6')\qquad L_{n\,p\,p}^{k_1k_2} : (L_{n\,p}^{k_2},\ L'^{k_1k_2}_{n\,p\,p}),$$

c'est-à-dire, l'ensemble de jets non holonomes est déterminé par $L_{n\,p}^{k_2}$, $L'^{k_1k_2}_{n\,p\,p}$.
Si l'on ajoute la condition suivante à (4. 5)

$$(4.7)\qquad \bar{a}^{i}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}=a^{i}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}=a^{i}_{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_s}=a^{i}_{\alpha_1\alpha_2,\ldots\alpha_s}=\cdots\cdots=a^{i}_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1},\alpha_s},$$
$$(1<s<k_1+k_2)$$

tous les coefficients sont symétriques par rapport aux indices inférieurs (car $a^{i}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}$ est symétrique) et $L_{n}{}^{k_1k_2}_{p\,p}$ devient essentiellement identique à l'ensemble $L_{n}{}^{k_1+k_2}_{p}$ des éléments de $J^{k_1+k_2}(R_p, R_n)$ dont la source et le but sont l'origine commune O de R_p et de R_n. Donc, nous avons le

THÉORÈME 1. (4. 7) *est la condition pour que les jets non holonomes soient des jets infinitésimaux* (*holonomes*).

5. Jets d'ordre l entre deux ensembles de jets d'ordre k. Nous considérons l-jets dont la source et le but appartiennent respectivement à deux ensembles de jets d'ordre $k\,(l \geqq k)$. Étant données quatre variétés V_p, V_q, V_n, V_m de classe $\geqq r=l+k$, $J^k(V_p, V_n)$, $J^k(V_q, V_m)$ sont deux variétés de classe $\geqq l$. On peut donc définir l'ensemble de jets

$$(5.1)\qquad J^l(J^k(V_p, V_n),\ J^k(V_q, V_m)).$$

Pour comprendre cet ensemble, nous considérons d'abord l'ensemble des jets d'ordre k de source seulement un point $x_0 \in V_p$ et de but aussi un point $u_0 \in V_n$, désignant par $\Phi^k(V_p, V_n)$. $\Phi^k(V_q, V_m)$ est aussi l'ensemble des jets d'ordre k de source un point $t_0 \in V_q$ et de but $v_0 \in V_m$. Au lieu de (5. 1), nous prenons l'ensemble

$$(5.2)\qquad J^l(\Phi^k(V_p, V_n),\ \Phi^k(V_q, V_m)).$$

Néanmoins, cet ensemble est encore compliqué et pour l'appliquer à la définition de groupe d'isotropie infinitésimale et de prolongement principal de variété, nous ajoutons quelques restrictions Pour cela, nous allons discuter de la manière de représentants tensoriels. Soient R_p, R_q, R_n, R_m quatre espaces numériques qui définient respectivement les variétés V_p, V_q, V_n, V_m. Soient (x^α), (x^β), (u^i), (u^j) ses coordonnées canoniques des espaces numériques respectivement, nous supposons que $x_0 \in V_p$, $t_0 \in V_q$, $u_0 \in V_n$, $v_0 \in V_m$ corresponnent respectivement à chaque origine $O \in R_p$, $O \in R_q$, $O \in R_n$, $O \in R_m$. Alors, nous supposons que $\Phi^k(R_p, R_n)$ soit égal à $L_{np}^{\,k}$.

En prenant les trois cas suivants (I), (II), (III), nous allons énoncer.

(I) D'abord, nous discutons sur l'ensemble

$$(5.3)\qquad J^l(\Phi^k(R_q, R_n),\ \Phi^k(R_q, R_m))$$

de jets d'ordre l dont la source est représentée par $(O\in R_q,\ O \in R_n,\ b^i_{\beta_1}, b^i_{\beta_1\beta_2},\ldots, b^i_{\beta_1\ldots\beta_k})$ et le but par $(O \in R_q,\ O \in R_m,\ a^j_{\beta_1}, a^j_{\beta_1\beta_2},\ldots\ldots, a^j_{\beta_1\ldots\beta_k})$ à l'aide des représentants tensoriels de $L_{nq}^{\,k}$ et de $L_{mq}^{\,k}$. Nous adjoutons une restriction telle que l'élément de (5. 3) soit un l-jet d'une application déterminée de la forme

$$(5.4)\quad \begin{cases} u^j = \alpha^j_i u^i + \dfrac{1}{2!}\alpha^j_{i_1 i_2}u^{i_1}u^{i_2} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{l!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l}u^{i_1}\cdots\cdots u^{i_l}, \\ u^j_{\beta_1} = (\alpha^j_{i_1} + \alpha^j_{i_1 i_2}u^{i_2} + \dfrac{1}{2!}\alpha^j_{i_1 i_2 i_3}u^{i_2}u^{i_3} + \cdots\cdots \\ \qquad + \dfrac{1}{(l-1)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l}u^{i_2}\cdots\cdots u^{i_l})u^{i_1}_{\beta_1}, \\ u^j_{\beta_1\beta_2} = (\alpha^j_{i_1 i_2} + \alpha^j_{i_1 i_2 i_3}u^{i_3} + \dfrac{1}{2!}\alpha^j_{i_1 i_2 i_3 i_4}u^{i_3}u^{i_4} + \cdots\cdots \\ \quad + \dfrac{1}{(l-2)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l}u^{i_3}\cdots\cdots u^{i_l})u^{i_1}_{\beta_1}u^{i_2}_{\beta_2} + (\alpha^j_{i_1} + \alpha^j_{i_1 i_2}u^{i_2} \\ \quad + \dfrac{1}{2!}\alpha^j_{i_1 i_2 i_3}u^{i_2}u^{i_3} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{(l-1)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l}u^{i_2}\cdots\cdots u^{i_l})u^{i_1}_{\beta_1\beta_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ u^j_{\beta_1\ldots\beta_k} = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{(+\mu_\lambda)}^{k} \frac{k!}{\mu_1!\ldots\mu_\lambda!\,\nu_1!\ldots\nu_{k-\lambda+1}!}\,\frac{\partial^\lambda u^j}{\partial u^{i_1}\ldots\partial u^{i_\lambda}} \\ \quad \times\, u^{i_1}_{(\beta(\mu_1)}u^{i_2}_{\beta(\mu_2)}\cdots\cdots u^{i_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda))}, \end{cases}$$

où nous utilisons les notations suivantes: $\sum\limits_{(+\mu_\lambda)}^{k}$ signifie la sommation par rapport à toutes les combinaisons de λ nombres entiers positifs $(\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots\cdots, \mu_\lambda)$ avec la restriction $\mu_1 + \mu_2 + \cdots\cdots\cdots + \mu_\lambda = k$; par ν_t nous désignons le nombre de la même $\mu_s = t$ $(s = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, \lambda)$, prenant t de 1 au plus jusqu'à $k-\lambda+1$, car le nombre de $\mu_s \neq 1$ est au plus $k-\lambda$; et nous posons

$$u^{i_1}_{(\beta(\mu_1)}u^{i_2}_{\beta(\mu_2)}\cdots\cdots\cdots u^{i_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda))} \equiv u^{i_1}_{(\beta_1\ldots\beta_{\mu_1}}u^{i_2}_{\beta_{\mu_1+1}\ldots\beta_{\mu_1+\mu_2}}\cdots\cdots\cdots u^{i_\lambda}_{\beta_{\mu_1+\ldots+\mu_{\lambda-1}+1}\ldots\beta_{\mu_1+\ldots+\mu_\lambda})}.$$

Et on a donc la relation suivante entre la source et le but:

$$(5.5)\quad \begin{cases} a^j_{\beta_1} = \alpha^j_{i_1}b^{i_1}_{\beta_1} \\ a^j_{\beta_1\beta_2} = \alpha^j_{i_1 i_2}b^{i_1}_{\beta_1}b^{i_2}_{\beta_2} + \alpha^j_{i_1}b^{i_1}_{\beta_1\beta_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a^j_{\beta_1\ldots\beta_k} = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{(+\mu_\lambda)}^{k}\frac{k!}{\mu_1!\cdots\cdots\mu_\lambda!\,\nu_1!\cdots\cdots\nu_{k-\lambda+1}!}\,\alpha^j_{i_1\cdots\cdots i_\lambda} \\ \quad\times\, b^{i_1}_{(\beta(\mu_1)}b^{i_2}_{\beta(\beta_\mu)}\cdots\cdots b^{i_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda))}. \end{cases}$$

DÉFINITION. $\Phi^l(\Phi^k(R_q, R_n), \Phi^k(R_q, R_m))$ (*ou plus simplement* $L^{l}_{mq,\,nq}{}^{k}$) *signifie l'ensemble des éléments de* (5.3) *dont le représentant tensoriel s'exprime par la forme de* (5.4) *et dont la source et le but vérifient la relation* (5.5).

À (5. 4), on peut dire que l'application de R_n dans R_m joue un rôle important et l'application identique de R_q est cachée. Comme nous trouvons seulement les coefficients $(\alpha^j_{i_1}, \alpha^j_{i_1 i_2}, \ldots\ldots, \alpha^j_{i_1\ldots i_l})$ dans (5. 4), on a donc la

PROPOSITION 5. 1. *$L^{l}_{mq,}{}^{k}_{nq}$ se construit essentiellement par L^l_{mn} et nous pouvons marquer comme suit:*

$$L^{l}_{mq,}{}^{k}_{nq} \equiv L_{mn}{}^{l}((L^k_{nq})), \tag{5.6}$$

où $((L.:))$ exprime l'ensemble des sources. Et on peut regarder $L_{mn}{}^{l}$ comme exprimant l'ensemble d'opération à gauche de L^k_{nq}.

Ensuite, nous pouvons définir une loi de composition entre $X \in L^{l}_{mp,}{}^{k}_{np}$ et $Y \in L^{kl}_{npq}$, lorsque $l \geqq k$. On sait que Y est le jet d'ordre $(k; l)$ de source O d'une application bien déterminée des formes (4.1),(4.2), X est le jet de source $Z \in L^k_{np}$ d'une application déterminée de la forme

$$\text{(5.4}')\quad \left\{\begin{aligned}
u^j &= \alpha^j_{i_1}u^{i_1} + \frac{1}{2!}\alpha^j_{i_1 i_2}u^{i_1}u^{i_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{l!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l}u^{i_1}\cdots\cdots u^{i_l},\\
u^j_{\alpha_1} &= (\alpha^j_{i_1} + \alpha^j_{i_1 i_2}u^{i_2} + \frac{1}{2!}\alpha^j_{i_1 i_2 i_3}u^{i_2}u^{i_3} + \cdots\cdots\\
&\qquad + \frac{1}{(l-1)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l}u^{i_2}\cdots\cdots u^{i_l})u^{i_1}_{\alpha_1},\\
u^j_{\alpha_1\alpha_2} &= (\alpha^j_{i_1 i_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{(l-2)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l}u^{i_3}\cdots\cdots u^{i_l})u^{i_1}_{\alpha_1}u^{i_2}_{\alpha_2}\\
&\quad + (\alpha^j_{i_1} + \cdots\cdots + \frac{1}{(l-1)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l}u^{i_2}\cdots\cdots u^{i_l})u^{i_1}_{\alpha_1\alpha_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u^j_{\alpha_1\ldots\alpha_k} &= \sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{(+\mu_\lambda)}^{k}\frac{k!}{\mu_1!\ldots\mu_\lambda!\gamma_1!\ldots\gamma_{k-\lambda+1}!}\frac{\partial^\lambda u^j}{\partial u^{i_1}\ldots\partial u^{i_\lambda}}\\
&\qquad \times u^{i_1}_{(\alpha(\mu_1)}u^{i_2}_{\alpha(\mu_2)}\cdots u^{i_\lambda}_{\alpha(\mu_\lambda))}.
\end{aligned}\right.$$

Nous supposons que $Y' = X\cdot Y$ soit le jet d'ordre $(k; l)$ de source $O \in R_q$ d'une application déterminée de la forme substituée u^i, $u^i_{\alpha_1}$, $u^i_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots\ldots, u^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ dans (5. 4′) par les termes droits de ceux de (4. 1) et (4. 2), c'est-à-dire,

$$u^j = a^j_{\alpha_1}x^{\alpha_1} + \frac{1}{2!}a^j_{\alpha_1\alpha_2}x^{\alpha_1}x^{\alpha_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{k!}a^j_{\alpha_1\ldots\alpha_k}x^{\alpha_1}\cdots\cdots x^{\alpha_k},$$

$$u^j = a^j_{\beta_1}t^{\beta_1} + \frac{1}{2!}a^j_{\beta_1\beta_2}t^{\beta_1}t^{\beta_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{l!}a^j_{\beta_1\ldots\beta_l}t^{\beta_1}\cdots\cdots t^{\beta_l},$$

$$x^\alpha = a^\alpha_{\beta_1} t^{\beta_1} + \frac{1}{2!} a^\alpha_{\beta_1\beta_2} t^{\beta_1} t^{\beta_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{l!} a^\alpha_{\beta_1\cdots\beta_l} t^{\beta_1} \cdots\cdots t^{\beta_l},$$

$$u^j_{\alpha_1\cdots\alpha_\tau} = \sum_{\lambda=1}^{\tau} \sum_{(+\mu_\lambda)}^{\tau} \frac{\tau!}{\mu_1!\cdots\mu_\lambda!\nu_1!\cdots\nu_{\tau-\lambda+1}!} \left(\frac{\partial^\lambda u^j}{\partial u^{i_1}\cdots\partial u^{i_\lambda}}\right)\left[u^i = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{1}{\mu!} a^i_{\beta_1\cdots\beta_\mu} t^{\beta_1}\cdots\cdots t^{\beta_\mu}\right]$$

$$\times\left(a^{i_1}_{(\alpha(\mu_1))} + \sum_{\rho_1=1}^{l} a^{i_1}_{\alpha(\mu_1)|\beta(\rho_1)|} t^{\beta_{11}} \cdots\cdots t^{\beta_{1\rho_1}}\right)\cdots\cdots$$

$$\times\left(a^{i_\lambda}_{\alpha(\mu_\lambda))} + \sum_{\rho_\lambda=1}^{l} a^{i_\lambda}_{\alpha(\mu_\lambda))\beta(\rho_\lambda)} t^{\beta_{\lambda 1}} \cdots\cdots t^{\beta_{\lambda\rho_\lambda}}\right), \qquad (\tau = 1,2,\ldots,k),$$

où la première forme se termine au terme $x^{\alpha_1}\cdots\cdots x^{\alpha_k}$, la deuxième forme, la troisième forme et la quatrième forme au terme $t^{\beta_1}\cdots\cdots t^{\beta_l}$. Donc, les formes précédentes deviennent

$$u^j = a^j_{\alpha_1} x^{\alpha_1} + \frac{1}{2!} a^j_{\alpha_1\alpha_2} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{k!} a^j_{\alpha_1\cdots\alpha_k} x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_k},$$

$$u^j = a^j_{\beta_1} t^{\beta_1} + \frac{1}{2!} a^j_{\beta_1\beta_2} t^{\beta_1} t^{\beta_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{l!} a^j_{\beta_1\cdots\beta_l} t^{\beta_1}\cdots\cdots t^{\beta_l},$$

$$x^\alpha = a^\alpha_{\beta_1} t^{\beta_1} + \frac{1}{2!} a^\alpha_{\beta_1\beta_2} t^{\beta_1} t^{\beta_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{l!} a^\alpha_{\beta_1\cdots\beta_l} t^{\beta_1}\cdots\cdots t^{\beta_l},$$

$$u^j_{\alpha_1} = a^j_{\alpha_1} + a^j_{\alpha_1\beta_1} t^{\beta_1} + \frac{1}{2!} a^j_{\alpha_1\beta_1\beta_2} t^{\beta_1} t^{\beta_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{l!} a^j_{\alpha_1\beta_1\cdots\beta_l} t^{\beta_1}\cdots t^{\beta_l},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$u^j_{\alpha_1\cdots\alpha_k} = a^j_{\alpha_1\cdots\alpha_k} + a^j_{\alpha_1\cdots\alpha_k\beta_1} t^{\beta_1} + \frac{1}{2!} a^j_{\alpha_1\cdots\alpha_k\beta_1\beta_2} t^{\beta_1} t^{\beta_2} + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{l!} a^j_{\alpha_1\cdots\alpha_k\beta_1\cdots\beta_l} t^{\beta_1}\cdots\cdots t^{\beta_l}.$$

Par conséquent, Y' est un élément de L^{kl}_{mpq} et entre les coefficients nous avons les relations suivantes:

$$a^j_{\alpha_1\cdots\alpha_\tau} = \sum_{\lambda=1}^{\tau} \sum_{(+\mu_\lambda)}^{\tau} \frac{\tau!}{\mu_1!\cdots\mu_\lambda!\nu_1!\cdots\nu_{k-\lambda+1}!} \alpha^j_{i_1\cdots i_\lambda}$$

$$\times a^{i_1}_{(\alpha(\mu_1)} a^{i_2}_{\alpha(\mu_2)} \cdots\cdots a^{i_l}_{\alpha(\mu_\lambda))}, \quad (\tau = 1,2,\ldots\ldots,k),$$

$$a^j_{\beta_1\cdots\beta_\sigma} = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \sum_{(+\mu_\lambda)}^{\sigma} \frac{\sigma!}{\mu_1!\cdots\mu_\lambda!\nu_1!\cdots\nu_{k-\lambda+1}!} \alpha^j_{i_1\cdots i_\lambda}$$

$$\times a^{i_1}_{(\beta(\mu_1)} a^{i_2}_{\beta(\mu_2)} \cdots\cdots\cdots a^{i_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda))}, \qquad (\sigma = 1,2,\ldots\ldots,l),$$

$$a^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta\sigma} = a^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta\sigma},$$

$$a^{j}_{\alpha_1\ldots\alpha_\tau\beta_1\ldots\beta\sigma} = \sum_{\lambda=1}^{\tau+\sigma} \sideset{}{^*}\sum_{(+\mu_\lambda)}^{\tau} \sideset{}{^*}\sum_{(+\omega_\lambda)}^{\sigma} \frac{\tau!}{\mu_1!\ldots\mu_\lambda!} \frac{\sigma!}{\omega_1!\ldots\omega_\lambda!} \frac{1}{\nu_0!\nu_1!\ldots\nu_{\tau+\sigma-\lambda+1}!}$$
$$\times \alpha^{j}_{i_1 i_2\ldots i_\lambda} a^{i_1}_{((\alpha(\mu_1)\beta(\omega_1)} a^{i_2}_{\alpha(\mu_2)\beta(\omega_2)} \cdots\cdots a^{i_\lambda}_{\alpha(\mu_\lambda)\beta(\omega_\lambda)))},$$

où nous utilisons les notations suivantes : 1°) Lorsque t indices $\mu_{s_1},\ldots\ldots,\mu_{s_t}$ dans $(\mu_1,\ldots\ldots,\mu_\lambda)$ sont égaux à a, et en même temps $\omega_{s_1},\ldots\ldots,\omega_{s_t}$ dans $(\omega_1,\ldots\ldots,\omega_\lambda)$ sont égaux à b, alors, nous désignons le nombre t par ν_a, en prenant a de O au plus à $\tau + \sigma - \lambda + 1$ (lorsque $\lambda > \sigma + 1$); 2°) $\mu_s + \omega_s$ n'est pas identiquement zéro; 3°) $\sideset{}{^*}\sum\limits_{(+\mu_\lambda)}^{\tau}$ signifie la sommation par rapport aux combinaisons de λ nombres entiers $\mu_1,\mu_2,\ldots\ldots,\mu_\lambda \geqq 0$, avec la restriction $\mu_1+\mu_2+\ldots\ldots+\mu_\lambda = \tau$; 4°) Les doubles parenthèses (( )) signifient que nous prenons d'abord la partie de symétrie par rapport aux indices $\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_\tau$ et ensuite par rapport aux indices $\beta_1,\ldots\ldots,\beta_\sigma$. Lorsque nous considérons les expressions $L^{kl}_{npq} \equiv (O \in R_n$, $O \in R_p$, $O \in R_q$, M^k_{np}, M^l_{nq}, M^l_{pq}, $M^{kl}_{npq})$, $L^{kl}_{mpq} \equiv (O \in R_m$, $O \in R_p$, $O \in R_q$, M^k_{mp}, M^l_{mq}, M^l_{pq}, $M^{kl}_{mpq})$, les formes précédentes correspondent respectivement aux changements $M^k_{mp} \to M^k_{mp}$, $M^l_{nq} \to M^l_{mq}$, $M^l_{pq} = M^l_{pq}$, $M^{kl}_{npq} \to M^{kl}_{mpq}$. Alors, nous avons la

PROPOSITION 5.2. *Nous pouvons considérer $L^l_{mp,np}{}^k$ $(l \geqq k)$ comme une opération entre L^{kl}_{mpq} et L^{kl}_{mpq}, et on désigne cette relation de la manière suivante :*

$$L^{kl}_{mpq} = L^l_{mp,}\,{}^l_{np}\,[L^{kl}_{npq}].$$

(II) De même, nous considérons l'ensemble

$$J^l(\Phi^k(R_p, R_n),\ \Phi^k(R_q, R_n)) \tag{5.7}$$

de jets d'ordre l dont la source $(O \in R_p$, $O \in R_n$, $c^{\,i}_{\alpha_1}$, $c^i_{\alpha_1\alpha_2}$, $\ldots\ldots, c^i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k})$ et le but $(O \in R_q$, $O \in R_n$, $b^i_{\beta_1}$, $b^i_{\beta_1\beta_2},\ldots\ldots,b^i_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k})$. Et on a une restriction telle que l'élément de (5.7) est un l-jet d'une application déterminée de la forme

$$\left\{\begin{aligned} x^\alpha &= \beta^\alpha_{\beta_1} x^{\beta_1} + \frac{1}{2!}\beta^\alpha_{\beta_1\beta_2} x^{\beta_1} x^{\beta_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{l!}\beta^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_l} x^{\beta_1}\cdots\cdots x^{\beta_l}. \\ u^i_{\beta_1} &= u^i_{\alpha_1}\Big(\beta^{\alpha_1}_{\beta_1} + \beta^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2} x^{\beta_2} + \frac{1}{2!}\beta^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3} x^{\beta_2} x^{\beta_3} + \cdots\cdots \\ &\qquad + \frac{1}{(l-1)!}\beta^{\alpha_1}_{\beta_1\ldots\beta_l} x^{\beta_2}\cdots\cdots x^{\beta_l}\Big), \\ u^i_{\beta_1\beta_2} &= u^i_{\alpha_1}(\beta^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2} + \beta^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta'_3} x^{\beta'_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{(l-2)!}\beta^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2\beta_3'\ldots\beta_l'} x^{\beta_3'}\cdots\cdots x^{\beta'}) \end{aligned}\right. \tag{5.8}$$

$$
\begin{aligned}
&+ u^i_{\alpha_1\alpha_2}\Big(\beta^{\alpha_1}_{\beta} + \beta^{\alpha_1}_{\beta_2\beta'_2} x^{\beta'_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{(l-1)!}\beta^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2'\ldots\beta_l'} x^{\beta_2'}\cdots\cdots x^{\beta_l'}\Big) \\
&\times\Big(\beta^{\alpha_2}_{\beta_2} + \beta^{\alpha_2}_{\beta_1\beta_2''} x^{\beta_2''} + \cdots\cdots + \frac{1}{(l-1)!}\beta^{\alpha_2}_{\beta_2\beta_2''\ldots\beta_l''} x^{\beta_2''}\cdots\cdots x^{\beta_l''}\Big), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
&u^i_{\beta_1\ldots\beta_k} = \sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{(+\rho_\lambda)}^{k} \frac{k!}{\rho_1!\ldots\rho_\lambda!\nu_1!\ldots\nu_{k-\lambda+1}!} u^i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\lambda} \\
&\qquad\times \frac{\partial^{\rho_1}u^{\alpha_1}}{\partial x^{(\beta_1}\ldots\partial x^{\beta\rho_1}} \frac{\partial^{\rho_2}u^{\alpha_2}}{\partial x^{\beta\rho_1+1}\ldots\partial x^{\beta\rho_1+\rho_2}}\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad \frac{\partial^{\rho_\lambda}\mu^{\alpha_\lambda}}{\partial x^{\beta\rho_1+\cdots+\rho_{\lambda-1}+1}\ldots\partial x^{\beta\rho_1+\cdots+\rho_\lambda)}}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, il existe la relation suivante entre la source et le but

$$
(5.9)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&b^i_{\beta_1} = c^i_{\alpha_1}\beta^{\alpha_1}_{\beta_1}, \\
&b^i_{\beta_1\beta_2} = c^i_{\alpha_1}\beta^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2} + c^i_{\alpha_1\alpha_2}\beta^{\alpha_1}_{\beta_1}\beta^{\alpha_2}_{\beta_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
&b^i_{\beta_1\ldots\beta_k} = \sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{(+\rho_\lambda)}^{k} \frac{k!}{\rho_1!\ldots\rho_\lambda!\tau_1!\ldots\tau_{k-\lambda+1}!} c^i_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\lambda} \\
&\qquad\times \beta^{\alpha_1}_{(\beta(\rho_1)}\,\beta^{\alpha_2}_{\beta(\rho_2)}\cdots\cdots\beta^{\alpha_\lambda}_{\beta(\rho_\lambda))}.
\end{aligned}
\right.
$$

DÉFINITION. *L'ensemble* (5.7) *vérifie les restrictions* (5.8), (5.9) *est désigné par* $\Phi^l(\Phi^k(R_p, R_n), \Phi^k(R_q, R_n))$ *ou* $L^{l}_{nq},{}^{k}_{np}$ *plus simple.*

À la forme (5.8), nous voyons que l'application de R_p dans R_q joue un rôle important et l'application de R_n est identique. Donc, on a la

PROPOSITION 5.3. $L^{l}_{nq},{}^{k}_{np}$ *se construit essentiellement par* L^l_{pq} *et nous avons l'expression*

$$
(5.10)\qquad L^{l}_{nq},{}^{k}_{np} \equiv ((L^k_{np}))\, L^l_{pq},
$$

où L^k_{np} *signifie l'ensemble des sources et* L^l_{pq} *peut être regardé comme l'ensemble d'opérateur à droite.*

De presque la même considération qu'au cas (I), nous avons la

PROPOSITION 5.4. *En considérant* $L^{l}_{nq},{}^{k}_{np}$ *comme une opération, nous avons l'expression suivante*

$$
L^{kl}_{nqq'} = L^{l}_{nq},{}^{k}_{np}\,[L^{kl}_{npq'}].
$$

(III) En cas plus général nous avons l'ensemble

(5.11) $$J^l(\Phi^k(R_p, R_n),\ \Phi^k(R_q, R_m))$$

de jets d'ordre l dont la source $(O \in R_p, O \in R_n,\ c^i_{\alpha_1}, c^i_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, c^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k})$ et le but $(O \in R_q,\ O \in R_m,\ a^j_{\beta_1},\ a^j_{\beta_1\beta_2}, \ldots, a^j_{\beta_1\ldots\beta_k})$ et l'élément est obligé d'être l-jet d'une application déterminée de la forme

(5.12) $\left\{\begin{array}{l}\text{la forme substituée } u^i_{\beta_1}, u^i_{\beta_1\beta_2}, \ldots, u^i_{\beta_1\ldots\beta_k} \text{ dans (5. 4) par les termes} \\ \text{droits de ceux de (5. 8).}\end{array}\right.$

Entre la source et le but on trouve la relation

(5.13)
$$\left\{\begin{aligned}
& a^j_{\beta_1} = \alpha^j_{i_1} c^{i_1}_{\alpha_1} \beta^{\alpha_1}_{\beta_1}, \\
& a^j_{\beta_1\beta_2} = \alpha^j_{i_1 i_2} c^{i_1}_{\alpha_1} c^{i_2}_{\alpha_2} \beta^{\alpha_1}_{\beta_1} \beta^{\alpha_2}_{\beta_2} + \alpha^j_{i_1} (c^{i_1}_{\alpha 1} \beta^{\alpha_1}_{\beta_1\beta_2} + c^{i_1}_{\alpha 1\alpha_2} \beta^{\alpha_1}_{\beta_1} \beta^{\alpha_2}_{\beta_2}), \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
& a^j_{\beta_1\ldots\beta_k} = \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{(+\mu_\lambda)}^{k} \frac{k}{\nu_1! \ldots \nu_{k-\lambda+1}!} \alpha^j_{i_1\ldots i_\lambda} \\
& \qquad \times \left[\sum_{\sigma_1=1}^{\mu_1} \sum_{(+\rho_1\sigma_1)}^{\mu_1} \frac{1}{\rho_{11}! \ldots \rho_{1\sigma_1}! \tau_{11}! \ldots \tau_{1\mu_1-\sigma_1+1}!} \beta^{\alpha_{11}}_{(\beta(\rho_{11})} \cdots \beta^{\alpha_1\sigma_1}_{\beta(\rho_1\sigma_1)} \right] \\
& \qquad \times \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \\
& \qquad \times \left[\sum_{\sigma_\lambda=1}^{\mu_\lambda} \sum_{(+\rho_\lambda\sigma_\lambda)}^{\mu_\lambda} \frac{1}{\rho_{\lambda 1}! \ldots \rho_{\lambda\sigma_\lambda}!\, \tau_{\lambda 1}! \ldots \tau_{\lambda\mu_\lambda-\sigma_\lambda+1}!} \beta^{\alpha_{\lambda 1}}_{\beta(\rho_{\lambda 1})} \cdots \beta^{\alpha_\lambda\sigma_\lambda}_{\beta(\rho_\lambda\sigma_\lambda))} \right] \\
& \qquad \times c^{i_1}_{\alpha_{11}\ldots\alpha_1\sigma_1} \cdots\cdots c^{i_\lambda}_{\alpha_{\lambda 1}\ldots\alpha_\lambda\sigma_\lambda}.
\end{aligned}\right.$$

DÉFINITION. *L'ensemble* (5. 11) *vérifié* (5. 12) *et* (5. 13) *est désigne par* $\Phi^l(\Phi^k(R_p, R_n),\ \Phi^k(R_q, R_m))$ *ou* $L^{l\,l}_{mq,}{}^{k}_{np}$

Et nous avons la

PROPOSITION 5. 5. $L^{l\,l}_{mq,}{}^{k}_{np}$ *peut s'exprimer par*

(5.14) $$L^{l\,l}_{mq,}{}^{k}_{np} \equiv L^{\ l}_{mn}\, ((L^{\ k}_{np}))\, L^{\ l}_{pq},$$

où $((L^{\ k}_{np}))$ *signifie que l'ensemble de sources et* $L^{\ l}_{mn}$, $L^{\ l}_{pq}$ *resp. sont regardés comme l'ensemble d'opération à gauche, celui à droite, resp.*

De même qu'en cas (I), nous avons la

PROPOSITION 5. 6. *On peut considérer* $L^{ll}_{mq,}{}^{k}_{np}$ *comme une opération et l'expression suivante est obtenue*

$$L^{\ ll}_{mqq'} = L^{l\,l}_{mq,}{}^{k}_{np}\ [L^{\ kl}_{npq'}].$$

En vertu des discussions précédentes nous pouvons définir

(5.15) $$\Phi^l(\Phi^k(V_q, V_n), \Phi^k(V_q, V_m)),$$

(5.16) $$\Phi^l(\Phi^k(V_p, V_n), \Phi^k(V_q, V_n)),$$

(5.17) $$\Phi^l(\Phi^k(V_p, V_n), \Phi^k(V_q, V_m)),$$

d'après des atlas qui définissent V_n, V_m, V_p, V_q.

6. Groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre $(k; l)$. Du paragraphe précédent on peut déduire facilement trois groupes d'isotropie infinitésimale d'ordre $(k; l)$.

DÉFINITION. *Lorsque* $n = m$ *dans* $L^{l}_{mp,}{}^{k}_{nq}$, *nous le marquons* $L^{l}_{n'p,}{}^{k}_{np}$ *par prime.*

Cela signifie que l'application de R_n dans R_n n'est pas identique. On définit que le rang de l'élément de $L^{l}_{n'p,}{}^{k}_{np}$ est celui de la matrice (α^j_i). Lorsque l'ensemble $L^{l}_{n'p,}{}^{k}_{np}$ est de rang n, il forme un groupe.

DÉFINITION. *L'ensemble* $L^{l}_{n'p,}{}^{k}_{np}$ *de rang* n *sera appelé groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre* $(k; l)$ *de* 1ère *espèce dans* L^k_{np} *et nous le désignons par* $L^{k\,l}_{np,n}$.

Et d'après (5. 6) on arrive à la

PROPOSITION 6. 1. *L'expression suivante est obtenue:*

(6.1) $$L^{k\,l}_{np,n} \equiv L^l_n((L^k_{np})).$$

De même, nous avons la

DÉFINITION. *Si* $L^{\;l}_{np',}{}^{k}_{np}$ *est de rang* p, *c'est-à-dire, la matrice* (β^β_α) *dans* (5. 8) *est de rang* p, *il forme un groupe et s'exprime par* $L^{k\,l}_{np,p}$. *On l'appelle groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre* $(k; l)$ *de* 2e *espèce dans* L^k_{np}.

En vertu de (5.10), on a la

PROPOSITION 6. 2. *La représentation*

(6.2) $$L^{k\,l}_{np,p} \equiv ((L^k_{np}))L^l_p$$

est obtenue.

Tout de même, on peut définir comme suit:

DÉFINITION. *Lorsque* $L^{l\;l}_{n'p',}{}^{k}_{np}$ *est de rang* (n, p), *c'est-à-dire, la matrice* (α^j_i) *est de rang* n *et* (β^β_α) *de rang* p, *il forme aussi un groupe. On le désigne par* $L^{k\;ll}_{np,np}$ *et appelle groupe d'isotropie infinitésimale* $(k; l)$ *de* 3e *espèce dans* L^k_{np}.

D'après (5. 14) on a donc

PROPOSITION 6. 3. $L^{k\;ll}_{np,np}$ *peut être représenté par*

(6.3) $$L^{k\;ll}_{np,np} \equiv L^l_n((L^k_{np}))L^l_p.$$

En utilisant des atlas qui définissent V_n, V_p, on peut aussi considérer

$\Phi^l(\Phi^k(V_p, V_n), \Phi^k(V_p, V_{n'}))$ de rang n,
$\Phi^l(\Phi^k(V_k, V_n), \Phi^k(V_{p'}, V_n))$ de rang p,
$\Phi^l(\Phi^k(V_p, V_n), \Phi^k(V_{p'}, V_{n'}))$ de rang (n, p)

et ils sont appelés respectivement *groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre* $(k; l)$ *de* $1^{ère}$ *espèce, de* 2^e *espèce et de* 3^e *espèce dans* $\Phi^k(V_p, V_n)$.

7. Prolongements d'ordre $(k; l)$ de variété V_n. Appelons (p^k, q^l)-*vitesse de* V_n *d'origine* $x \in V_n$ *dans* V_n un élément de $J^l(R_q, T_p^k(V_n))$ de source $O \in R_q$ et de but $(x \in V_n, a^i_{\alpha_1}, a^i_{\alpha_1\alpha_2}, \cdots, a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_k})$. Appelons (p^k, q^l)-*covitesse de* V_n *d'origine* $x \in V_n$ un élément de $J^l(T^{*k}_p(V_n), R_q)$ de source $(x \in V_n, a^\alpha_{i_1}, a^\alpha_{i_1 i_2}, \cdots, a^\alpha_{i_1\ldots i_k})$ et de but $O \in R_q$. Soit $T^l_q(T^k_p(V_n))$ l'ensemble des (p^k, q^l)-vitesses de V_n. L'ensemble de (p^k, q^l)-covitesses de V_n est noté $T^{*l}_q(T^{*k}_p(V_n))$. De même, nous pouvons aussi considérer $T^{*l}_q(T^k_p(V_n))$. En utilisant $L^l_{n'p,}{}^k_{np}$, $I^l_{np'}{}^k_{np}$, $L^{l\,l}_{n'p'}{}^k_{np}$ à §5, d'après l'atlas qui définit V_n, nous pouvons définir

(7.1) $$J^l(T^k_p(R_n), T^k_p(V_{n'})),$$

(7.2) $$J^l(T^k_p(R_n), T^k_{p'}(V_n)),$$

(7.3) $$J^l(T^k_p(R_n), T^k_{p'}(V_{n'})).$$

Comme à §6, les rangs de (7.1), (7.2) et (7.3) pouvent être définis. Lorsqu'ils sont respectivement égaux à n, p et (n, p), nous désignons les ensembles (7.1), (7.2) et (7.3) par $H^l(T^k_p(V_{n'}))$, $H^l(T^k_{p'}(V_n))$ et $H^l(T^k_{p'}(V_{n'}))$ et appelons *prolongement principal d'ordre* $(k; l)$ *de* V_n *de* $1^{ère}$ *espèce, de* 2^e *espèce et de* 3^e *espèce*, respectivement. Et l'élément de chaque ensemble est appelé *repère d'ordre* $(k; l)$ *de* V_n *de* $1^{ère}$ *espèce, de* 2^e *espèce et de* 3^e *espèce*, respectivement.

Nous avons aussi

$$J^l(T^k_p(V_n), T^k_p(R_{n'})), \quad J^l(T^k_p(V_n), T^k_{p'}(R_n)), \quad J^l(T^k_p(V_n), T^k_{p'}(R_{n'}))$$

dont les rangs sont définis comme à §6 et sont égaux à $n, p, (n, p)$, respectivement. Nous désignons les ensembles par $H^{*l}(T^k_p(V_{n'}))$, $H^{*l}(T^k_{p'}(V_n))$, $H^{*l}(T^k_{p'}(V_{n'}))$ et les éléments des ensembles sont appelés *corepères d'ordre* l *de* $T^k_p(V_n)$ *de* $1^{ère}$ *espèce, de* 2^e *espèce et de* 3^e *espèce*, respectivement. Chacun de ces corepères est l'inverse d'un repère d'ordre $(k; l)$ de V_n.

De même, nous pouvons considérer les ensembles $H^{*l}(T^{*k}_p(V_{n'}))$, $H^{*l}(T^{*k}_{p'}(V_n))$, $H^{*l}(T^{*k}_{p'}(V_{n'}))$ dont les éléments sont appelés *corepères d'ordre* $(k; l)$ *de* V_n *de* 1^{ere} *espèce, de* 2^e *espèce, et de* 3^e *espèce* respectivement. Chacun de ces corepères n'est pas l'inverse d'un repère d'ordre $(k; l)$ de V_n.

En utilisant les groupes d'isotropie infinitésimale d'ordre $(k; l)$ et les prolongements principaux d'ordre $(k; l)$ de V_n, nous avons le

THÉORÈME 2. *Sur* $E = T^l_q(T^k_p(V_n))$ *l'ensemble de* (p^k, q^l)*-vitesses de* V_n $(l \geqq k)$, *nous pouvons définir la structure fibrée suivante*:

$$(7.4)\qquad \left\{\begin{array}{l} E(V_n, L^{kl}_{npq}, L^l_n(\!(L^k_{np})\!), H^l(T^k_p(V_{n'}))), \\ E(V_n\ L^{kl}_{npq}, (\!(L^k_{np})\!)L^l_p, H^l(T^k_{p'}(V_n))), \\ E(V_n, L^{kl}_{npq}, L^l_n(\!(L^k_{np})\!)L^l_p, H^l(T^k_{p'}(V_{n'}))), \end{array}\right.$$

en changeant le groupe d'isotropie et le prolongement principal.

En remplaçant L^{kl}_{npq} dans (7. 4) par les groupes d'isotropie on obtient aussi le

THÉORÈME 3. *Nous pouvons définir trois structures fibrées suivantes sur les prolongements principaux, respectivement;*

$$H^l(T^k_p(V_{n'}))(V_n, L^l_n(\!(L^k_{np})\!), L^l_n(\!(L^k_{np})\!), H'^l(T^k_p(V_{n'}))),$$
$$H^l(T^k_{p'}(V_n))(V_n, (\!(L^k_{np})\!)L^l_p, (\!(L^k_{np})\!)L^l_p, H'^l(T^k_{p'}(V_n))),$$
$$H^l(T^k_{p'}(V_{n'}))(V_n, L^l_n(\!(L^k_{np})\!)L^l_p, L^l_n(\!(L^k_{np})\!)L^l_p, H'^l(T^k_{p'}(V_{n'}))).$$

En particulier, nous avons donc le

THÉORÈME 4. *Nous pouvons définir une structure fibrée sur l'ensemble des jets non holonomes comme suit*:

$$T^l_p(T^k_p(V_n))(V_n, L^{kl}_{npp}, L^l_n(\!(L^k_{np})\!), H^l(T^k_p(V_{n'}))),\ (l \geqq k).$$

8. Jets d'ordre $(k_1, k_2, \ldots\ldots, k_s)$ **de** $(V_{p_1}, V_{p_2}, \ldots\ldots, V_{p_s})$ **dans** V_n. Comme à §4, on peut considérer $J^{k_3}(V_{p_3}, J^{k_2}(V_{p_2}, J^{k_1}(V_{p_1}, V_n)))$, et en répétant cette manière, nous définissons

$$J^{k_s}(V_{p_s}, J^{k_{s-1}}(V_{p_{s-1}}, \ldots\ldots, J^{k_1}(V_{p_1}, V_n)\ldots\ldots))$$

qui s'appelle *l'ensemble de jets d'ordre* $(k_1, k_2, \ldots\ldots, k_s)$ *de* $(V_{p_1}, V_{p_2}, \ldots\ldots, V_{p_s})$ *dans* V_n.

Pour cela, nous allons discuter l'ensemble $J^{k_3}(R_{p_3}, J^{k_2}(R_{p_2}, J^{k_1}(R_{p_1}, R_n)))$ des jets d'ordre k_3 dont la source est $O \in R_{p_3}$ et le but un élément de $L^{k_1k_2}_{np_1p_2}$ dont l'expression peut s'écrire

$$(8.1)\qquad L^{k_1k_2}_{np_1p_2}: (L^{k_2}_{np_2}, L^{k_2}_{p_1p_2}, L'^{\,k_1k_2}_{np_1p_2}),$$

ou

$$(8.1')\qquad L^{k_1k_2}_{np_1p_2} \equiv (O \in R_n, O \in R_{p_1}, O \in R_{p_2}, M^{k_1}_{np_1}, M^{k_2}_{np_2}, M^{k_2}_{p_1p_2}, M^{k_1k_2}_{np_1p_2}),$$

c'est-à-dire, $L^{k_1k_2}_{np_1p_2}$ est représenté par l'ensemble de

$$\left(\begin{array}{l} (O \in R_n), (O \in R_{p_1}), (O \in R_{p_2}), (a^i_{\alpha_1} \cdots a^{i_1}_{\alpha \cdots \alpha_{n1}}), (a^i_{\beta_1}, \ldots\ldots, a^i_{\beta_1 \ldots \beta_{k_2}}) \\ (b^\alpha_{\beta_1}, \ldots\ldots, b^\alpha_{\beta_1 \ldots \beta_{k_2}}), \begin{pmatrix} a^i_{\alpha_1\beta_1} \cdots\cdots\cdots & a^i_{\alpha_1\beta_1\ldots\beta_{k_2}} \\ a^i_{\alpha_1\alpha_2\beta_1} \cdots\cdots & a^i_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\ldots\beta_{k_2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\beta_1} \cdots\cdots & a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\beta_1\ldots\beta_{k_2}} \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

où les indices $(i), (\alpha), (\beta)$ concernent respectivement les coordonnées de R_n, R_{p_1}, R_{p_2} et nous désignons cet ensemble par $\Phi^{k_3}(R_{p_3}, \Phi^{k_2}(R_{p_2}, \Phi^{k_1}(R_{p_1}, R_n)))$ ou simplement $L^{k_1k_2k_3}_{np_1p_2p_3}$. Nous considérons cet ensemble par le représentant généralisé de ce cas comme à §4. On peut écrire les coefficients de ce représentant par les formes de matrice

$$
(8.2)\qquad \left\{\begin{array}{l}
(a^i_{\gamma_1}\cdots\cdots a^i_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}}),\ (b^\alpha_{\gamma_1}\cdots\cdots b^\alpha_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}}),\ (c^\beta_{\gamma_1}\cdots\cdots c^\beta_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}}),\\[4pt]
\begin{pmatrix} a^i_{\beta_1\gamma_1}\cdots\cdots & a^i_{\beta_1\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}}\\ \cdots\cdots\cdots & \\ a^i_{\beta_1\ldots\beta_{k_3}\gamma_1}\ldots & a^i_{\beta_1\ldots\beta_{k_2}\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}}\end{pmatrix},
\begin{pmatrix} b^\alpha_{\beta_1\gamma_1}\cdots\cdots & b^\alpha_{\beta_1\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}}\\ \cdots\cdots\cdots & \\ b^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_{k_2}\gamma_1}\ldots & b^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_{k_2}\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}}\end{pmatrix},
\begin{pmatrix} a^i_{\alpha_1\gamma_1}\cdots\cdots & a^i_{\alpha_1\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}}\\ \cdots\cdots\cdots & \\ a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\gamma_1}\ldots & a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}}\end{pmatrix},\\[4pt]
\left.\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} a^i_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}\cdots\cdots a^i_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a^i_{\alpha_1\beta_1\ldots\beta_{k_2}\gamma_1}\cdots\cdots a^i_{\alpha_1\beta_1\ldots\beta_{k_2}\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}}\end{pmatrix},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\begin{pmatrix} a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\beta_1\gamma_1}\cdots\cdots a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\beta_1\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\beta_1\ldots\beta_{k_2}\gamma_1}\ldots a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_1}\beta_1\ldots\beta_{k_2}\gamma_1\ldots\gamma_{k_3}}\end{pmatrix}
\end{array}\right]\ (A),
\end{array}\right.
$$

où l'indice (γ) concerne les coordonnées de R_{p_3} et les ensembles de chaque matrice sont désignés par $M^{k_3}_{np_3}, M^{k_3}_{p_1p_3}, M^{k_3}_{p_2p_3}, M^{k_2k_3}_{np_2p_3}, M^{k_2k_3}_{p_1p_2p_3}, M^{k_1k_3}_{np_1p_3}, M^{k_1k_2k_3}_{np_1p_2p_3}$ (l'ensemble de (A)), respectivement.
De même qu'à §5, on a la

DÉFINITION. *Nous pouvons considérer le jet d'ordre (k_1, k_2, k_3), de source $(O\in R_{p_1}, O\in R_{p_2}, O\in R_{p_3})$ et de but $(O \in R_n)$, d'une application bien déterminée de la forme*

$$
u^i = \sum_{\lambda=1}^{k_1}\frac{1}{\lambda!}\Big[a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_\lambda} + \sum_{\mu=1}^{k_2}\frac{1}{\mu!}\Big(a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_\lambda\beta_1\ldots\beta_\mu}
+ \sum_{\nu=1}^{k_3}\frac{1}{\nu!}\, a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_\lambda\beta_1\ldots\beta_\mu\gamma_1\ldots\gamma_\nu}x^{\gamma_1}\ldots x^{\gamma_\nu}\Big)x^{\beta_1}\ldots x^{\beta_\mu}\Big]x^{\alpha_1}\ldots x^{\alpha_\lambda}.
$$

L'ensemble de ces jets est désigné par $L'^{k_1k_2k_3}_{np_1p_2p_3}$. En général, $L'^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}$ peut être défini de la même manière.

On peut regarder les matrices $X \in M^{k_1k_2}_{np_1p_2}$, (A) de (8.2) comme exprimant un élément de $L'^{k_1k_2k_3}_{np_1p_2p_3}$. Donc, on a la

PROPOSITION 8.1. *$L^{k_1k_2k_3}_{np_1p_2p_3}$ se décompose comme suit:*

$$
(8.3)\qquad L^{k_1k_2k_3}_{np_1p_2p_3}: (L^{k_3}_{np_3}, L^{k_3}_{p_1p_3}, L^{k_3}_{p_2p_3}, L'^{k_1k_3}_{np_1p_3}, L'^{k_2k_3}_{np_2p_3}, L'^{k_2k_3}_{p_1p_2p_3}, L'^{k_1k_2k_3}_{np_1p_2p_3}).
$$

Par conséquent, en général on a la

PROROSITION 8. 2. *L'expression suivante est obtenue*

$$
(8.4)\quad \left\{
\begin{aligned}
L_{np_1\dots p_{s-1}p_s}^{k_1\dots k_{s-1}k_s} :(& L_{np_s}^{k_s},\ L'^{k_1k_s}_{np_1k_s},\ L'^{k_2k_s}_{np_2p_s},\dots\dots,\ L'^{k_{s-1}k_s}_{np_{s-1}p_s},\\
& L'^{k_1k_2k_s}_{np_1p_2p_s},\ L'^{k_1k_3k_s}_{np_1p_3p_s},\dots\dots,\ L'^{k_{s-2}k_{s-1}k_s}_{np_{s-2}p_{s-1}p_s},\dots\dots,\ L'^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s};\\
& L_{p_1p_s}^{k_s},\ L'^{k_2k_s}_{p_1p_2p_s},\dots\dots,\ L'^{k_{s-1}k_s}_{p_1p_{s-1}p_s},\dots\dots,\ L'^{k_2\dots k_s}_{p_1p_2\dots p_s};\\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\
& L_{p_{s-3}p_s}^{k_s},\ L'^{k_{s-2}k_s}_{p_{s-3}p_{s-2}p_s},\ L'^{k_{s-1}k_s}_{p_{s-3}p_{s-1}p_s},\ L'^{k_{s-2}k_{s-1}k_s}_{p_{s-3}p_{s-2}p_{s-1}p_s};\\
& L_{p_{s-2}p_s}^{k_s},\ L'^{k_{s-1}k_s}_{p_{s-2}p_{s-1}p_s};\ L_{p_{s-1}p_s}^{k_s}).
\end{aligned}
\right.
$$

D'autre part, ainsi que nous avons considéré à §8, $L_{np_1p_2p_3}^{k_1k_2k_3}$ peut s'exprimer par les matrices (8. 1),(8. 2).

PROPOSITION 8. 3. *On a l'expression suivante*

$$
(8.3')\quad \begin{aligned}
L_{np_1p_2p_3}^{k_1k_2k_3} \equiv (& O\in R_n,\ O\in R_{p_1},\ O\in R_{p_2},\ O\in R_{p_3},\ M_{np_1}^{k_1},\ M_{np_2}^{k_2},\ M_{p_1p_2}^{k_2},\ M_{np_3}^{k_3},\\
& M_{p_1p_3}^{k_3},\ M_{p_2p_3}^{k_3},\ M_{np_1p_2}^{k_1k_2},\ M_{np_1p_3}^{k_1k_3},\ M_{np_2p_3}^{k_2k_3},\ M_{p_1p_2p_3}^{k_2k_3},\ M_{np_1p_2p_3}^{k_1k_2k_3}).
\end{aligned}
$$

Lorsque nous définissons l'opération suivante

$$
(8.5)\quad \begin{aligned}
&[O \in R_n,\ O \in R_{p_1},\dots\dots,O \in R_{p_s},\ M_{\alpha\beta}^{\gamma},\dots\dots,\ M_{\lambda\mu\dots\nu}^{\delta\dots\epsilon}]_{,p}^{k}\\
&\equiv (O \in R_p,\ M_{\alpha\beta p}^{\gamma k},\dots\dots,\ M_{\lambda\mu\dots\nu p}^{\delta\dots\epsilon k}),
\end{aligned}
$$

l'expression (4. 4) peut s'écrire

$$
L_{np_1p_2}^{k_1k_2} \equiv (M_{np_2}^{k_2},\ M_{p_1p_2}^{k_2},\ L_{np_1}^{k_1},\ [L_{np_1}^{k_1}]_{,p_2}^{k_2})
$$

et la forme (8. 3′) devient

$$
(8.3'')\quad L_{np_1p_2p_3}^{k_1k_2k_3} \equiv (M_{np_3}^{k_3},\ M_{p_1p_3}^{k_3},\ M_{p_2p_3}^{k_3},\ L_{np_1p_2}^{k_1k_2},\ [L_{np_1p_2}^{k_1k_2}]_{,p_3}^{k_3}).
$$

Par conséquent, en général on a la

PROPOSITION 8. 4. *Nous avons l'expression de* $L_{np_1\dots p_s}^{k_1\dots k_s}$ *de la forme récurrente*

$$
(8.6)\quad L_{np_1\dots p_s}^{k_1\dots k_s} \equiv (M_{np_s}^{k_s},\ M_{p_1p_s}^{k_s},\dots\dots,M_{p_{s-1}p_s}^{k_s},\ L_{np_1\dots p_{s-1}}^{k_1\dots k_{s-1}},\ [L_{np_1\dots p_{s-1}}^{k_1\dots k_{s-1}}]_{,p_s}^{k_s}).
$$

9. Jets d'ordre l **entre deux ensembles de jets d'ordre** $(k_1, k_2,\dots\dots,k_s)$. Pour appliquer à la discussion du prolongement principal nous énonçons sur l'ensemble

$$
(9.1)\quad J^l(\Phi^{k_s}(R_{p_s},\dots,\Phi^{k_2}(R_{p_2}, \Phi^{k_1}(R_{p_1}, R_n))\dots),\ \Phi^{k_s}(R_{q_s},\dots,\Phi^{k_2}(R_{q_2},\Phi^{k_1}(R_{q_1}, R_m))\dots)).
$$

D'abord, nous considérons en cas $s = 2$. En prennant les trois cas suivants (I), (II), (III), nous allons énoncer.

(I) Nous considérons l'ensemble de jets entre deux ensembles de jets d'ordre (k_1, k_2)

$$J^l(\Phi^{k_2}(R_{q_2}, \Phi^{k_1}(R_{q_1}, R_n)),\ \Phi^{k_2}(R_{q_2}, \Phi^{k_1}(R_{q_1}, R_m))) \tag{9.2}$$

de source (8. 1) et de but en élément de $L^{k_1k_2}_{mq_1q_2}$, $(l \geqq k_1, k_2)$,

$$\left(\begin{array}{l} (O \in R_m), (O \in R_{q_1}), (O \in R_{q_2}), (a^j_{\gamma_1} \cdots a^j_{\gamma_1 \ldots \gamma_{k_1}}), (a^j_{\delta_1} \cdots a^j_{\delta_1 \ldots \delta_{k_2}}), \\ (b^\gamma_{\delta_1} \cdots\cdots b^\gamma_{\delta_1 \ldots \delta_{k_2}}), \begin{pmatrix} a^j_{\gamma_1\delta_1} \cdots\cdots a^j_{\gamma_1\delta_1\ldots\delta_{k_2}} \\ a^j_{\gamma_1\gamma_2\delta_1} \cdots\cdots a^j_{\gamma_1\gamma_2\delta_1\ldots\delta_{k_2}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^j_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_1}\delta_1} \cdots\cdots a^j_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_1}\delta_1\ldots\delta_{k_2}} \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

où les indices $(i), (j), (\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$ concernent respectivement les coordonnées de $R_n, R_m, R_{p_1}, R_{p_2}, R_{q_1}, R_{q_2}$. Et nous considérons l'élément de (9.2) qui est un jet d'ordre l des applications de la forme (Voir les notations à §5)

$$\left\{\begin{array}{l} u^j = \alpha^j_{i_1} u^{i_1} + \dfrac{1}{2!}\alpha^j_{i_1i_2} u^{i_1} u^{i_2} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{l!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l} u^{i_1} \cdots\cdots u^{i_l}, \\ \left\{\begin{array}{l} u^j_{\gamma_1} = \left(\alpha^j_{i_1} + \alpha^j_{i_1i_2} u^{i_2} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{(l-1)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l} u^{i_2} \cdots\cdots u^{i_l}\right) u^{i_1}_{\gamma_1}, \\ u^j_{\delta_1} = \left(\alpha^j_{i_1} + \alpha^j_{i_1i_2} u^{i_2} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{(l-1)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l} u^{i_2} \cdots\cdots u^{i_l}\right) u^{i_1}_{\delta_1}, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} u^j_{\gamma_1\delta_1} = \left(\alpha^j_{i_1i_2} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{(l-2)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l} u^{i_3} \cdots\cdots u^{i_l}\right) u^{i_1}_{\gamma_1} u^{i_2}_{\delta_1} \\ \qquad + \left(\alpha^j_{i_1} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{(l-1)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l} u^{i_2} \cdots\cdots u^{i_l}\right) u^{i_1}_{\gamma_1\delta_1}, \\ u^j_{\gamma_1\gamma_2} = \left(\alpha^j_{i_1i_2} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{(l-2)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l} u^{i_3} \cdots\cdots u^{i_l}\right) u^{i_1}_{\gamma_1} u^{i_2}_{\gamma_2} \\ \qquad + \left(\alpha^j_{i_1} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{(l-1)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l} u^{i_2} \cdots\cdots u^{i_l}\right) u^{i_1}_{\gamma_1\gamma_2} \\ u^j_{\delta_1\delta_2} = \left(\alpha^j_{i_1i_2} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{(l-2)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l} u^{i_3} \cdots\cdots u^{i_l}\right) u^{i_1}_{\delta_1} u^{i_2}_{\delta_2} \\ \qquad + \left(\alpha^j_{i_1} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{(l-1)!}\alpha^j_{i_1\ldots i_l} u^{i_2} \cdots\cdots u^{i_l}\right) u^{i_1}_{\delta_1\delta_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \\ u^j_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_1}\delta_1\ldots\delta_{k_2}} \\ \quad = \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{k_1+k_2} \sum_{(+\mu_\lambda)}^{k_1}{}^{*} \sum_{(+\omega_\lambda)}^{k_2}{}^{*} \frac{k_1!}{\mu_1!\ldots\mu_\lambda!} \frac{k_2!}{\omega_1!\ldots\omega_\lambda!} \frac{1}{\nu_0!\nu_1!\ldots\nu_{k_1+k_2-\lambda+1}!} \\ \quad \times \dfrac{\partial^\lambda u^j}{\partial u^{i_1}\partial u^{i_2}\ldots\partial u^{i_\lambda}} u^{i_1}_{((\gamma(\mu_1)\delta(\omega_1)} u^{i_2}_{\gamma(\mu_2)\delta(\omega_2)} \ldots u^{i_\lambda}_{\gamma(\mu_\lambda)\delta(\omega_\lambda)))}, \end{array}\right. \tag{9.3}$$

d'où, on a la relation suivante entre la source et le but

$$
(9.4)\quad \begin{cases}
\begin{cases} a^j_{\gamma_1} = \alpha^j_{i_1} a^{i_1}_{\gamma_1}, \\ a^j_{\delta_1} = a^j_{i_1} a^{i_1}_{\delta_1}, \end{cases} \\
\begin{cases} a^j_{\gamma_1\gamma_2} = \alpha^j_{i_1 i_2} a^{i_1}_{\gamma_1} a^{i_2}_{\gamma_2} + \alpha^j_{i_1} a^{i_1}_{\gamma_1\gamma_2}, \\ a^j_{\gamma_1\delta_1} = \alpha^j_{i_1 i_2} a^{i_1}_{\gamma_1} a^{i_2}_{\delta_1} + \alpha^j_{i_1} a^{i_1}_{\gamma_1\delta_1}, \\ a^j_{\delta_1\delta_2} = \alpha^j_{i_1 i_2} a^{i_1}_{\delta_1} a^{i_2}_{\delta_2} + \alpha^j_{i_1} a^{i_1}_{\delta_1\delta_2}, \end{cases} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
a^j_{\gamma_1\dots\gamma k_1 \delta_1\dots\delta k_2} = \sum_{\lambda=1}^{k_1+k_2} \sum_{(+\mu_\lambda)}^{k_1}{}^{*} \sum_{(+\omega_\lambda)}^{k_2}{}^{*} \frac{k_1!}{\mu_1!\dots\mu_\lambda!} \frac{k_2!}{\omega_1!\dots\omega_\lambda!} \frac{1}{\nu_0 \nu_1!\dots\nu_{k_1+k_2-\lambda+1}!} \\
\qquad \times \alpha^j_{i_1 i_2\dots i_\lambda} a^{i_1}_{((\gamma(\mu_1)\delta(\omega_1)} a^{i_2}_{\gamma(\mu_2)\delta(\omega_2)} \cdots a^{i_\lambda}_{\gamma(\mu_\lambda)\delta(\omega_\lambda)))} .
\end{cases}
$$

DÉFINITION. *L'ensemble* (9.2) *de jets d'ordre l des applications de la forme* (9.3) *entre deux ensembles de jets d'ordre* (k_1, k_2) *est appelé celui de* $1^{ère}$ *espèce et on le désigne par* $L^{\,l\ \ k_1k_2}_{mq_1q_2 nq_1q_2}$.

Donc, on peut déduire la

PROPOSITION 9.1. L^l_{mn} *est essentiel dans* $L^{\,l\ \ \ k_1k_2}_{mq_1q_2, nq_1q_2}$ *et de cela nous pouvons utiliser l'expression suivante*:

$$
(9.5)\qquad L^{\,l\ \ \ k_1k_2}_{mq_1q_2, nq_1q_2} \equiv L_{mn}{}^{l}(\!(L^{k_1k_2}_{nq_1q_2})\!), \qquad (l \geqq k_1,\ k_2).
$$

(II) De la même manière que le cas (II) de § 5, nous pouvons considérer les autres ensembles de jets d'ordre l entre deux ensembles de jets d'ordre (k_1, k_2),

$$
(9.6a)\qquad J^l(\Phi^{k_2}(R_{q_2}, \Phi^{k_1}(R_{p_1}, R_n)\!), \Phi^{k_2}(R_{q_2}, \Phi^{k_1}(R_{q_1}, R_n)\!)),
$$

$$
(9.6b)\qquad J^l(\Phi^{k_2}(R_{p_2}, \Phi^{k_1}(R_{q_1}, R_n)\!), \Phi^{k_2}(R_{q_2}, \Phi^{k_1}(R_{q_1}, R_n)\!)),
$$

$$
(9.6c)\qquad J^l(\Phi^{k_2}(R_{p_2}, \Phi^{k_1}(R_{p_1}, R_n)\!), \Phi^{k_2}(R_{q_2}, \Phi^{k_1}(R_{q_1}, R_n)\!)).
$$

DÉFINITION. *Les ensembles* (9.6a), (9.6b), (9.6c) *resp. des jets d'ordre l des applications de trois formes suivantes* (9.7a), (9.7b), (9.7c), *resp. sont appelés ensembles des jets d'ordre l de* 2^e *espèce entre deux ensembles des jets d'ordre* (k_1, k_2) *et s'expriment par* $L^{\,l\ \ \ k_1k_2}_{nq_1q_2, np_1q_2}$, $L^{\,l\ \ \ k_1k_2}_{nq_1q_2, nq_1p_2}$, $L^{\,ll\ \ \ k_1k_2}_{nq_1q_2, np_1p_2}$:

$$
(9.7a)\quad \begin{cases}
x^\alpha = \beta^\alpha_{\gamma_1} x^{\gamma_1} + \dfrac{1}{2!} \beta^\alpha_{\gamma_1\gamma_2} x^{\gamma_1} x^{\gamma_2} + \cdots + \dfrac{1}{l!} \beta^\alpha_{\gamma_1\dots\gamma_l} x^{\gamma_1}\dots x^{\gamma_l}, \\
u^i_{\gamma_1} = u^i_{\alpha_1}(\beta^{\alpha_1}_{\gamma_1} + \beta^{\alpha_1}_{\gamma_1\gamma_2} x^{\gamma_2} + \cdots + \dfrac{1}{(l-1)!} \beta^{\alpha_1}_{\gamma_1\dots\gamma_l} x^{\gamma_2}\dots x^{\gamma_l}), \\
u^i_{\delta_1} = u^i_{\delta_1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{cases}
$$

$$\left\{\begin{aligned} u^i_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_1}\delta_1\ldots\delta_{k_2}} = \sum_{\lambda=1}^{k_1}\sum_{(+\rho\lambda)}^{k_1} \frac{k_1!}{\rho_1!\ldots\rho_\lambda!\nu_1!\ldots\nu_{k_1-\lambda+1}!} u^i_{\alpha_1\ldots\alpha_\lambda\delta_1\ldots\delta_{k_2}} \\ \times \frac{\partial^{\rho_1}x^{\alpha_1}}{\partial x^{(\gamma_1}\ldots\partial x^{\gamma_{\rho_1}}} \frac{\partial^{\rho_2}x^{\alpha_2}}{\partial x^{\gamma_{\rho_1+1}}\ldots\partial x^{\gamma_{\rho_1+\rho_2}}}\cdots\frac{\partial^{\rho_\lambda}x^{\alpha_\lambda}}{\partial x^{\gamma_{\rho_1+\ldots+\rho_{\lambda-1}+1}}\ldots\partial x^{\gamma_{\rho+\ldots+\rho_\lambda)}}} \end{aligned}\right.$$

où nous avons la relation suivante entre la source et le but

$$(9.7a')\quad \left\{\begin{aligned} & a^i_{\gamma_1} = a^i_{\alpha_1}\beta^{\alpha_1}_{\gamma_1}, \\ & a^i_{\delta_1} = a^i_{\delta_1}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & a^i_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_1}\delta_1\ldots\delta_{k_2}} = \sum_{\lambda=1}^{k_1}\sum_{(+\rho\lambda)}^{k_1}\frac{k_1!}{\rho_1!\ldots\rho_\lambda!\ \nu_1!\ldots\nu_{k_1-\lambda+1}!} a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_\lambda\delta_1\ldots\delta_{k_2}} \\ & \qquad \times \beta^{\alpha_1}_{(\gamma(\rho_1)}\cdots\beta^{\alpha_\lambda}_{\gamma(\rho_\lambda))}\ ; \end{aligned}\right.$$

$$(9.7b)\quad \left\{\begin{aligned} & x^\beta = \beta^\beta_{\delta_1}x^{\delta_1} + \frac{1}{2!}\beta^\beta_{\delta_1\delta_2}x^{\delta_1}x^{\delta_2} + \cdots + \frac{1}{l!}\beta^\beta_{\delta_1\ldots\delta_l}x^{\delta_1}\ldots x^{\delta_l}, \\ & u^i_{\gamma_1} = u^i_{\gamma_1}, \\ & u^i_{\delta_1} = u^i_{\beta_1}\left(\beta^{\beta_1}_{\delta_1} + \beta^{\beta_1}_{\delta_1\delta_2}x^{\delta_2} + \cdots + \frac{1}{(l-1)!}\beta^{\beta_1}_{\delta_1\ldots\delta_l}x^{\delta_2}\ldots x^{\delta_l}\right), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & u^i_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_1}\delta_1\ldots\delta_{k_2}} = \sum_{\mu=1}^{k_2}\sum_{(+\sigma\mu)}^{k_2}\frac{k_2!}{\sigma_1!\ldots\sigma_\mu!\ \omega_1!\ldots\omega_{k_2-\mu+1}!} u^i_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_1}\beta_2\ldots\beta_\mu} \\ & \quad \times \frac{\partial^{\sigma_1}x^{\beta_1}}{\partial x^{(\delta_1}\ldots\partial x^{\delta_{\sigma_1}}}\frac{\partial^{\sigma_2}x^{\beta_2}}{\partial x^{\delta_{\sigma_1+1}}\ldots\partial x^{\delta_{\sigma_1+\sigma_2}}}\cdots\frac{\partial^{\sigma_\mu}x^{\beta_\mu}}{\partial x^{\delta_{\sigma_1+\ldots+\sigma_{\mu-1}+1}}\ldots\partial x^{\delta_{\sigma_2+\ldots+\sigma_\mu)}}}, \end{aligned}\right.$$

où on a la relation suivante entre la source et le but

$$(9.7b')\quad \left\{\begin{aligned} & a^i_{\gamma_1} = a^i_{\gamma_1}, \\ & a^i_{\delta_1} = a^i_{\beta_1}\beta^{\beta_1}_{\delta_1}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a^i_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_1}\delta_1\ldots\delta_{k_2}} = \sum_{\mu=1}^{k_2}\sum_{(+\sigma\mu)}^{k_2}\frac{k_2!}{\sigma_1!\ldots\sigma_\mu!\ \nu_1!\ldots\nu_{k_2-\mu+1}!} a^i_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_1}\beta_1\ldots\beta_\mu} \\ & \qquad \times \beta^{\beta_1}_{(\delta(\sigma_1)}\cdots\beta^{\beta_\mu}_{\delta(\sigma_\mu))}\ ; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} & x^\alpha = \beta^\alpha_{\gamma_1}x^{\gamma_1} + \frac{1}{2!}\beta^\alpha_{\gamma_1\gamma_2}x^{\gamma_1}x^{\gamma_2} + \ldots + \frac{1}{l!}\beta^\alpha_{\gamma_1\ldots\gamma_l}x^{\gamma_1}\ldots x^{\gamma_l}, \\ & x^\beta = \beta^\beta_{\delta_1}x^{\delta_1} + \frac{1}{2!}\beta^\beta_{\delta_1\delta_2}x^{\delta_1}x^{\delta_2} + \cdots + \frac{1}{l!}\beta^\beta_{\delta_1\ldots\delta_l}x^{\delta_1}\ldots x^{\delta_l}, \end{aligned}\right.$$

$$
(9.7\text{c})\quad\left\{\begin{aligned}
&u^i_{\gamma_1} = u^i_{\alpha_1}\Big(\beta^{\alpha_1}_{\gamma_1} + \beta^{\alpha_1}_{\gamma_1\gamma_2}x^{\gamma_2} + \cdots + \frac{1}{(l-1)!}\beta^{\alpha_1}_{\gamma_1\ldots\gamma_l}x^{\gamma_2}\ldots x^{\gamma_l}\Big),\\
&u^i_{\delta_1} = u^i_{\beta_1}\Big(\beta^{\beta_1}_{\delta_1} + \beta^{\beta_1}_{\delta_1\delta_2}x^{\delta_2} + \cdots + \frac{1}{(l-1)!}\beta^{\beta_1}_{\delta_1\ldots\delta_l}x^{\delta_2}\ldots x^{\delta_l}\Big),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&u^i_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_1}\delta_1\ldots\delta_{k_2}}\\
&\quad=\sum_{\lambda=1}^{k_1}\sum_{\mu=1}^{k_2}\sum_{(+\rho\lambda)}^{k_1}\sum_{(+\sigma\mu)}^{k_2}\frac{k_1!}{\rho_1!\ldots\rho_\lambda!\ \nu_1!\ldots\nu_{k_1-\lambda+1}!}\,\frac{k_2!}{\sigma_1!\ldots\sigma_\mu!\ \omega_1!\ldots\omega_{k_2-\mu+1}!}\\
&\quad\times u^i_{\alpha_1\ldots\alpha_\lambda\beta_1\ldots\beta_\mu}\\
&\quad\times\frac{\partial^{\rho_1}x^{\alpha_1}}{\partial x^{(\gamma_1}\ldots\partial x^{\gamma_{\rho_1}}}\,\frac{\partial^{\rho_2}x^{\alpha_2}}{\partial x^{\gamma_{\rho_1+1}}\ldots\partial x^{\gamma_{\rho_1+\rho_2}}}\cdots\frac{\partial^{\rho_\lambda}x^{\alpha_\lambda}}{\partial x^{\gamma_{\rho_1+\ldots+\rho_{\lambda-1}+1}}\ldots\partial x^{\gamma_{\rho_1+\ldots+\rho_\lambda)}}}\\
&\quad\times\frac{\partial^{\sigma_1}x^{\beta_1}}{\partial x^{(\delta_1}\ldots\partial x^{\delta_{\sigma_1}}}\,\frac{\partial^{\sigma_2}x^{\beta_2}}{\partial x^{\delta_{\sigma_1+1}}\ldots\partial x^{\delta_{\sigma_1+\sigma_2}}}\cdots\frac{\partial^{\sigma_\mu}x^{\beta_\mu}}{\partial x^{\delta_{\sigma_1+\ldots+\sigma_{\mu-1}+1}}\ldots\partial x^{\delta_{\sigma_1+\ldots+\sigma_\mu)}}},
\end{aligned}\right.
$$

dont la relation entre la source et le but s'écrit

$$
(9.7\text{c}')\quad\left\{\begin{aligned}
&a^i_{\gamma_1} = a^i_{\alpha_1}\beta^{\alpha_1}_{\gamma_1},\\
&a^i_{\delta_1} = a^i_{\beta_1}\beta^{\beta_1}_{\delta_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a^i_{\gamma_1\ldots\gamma_{k_1}\delta_1\ldots\delta_{k_2}}\\
&\quad=\sum_{\lambda=1}^{k_1}\sum_{\mu=1}^{k_2}\sum_{(+\rho\lambda)}^{k_1}\sum_{(+\sigma\mu)}^{k_2}\frac{k_1!}{\rho_1!\ldots\rho_\lambda!\ \nu_1!\ldots\nu_{k_1-\lambda+1}!}\,\frac{k_2!}{\sigma_1!\ldots\sigma_\mu!\,\omega_1!\ldots\omega_{k_2-\mu+1}!}\\
&\quad\times a^i_{\alpha_1\ldots\alpha_\lambda\beta_1\ldots\beta_\mu}\beta^{\alpha_1}_{((\gamma\rho_1)}\beta^{\alpha_2}_{(\gamma\rho_2)}\ldots\beta^{\alpha_\lambda}_{(\gamma\rho_\lambda))}\beta^{\beta_1}_{((\delta\sigma_1)}\beta^{\beta_2}_{(\delta\sigma_2)}\ldots\beta^{\beta_\mu}_{(\delta\sigma_\mu))}.
\end{aligned}\right.
$$

Alors, nous avons la proposition concernant ces ensembles des jets d'ordre (k_1, k_2) de 2$^{\text{e}}$ espèce.

PROPOSITION 9.2. *On trouve les expressions*

$$
(9.8)\quad\left\{\begin{aligned}
&L^{l\ \ k_1k_2}_{nq_1q_2,np_1q_2} \equiv \big(\!\big(L^{k_1k_2}_{np_1q_2}\big)\!\big)\ L^{l}_{p_1q_1},\\
&L^{l\ \ k_1k_2}_{nq_1q_2,nq_1p_2} \equiv \big(\!\big(L^{k_1k_2}_{nq_1p_2}\big)\!\big)\ L^{l}_{p_2q_2},\\
&L^{l\,l\ \ k_1k_2}_{nq_1q_2,np_1p_2} \equiv \big(\!\big(L^{k_1k_2}_{np_1p_2}\big)\!\big)\ L^{l}_{p_1q_1}\times L^{l}_{p_2q_2},
\end{aligned}\right.
$$

où la marque de multiplication "$\times$" dans la forme précédente signifie la relation de (9.7c).

(III) De plus, on peut considérer les trois ensembles de jets d'ordre (k_1,k_2)

(9.9a) $\qquad J^l(\Phi^{k_2}(R_{q_2}, \Phi^{k_1}(R_{p_1}, R_n)),\ \Phi^{k_2}(R_{q_2}, \Phi^{k_1}(R_{q_1}, R_m))),$

(9.9b) $\qquad J^l(\Phi^{k_2}(R_{p_2}, \Phi^{k_1}(R_{q_1}, R_n)),\ \Phi^{k_2}(R_{q_2}, \Phi^{k_1}(R_{q_1}, R_m))),$

(9.9c) $\qquad J^l(\Phi^{k_2}(R_{p_2}, \Phi^{k_1}(R_{p_1}, R_n)),\ \Phi^{k_2}(R_{q_2}, \Phi^{k_1}(R_{q_1}, R_m))).$

DÉFINITION. *Les ensembles de jets d'ordre l de 3^e espèce entre deux ensembles de jets d'ordre (k_1, k_2) sont définis par les ensembles de jets d'ordre l des applications de trois formes* (9.10a), (9.10b), (9.10c) *et sont désignés par*

$$L^{l\ l\ \ k_1k_2}_{mq_1q_2,np_1q_2},\ L^{l\ \ l\ \ k_1k_2}_{mq_1q_2,nq_1p_2},\ L^{l\ l\ l\ \ k_1k_2}_{mq_1q_2,np_1p_2}:$$

(9.10a), (9.10b), (9.10c) $\left\{ \right.$ *les formes resp. substituées $u^i_{\gamma_1}, u^i_{\delta_1}, \dots, u^i_{\gamma_1\dots\gamma_{k_1}}, u^i_{\delta_1\dots\delta_{k_2}}$ dans* (9.3) *par les termes droits de ceux de* (9.7a), (9.7b), (9.7c), *resp.*,

où nous avons les relations resp. entre la source et le but

(9.10a′), (9.10b′), (9.10c′) $\left\{ \right.$ *les formes resp. substituées $a^i_{\gamma_1}, a^i_{\delta_1}, \dots, a^i_{\gamma_1\dots\gamma_{k_1}}, a^i_{\delta_1\dots\delta_{k_2}}$ dans* (9.4) *par les termes droits de ceux de* (9.7a′), (9.7b′), (9.7c′), *resp.*

PROPOSITION 9.3. *Nous avons les expressions d'ensemble de jets d'ordre l entre deux ensembles de jets d'ordre (k_1, k_2)*

$$\text{(9.11)}\qquad \left\{\begin{aligned} L^{l\ l\ \ k_1k_2}_{mq_1q_2,np_1q_2} &\equiv L^{\ l}_{mn}(\!(L^{k_1k_2}_{np_1q_2})\!)\ L^{\ l}_{p_1q_1},\\ L^{l\ \ l\ \ k_1k_2}_{mq_1q_2,nq_1q_2} &\equiv L^{\ l}_{mn}(\!(L^{k_1k_2}_{nq_1p_2})\!)\ L^{\ l}_{p_2q_2},\\ L^{l\ l\ l\ \ k_1k_2}_{mq_1q_2,np_1p_2} &\equiv L^{\ l}_{mn}(\!(L^{k_1k_2}_{np_1p_2})\!)\ L^{\ l}_{p_1q_1} \times L^{\ l}_{p_2q_2}. \end{aligned}\right.$$

Généralement, nous avons les ensembles de jets d'ordre l entre deux ensembles de jets d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ et (9.5), (9.8), (9.11) sont généralisés comme suit :

PROPOSITION 9.4. *L'ensemble de jets d'ordre l de $1^{ère}$ espèce entre deux ensembles de jets d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ est représenté par*

$$\text{(9.12)}\qquad L^{l\qquad k_1\dots k_s}_{mq_1\dots q_s,nq_1\dots q_s} \equiv L^{\ l}_{mn}(\!(L^{k_1\dots k_s}_{nq_1\dots q_s})\!).$$

PROPOSITION 9.5. *Un ensemble de jets d'ordre l de 2^e espèce entre deux ensembles de jets d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ est exposé par*

$$\text{(9.13)}\qquad L^{l,\dots,l\ \ k_1\dots k_s}_{nq_1\dots q_s,np_1\dots p_s} \equiv (\!(L^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s})\!)\ L^{\ l}_{p_1q_1} \times \dots \times L^{\ l}_{p_sq_s}.$$

pour les autres ensembles de 2^e espèce, dans lesquels p_a est égal à q_a (a: nombre entier arbitraire $1 \leqq a \leqq s$) dans la forme précédente, $L^{\ l}_{p_aq_a}$ à droite est disparu. On trouve $2^s - 1$ ensembles de 2^e espèce.

En calculant les permutations de deux éléments $(q_a = p_a)$, $(q_a \neq p_a)$ admettant répétition, on peut trouver 2^s cas. Mais, comme le cas de tout $q_a \equiv p_a$ n'existe pas, nous avons $2^s - 1$ ensembles de 2^e espèce. De même, nous obtenons $2^s - 1$ ensembles de 3^e espèce.

PROPOSITION 9.6. *Un ensemble de jets d'ordre l de 3^e espèce entre deux ensembles de jets d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ est exprimé par*

$$L^{l\,l\ldots l\;k_1\ldots k_s}_{mq_1\ldots q_s, np_1\ldots p_s} = L_{mn}^{\;l}((L^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}))\; L_{p_1q_1}^{\;l} \times \ldots \times L_{p_sq_s}^{\;l}, \tag{9.14}$$

pour les autres de 3^e espèce, lorsque p_a est égal à q_a dans la forme précédente, $L_{p_aq_a}^{\;l}$ à droite est disparu. Nous avons 2^s-1 ensembles de 3^e espèce.

10. Groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s;\, l)$ de V_n. En posant $m=n$ à § 9, nous avons l'ensemble $L^{l\;\;k_1k_2}_{n'p_1p_2, np_1p_2}$ [3] de jets d'ordre $(k_1, k_2;\, l)$, le rang de cet ensemble est défini par le rang de $L_{n'n}^{\;l}$, c'est-à-dire, le rang de (α_i^j). Lorsque cet ensemble est de rang n, il est marqué par

$$L^{k_1k_2\,l}_{np_1p_2, n} \equiv L^l_n((L^{k_1k_2}_{np_1p_2})). \tag{10.1}$$

Par l'atlas de R_n dans V_n, cet ensemble de rang n peut définir un *groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre $(k_1, k_2;\, l)$ de 1^{ere} espèce de V_n.*

De la même manière qu'à § 6, d'après les expressions (9.6), (9.7) d'ensembles de jets d'ordre l de 2^e espèce et de 3^e espèce, nous avons

$$\left\{\begin{array}{ll} L^{k_1k_2\,l}_{np_1p_2, p_1} \equiv ((L^{k_1k_2}_{np_1p_2}))\; L^l_{p_1} & \text{de rang } p_1, \\ L^{k_1k_2\,l}_{np_1p_2, p_2} \equiv ((L^{k_1k_2}_{np_1p_2}))\; L^l_{p_2} & \text{de rang } p_2, \\ L^{k_1k_2\,l\,l}_{np_1p_2, p_1p_2} \equiv ((L^{k_1k_2}_{np_1p_2}))\; L^l_{p_1} \times L^l_{p_2} & \text{de rang } (p_1, p_2) \end{array}\right. \tag{10.2}$$

et

$$\left\{\begin{array}{ll} L^{k_1k_2\,l\,l}_{np_1p_2, np_1} \equiv L^l_n((L^{k_1k_2}_{np_1p_2}))\; L^l_{p_1} & \text{de rang } (n, p_1), \\ L^{k_1k_2\,l\,l}_{np_1p_2, np_2} \equiv L^l_n((L^{k_1k_2}_{np_1p_2}))\; L^l_{p_2} & \text{de rang } (n, p_2), \\ L^{k_1k_2\,l\,l\,l}_{np_1p_2, np_1p_2} \equiv L^l_n((L^{k_1k_2}_{np_1p_2}))\; L^l_{p_1} \times L^l_{p_2} & \text{de rang } (n, p_1, p_2). \end{array}\right. \tag{10.3}$$

Donc, on a la

PROPOSITION 10.1. *Nous avons le groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre $(k_1, k_2;\, l)$ de 1^{ere} espèce, de 2^e espèce et de 3^e espèce. Et ces groupes sont exprimés par* (10.1), (10.2) *et* (10.3), *respectivement.*

En général, d'après le paragraphe précédent nous obtenons immédiatement la

PROPOSITION 10.2. *Les groupes d'isotropie infinitésimale d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s : l)$ sont obtenus et on trouve un groupe de 1^{ere} espèce, 2^s-1 groupes de 2^e ou 3^e espèce. Et le plus complexe groupe de 3^e espèce s'exprime par*

$$L^{k_1\ldots k_s\;ll,\ldots l}_{np_1\ldots p_s, np_1\ldots p_s} \equiv L^l_n((L^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}))\; L^l_{p_1} \times \cdots \times L^l_{p_s}$$

$$\text{de rang } (n, p_1, p_2, \ldots, p_s).$$

11. Prolongements d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s;\, l)$ de variété V_n. Appelons

3) La prime ($'$) est utilisée de même que celui de §6,

$(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, p_3^{k_3})$*-vitesse de* V_n *d'origine* x,$(x \in V_n)$ un élément de $J^{k_3}(R_{p_3}, T_{p_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(V_n)))$ de source $O \in R_p$ et de but (x, X), $X \in T_{p_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(V_n))$. Généralement, un élément de $J^{k_s}(R_{p_s}, T_{p_{s-1}}^{k_{s-1}}(\dots(T_{p_1}^{k_1}(V_n))\dots))$ de source $O \in R_{p_s}$ et de but (x, X) est appelé $(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_s^{k_s})$*-vitesse de* V_n *d'origine* x, $(x \in V_n)$, $X \in T_{p_{s-1}}^{k_{s-1}}(\dots(T_{p_1}^{k_1}(V_n))\dots)$. Soit $T_{p_s}^{k_s}(T_{p_{s-1}}^{k_{s-1}}(\dots(T_{p_1}^{k_1}(V_n))\dots))$ l'ensemble de $(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_s^{k_s})$-vitesses de V_n. Appelons $(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_s^{k_s})$*-covitesse de* V_n *d'origine* x, $(x \in V_n)$, un élément de $J^{k_s}(T^{*k_{s-1}}_{p_{s-1}}(\dots(T^{*k_1}_{p_1}(V_n))\dots), R_{p_s})$ de source (x, X^*) et de but $O \in R_{p_s}, X^* \in T^{*k_{s-1}}_{p_{s-1}}(\dots(T^{*k_1}_{p_1}(V_n))\dots)$. L'ensemble de $(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_s^{k_s})$-covitesse de V_n est noté $T^{*k_s}_{p_s}(T^{*k_{s-1}}_{p_{s-1}}(\dots(T^{*k_1}_{p_1}(V_n))\dots))$.

De même, nous pouvons aussi définir les autres ensembles dont l'élément est un mélange de vitesse et de covitesse comme suit :

$$T^{*k_s}_{p_s}(T^{k_{s-1}}_{p_{s-1}}(\dots(T^{k_1}_{p_1}(V_n))\dots)), \quad T^{k_s}_{p_s}(T^{*k_{s-1}}_{p_{s-1}}(\dots(T^{*k_1}_{p_1}(V_n))\dots)), \quad \text{etc.}$$

L'élément du premier ensemble est l'inverse de celui de l'ensemble de $(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_s^{k_s})$-vitesses de V_n.

À § 4, nous avons défini $L_{np_1p_2}^{k_1k_2}$, c'est-à-dire, $J^{k_2}(R_{p_2}, J^{k_1}(R_{p_1}, R_n))$, l'ensemble de jets d'ordre (k_1, k_2) de source $O \in R_{p_2}$ et de but $X \in L_{np_1}^{k_1}$. D'après l'atlas de R_n dans V_n, nous pouvons définir $J^{k_2}(R_{p_2}, J^{k_1}(R_{p_1}, V_n))$ l'ensemble de jets d'ordre k_2 de source $O \in R_{p_2}$, et de but (x, X), $x \in V_n$, $X \in L_{np_1}^{k_1}$. Donc, en vertu de la discussion à § 9 nous avons

$$J^l(J^{k_2}(R_{p_2}, J^{k_1}(R_{p_1}, R_n)), J^{k_2}(R_{p_2}, J^{k_1}(R_{p_1}, V_{n'})))$$

l'ensemble de jets d'ordre l de 1^{crc} espèce entre deux ensembles de jets d'ordre (k_1, k_2) de source $(O \in R_n, O \in R_{p_1}, O \in R_{p_2}, X \in L_{np_1p_2}^{k_1k_2})$ et de but $(x \in V_n, O \in R_{p_1}, (O \in R_{p_2}, X \in L_{np_1p_2}^{k_1k_2})$. Cela peut aussi s'écrire $J^l(T_{p_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(R_n)), T_{p_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(V_{n'})))$.

De même, on peut définir ceux de 2^e espèce, $J^l(T_{p_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(R_n)), T_{p_2}^{k_2}(T_{p'_1}^{k_1}(V_n)))$, $J^l(T_{p_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(R_n)), T_{p'_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(V_n)))$, $J^l(T_{p_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(R_n)), T_{p'_2}^{k_2}(T_{p'_1}^{k_1}(V_n)))$. Ainsi, ceux de 3^e espèce sont considérés $J^l(T_{p_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(R_n)), T_{p_2}^{k_2}(T_{p'_1}^{k_1}(V_{n'})))$, $J^l(T_{p_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(R_n)), T_{p'_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(V_{n'})))$, $J^l(T_{p_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(R_n)), T_{p'_2}^{k_2}(T_{p'_1}^{k_1}(V_{n'})))$.

Tout comme le paragraphe précédent, lorsque le rang de cet ensemble de 1^{cre} espèce est n, de 2^e espèce resp. p_1, p_2, (p_1, p_2) et de 3^e espèce resp. (n, p_1), (n, p_2), (n, p_1, p_2), nous désignons l'ensemble de $1^{ère}$ espèce par $H^l(T_{p_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(V_{n'})))$, de 2^e espèce par $H^l(T_{p_2}^{k_2}(T_{p'_1}^{k_1}(V_n)))$, $H^l(T_{p'_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(V_n)))$, $H^l(T_{p'_2}^{k_2}(T_{p'_1}^{k_1}(V_n)))$ et de 3^e espèce par $H^l(T_{p_2}^{k_2}(T_{p'_1}^{k_1}(V_{n'})))$, $H^l(T_{p'_2}^{k_2}(T_{p_1}^{k_1}(V_{n'})))$, $H^l(T_{p'_2}^{k_2}(T_{p'_1}^{k_1}(V_{n'})))$. Nous les appelons respectivement *prolongement principal d'ordre* $(k_1, k_2 : l)$ *de* V_n *de* $1^{ère}$ *espèce, de* 2^e *espèce et de* 3^e *espèce.* Les éléments des ensembles sont appelés *repères d'ordre* $(k_1, k_2; l)$ *de* V_n *de* $1^{ère}$ *espèce, de* 2^e *espèce et de* 3^e *espèce.* En échangeant la source et le but, nous pouvons aussi définir *corepère d'ordre* $(k_1, k_2; l)$. Comme § 7, on peut aussi considérer les ensembles mélangés qui sont définis par la manière de repère et celle de corepère.

Aussi en cas général, les considérations précédentes sont possibles et on a le prolongement principal d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s;\ l)$ de V_n de $1^{\text{ère}}$ espèce

$$H^l(T^{k_s}_{p_s}(T^{k_{s-1}}_{p_{s-1}}(\dots(T^{k_1}_{p_1}(V_{n'}))\dots))),$$

les prolongements principaux de 2^{e} espèce

$$\left.\begin{array}{l} H^l(T^{k_s}_{p_s}(T^{k_{s-1}}_{p_{s-1}}(\dots(T^{k_1}_{p'_1}(V_n))\dots))) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ H^l(T^{k_s}_{p'_s}(T^{k_{s-1}}_{p'_{s-1}}(\dots(T^{k_1}_{p'_1}(V_n))\dots))) \end{array}\right\} 2^s-1$$

et de 3^{e} espèce

$$\left.\begin{array}{l} H^l(T^{k_s}_{p_s}(T^{k_{s-1}}_{p_{s-1}}(\dots(T^{k_1}_{p'_1}(V_{n'}))\dots))) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ H^l(T^{k_s}_{p'_s}(T^{k_{s-1}}_{p'_{s-1}}(\dots(T^{k_1}_{p'_1}(V_{n'}))\dots))) \end{array}\right\} 2^s-1.$$

Finalement, en utilisant toutes les choses que nous avons énoncées jusqu'ici, le théorème est obtenu.

THÉORÈME 5. *Nous pouvons définir les structures fibrées suivantes sur*

$$E \equiv T^l_q(T^{k_s}_{p_s}(T^{k_{s-1}}_{p_{s-1}}(\dots(T^{k_1}_{p_1}(V_n))\dots))),\quad (l \geqq k_1, k_2, \dots, k_s).$$

En utilisant le groupe d'isotropie de 1^{ere} espèce, la structure fibrée devient

$$E[V_n,\ L^{k_1\dots k_s l}_{np_1\dots p_s q},\ L^l_n(L^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s}),\ H^l(T^{k_s}_{p_s}(\dots(T^{k_1}_{p_1}(V_{n'}))\cdots))].$$

En chageant ce groupe d'isotropie de $1^{ère}$ espèce et le prolongement principal de 1^{ere} espèce contre ceux de 2^e espèce, on peut aussi définir les structures fibrées

$$\left.\begin{array}{l} E[V_n,\ L^{k_1\dots k_s l}_{p_1\dots p_s q},\ (L^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s})L^l_{p_1},\ H^l(T^{k_s}_{p_s}(\dots(T^{k_1}_{p'_1}(V_n))\dots))] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ E[V_n,\ L^{k_1\dots k_s l}_{np_1\dots p_s q},\ (L^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s})L^l_{p_1}\times\dots\times L^l_{p_s},\ H^l(T^{k_s}_{p'_s}(\dots(T^{k_1}_{p'_1}(V_n))\dots))] \end{array}\right\} 2^s-1.$$

De même, en changeant contre ceux de 3^e espèce, les structures fibrées

$$\left.\begin{array}{l} E[V_n,\ L^{k_1\dots k_s l}_{np_1\dots p_s q},\ L^l_n(L^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s})L^l_{p_1},\ H^l(T^{k_s}_{p_s}(\dots(T^{k_1}_{p'_1}(V_{n'}))\dots))] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ E[V_n,\ L^{k_1\dots k_s l}_{np_1\dots p_s q},\ L^l_n(L^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s})L^l_{p_1}\times\dots\times L^l_{p_s},\ H^l(T^{k_s}_{p'_s}(\dots(T^{k_1}_{p'_1}(V_{n'}))\dots))] \end{array}\right\} 2^s-1$$

sont aussi définies sur E.

12. Théories analogues de jets semi-holonomes d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ **et de prolongements parfaits d'ordre** $(k_1, k_2, \dots, k_s;\ l)$. À § 3 nous avons déjà énoncé que tout jet semi-holonome $y \in \overline{L}^r_{mn}$ admet un représentant tensoriel de la forme (1. 1) et les coefficients ne sont pas nécessairement symétriques par rapport aux indices inférieurs. D'autre part, de § 4 jusqu'à présent, aucun exposé ne dépend des indices symétriques inférieurs des formes tensorielles.[4] Par conséquent, nous pouvons omettre les conditions de symétrie dans les définitions de tous jets de § 4 jusqu'à § 11. Et nous pouvons définir *jet semi-holonome d'ordre* $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ *de* $(V_{p_1}, V_{p_2}, \dots, V_{p_s})$ *dans* V_n, *jet semi-holonome d'ordre* l *entre deux ensembles de jets semi-holonomes d'ordre* $(k_1, k_2, \dots, k_s)$, *groupe d'isotropie infinitésimale semi-holonome d'ordre* $(k_1, k_2, \dots, k_s : l)$ *de* V_n *et prolongements parfaits d'ordre* $(k_1, k_2, \dots, k_s; l)$ *de variété* V_n. Et nous les désignons avec le symbole "$-$" sur L, par exemple : $\overline{L}{}^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s}$, $\overline{L}{}^{l\,l\dots\dots l\ \ k_1\dots k_s}_{mq_1\dots q_s, np_1\dots p_s}$, $\overline{L}{}^{k_1\dots k_s\,l\,l\dots\dots l}_{np_1\dots p_s, nq_1\dots q_s}$, $\overline{T}{}^{k_s}_{p_s}(\overline{T}{}^{k_{s-1}}_{p_{s-1}}(\dots(\overline{T}{}^{k_1}_{p_1}(V_n))\dots))$, etc. Par conséquent, nous obtenons analogiquement toutes les propositions et les théorèmes de § 4 jusqu'à § 11, en ajoutant le symbole "$-$" sur les notations $L^{\cdots}_{\cdots}$, $T^{\cdot}_{\cdot}$, H:

PROPOSITION 12. 1. *L'expression de décomposition*

$$\begin{aligned}\overline{L}{}^{k_1\dots k_{s-1}k_s}_{np_1\dots p_{s-1}p_s} : (&\overline{L}{}^{k_s}_{np_s}, \overline{L}'{}^{k_1k_s}_{np_1p_s}, \overline{L}'{}^{k_2k_s}_{np_2p_s}, \dots, \overline{L}'{}^{k_{s-1}k_s}_{np_{s-1}p_s},\\ &\overline{L}'{}^{k_1k_2k_s}_{np_1p_2p_s}, \overline{L}'{}^{k_1k_3k_s}_{np_1p_3p_s}, \dots, \overline{L}'{}^{k_{s-2}k_{s-1}k_s}_{np_{s-2}p_{s-1}p_s}, \dots, \overline{L}'{}^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s};\\ &\overline{L}{}^{k_s}_{p_1p_s}, \overline{L}'{}^{k_2k_s}_{p_1p_2p_s}, \dots, \overline{L}'{}^{k_{s-1}k_s}_{p_1p_{s-1}p_s}, \dots, \overline{L}'{}^{k_2\dots k_s}_{p_1p_2\dots p_s};\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\overline{L}{}^{k_s}_{p_{s-3}p_s}, \overline{L}'{}^{k_{s-2}k_s}_{p_{s-3}p_{s-2}p_s}, \overline{L}'{}^{k_{s-1}k_s}_{p_{s-3}p_{s-1}p_s}, \overline{L}'{}^{k_{s-2}k_{s-1}k_s}_{p_{s-3}p_{s-2}p_{s-1}p_s};\\ &\overline{L}{}^{k_s}_{p_{s-2}p_s}, \overline{L}'{}^{k_{s-1}k_s}_{p_{s-2}p_{s-1}p_s}; \overline{L}{}^{k_s}_{p_{s-1}p_s})\end{aligned}$$

est obtenue.

PROPOSITION 12. 2. *Nous avons l'expression récurrente de* $\overline{L}{}^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s}$:

$$\overline{L}{}^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s} = (\overline{M}{}^{k_s}_{np_s}, \overline{M}{}^{k_s}_{p_1p_s}, \dots, \overline{M}{}^{k_s}_{p_{s-1}p_s}, \overline{L}{}^{k_1\dots k_{s-1}}_{np_1\dots p_{s-1}}, [\overline{L}{}^{k_1\dots k_{s-1}}_{np_1\dots p_{s-1}}], {}^{k_s}_{p_s}).$$

REMARQUE. Lorsque nous définissons les jets semi-holonomes d'ordre l entre deux ensembles de jets semi-holonomes d'ordre k, la forme qui correspond à (5. 4) devient

$$\begin{cases} u^j = \alpha^j_{i_1}u^{i_1} + \dfrac{1}{2!}\alpha^j_{i_1i_2}u^{i_1}u^{i_2} + \dots + \dfrac{1}{l!}\alpha^j_{i_1\dots i_l}u^{i_1}\dots u^{i_l},\\ u^j_{\beta_1} = (\alpha^j_{i_1} + \alpha^j_{(i_1i_2)}u^{i_2} + \dfrac{1}{2!}\alpha^j_{(i_1i_2i_3)}u^{i_2}u^{i_3} + \dots + \dfrac{1}{(l-1)!}\alpha^j_{(i_1\dots i_l)}u^{i_2}\dots u^{i_l})\, u^{i_1}_{\beta_1},\\ u^j_{\beta_1\beta_2} = \alpha^j_{(i_1i_2)} + \alpha^j_{(i_1i_2i_3)}u^{i_3} + \dfrac{1}{2!}\alpha^j_{(i_1i_2i_3i_4)}u^{i_3}u^{i_4} + \dots + \dfrac{1}{(l-2)!}\alpha^j_{(i_1\dots i_l)}u^{i_3}\dots u^{i_l})\, u^{i_1}_{\beta_1}u^{i_2}_{\beta_2} \end{cases}$$

4) Voir la remarque à §4.

$$+ (\alpha^j_{i_1} + \alpha^j_{(i_1 i_2)} u^{i_2} + \frac{1}{2!} \alpha^j_{(i_1 i_2 i_3)} u^{i_2} u^{i_3} + \dots + \frac{1}{(l-1)!} \alpha^j_{(i_1 \dots i_l)} u^{i_2} \dots u^{i_l}) \, u^{i_1}_{\beta_1 \beta_2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u^j_{\beta_1 \dots \beta_k} = \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{(+\mu_\lambda)}^{k} \frac{\partial^\lambda u^j}{\partial u^{i_1} \partial u^{i_2} \dots \partial u^{i_\lambda}} \sum_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\lambda)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k)} u^{i_1}_{(|\beta(\mu_1)} u^{i_2}_{\beta(\mu_2)} \dots u^{i_\lambda}_{\beta(\mu_\lambda)|)},$$

où le symbole $(|\quad|)$ signifie que nous faisons les permutations de β de telle sorte que $s^t_1 < s^t_2 < \dots < s^t_{\mu_t}$, $t = 1, 2, \dots, \lambda$ à chaque $u^{i_t}_{\beta_{ts_t} \dots \beta_{s_{\mu_t}}^t} \equiv u^{i}_{\beta(\mu_t)}$, $s^1_1 < s^2_1 < \dots < s^\lambda_1$ et le symbole de sommation $\sum\limits_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\lambda)}^{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k)}$ exprime la sommation par rapport aux combinaisons qui sont amenées en faisant λ classes de β ($\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\lambda$: nombres de β), extraites dans l'ensemble des nombres $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$.

PROPOSITION 12. 3. *Nous avons l'ensemble de jets semi-holonomes d'ordre l de $1^{\text{ère}}$ espèce (ou simplement dit, d'espèce* (S. 1)) *entre deux ensembles de jets d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ dont l'expression est*

$$\overline{L}^{\,l\quad k_1 \dots k_s}_{mq_1 \dots q_s, nq_1 \dots q_s} = \overline{L}^{\,l}_{mn} (\!(\overline{L}^{\,k_1 \dots k_s}_{nq_1 \dots q_s})\!).$$

PROPOSITION 12. 4. *On trouve l'expression suivante d'un ensemble de jets semi-holonomes d'ordre l de 2^e espèce (ou d'espèce* (S. 2)) *entre deux ensembles de jets d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$:*

$$\overline{L}^{\,l \dots l\quad k_1 \dots k_s}_{nq_1 \dots q_s, np_1 \dots p_s} \equiv (\!(\overline{L}^{\,k_1 \dots k_s}_{np_1 \dots p_s})\!) \; \overline{L}^{\,l}_{p_1 q_1} \times \dots \cdots \overline{L}^{\,l}_{p_s q_s}.$$

Pour les autres ensembles de 2^e espèce, lorsque p_a est identiquement q_a dans la forme précédente, $\overline{L}^{\,l}_{p_a q_a}$ à droite est disparu. On a $2^s - 1$ ensembles de 2^e espèce.

PROPOSITION 12. 5. *Nous avons $2^s - 1$ ensembles de jets semi-holonomes d'ordre l de 3^e espèce (ou d'espèce* (S. 3)) *entre deux ensembles de jets d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ Un ensemble est exposé par*

$$\overline{L}^{\,l\; l \dots l\quad k_1 \dots k_s}_{mq_1 \dots q_s, np_1 \dots p_s} \equiv \overline{L}^{\,l}_{mn} (\!(\overline{L}^{\,k_1 \dots k_s}_{np_1 \dots p_s})\!) \overline{L}^{\,l}_{p_1 q_1} \times \dots \times \overline{L}^{\,l}_{p_s q_s}.$$

Pour les autres, quelques p_a sont identiques à q_a et $\overline{L}^{\,l}_{p_a q_a}$ à droite sont disparus.

PROPOSITION 12. 6. *Les groupes d'isotropie infinitésimale semi-holonome d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s; l)$ sont obtenus et on trouve un groupe de $1^{\text{ère}}$ espèce, $2^s - 1$ groupes pour de 2^e ou 3^e espèce. Le plus complexe groupe de 3^e espèce s'exprime par*

$$\overline{L}^{\,k_1 \dots k_s\; l\; l \dots l}_{np_1 \dots p_s, np_1 \dots p_s} \equiv \overline{L}^{\,l}_{n} (\!(\overline{L}^{\,k_1 \dots k_s}_{np_1 \dots p_s})\!) \overline{L}^{\,l}_{p_1} \times \dots \times \overline{L}^{\,l}_{p_s},$$

de rang $(n, p_1, \dots, p_s)$.

THÉORÈME 6. *Nous pouvons définir les structures fibrées de prolongements* *parfaits d'ordre* $(k_1, k_2, \ldots, k_s;\ l)$ *sur* $\overline{E} \equiv \overline{T}{}^l_q(\overline{T}{}^{k_s}_{p_s}(\overline{T}{}^{k_{s-1}}_{p_{s-1}}(\ldots(\overline{T}{}^{k_1}_{p_1}(V_n))\ldots)))$. *Dans le cas où nous utilisons le groupe d'isotropie semi-holonome de* 1^{ere} *espèce, la structure fibrée est comme suit :*

$$\overline{E}[V_n,\ \overline{L}{}^{k_1\ldots k_s l}_{np_1\ldots p_s q},\ \overline{L}{}^l_n((\overline{L}{}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s})),\ \overline{H}{}^l(\overline{T}{}^{k_s}_{p_s}(\ldots(\overline{T}{}^{k_1}_{p_1}(V_{n'}))\ldots))].$$

En changeant ce groupe d'isotropie de 1^{ere} *espèce et le prolongement principal de* 1^{ere} *espèce contre ceux de* 2^e *espèce, on peut aussi définir les structures fibrées*

$$\left.\begin{array}{r}\overline{E}[V_n,\ \overline{L}{}^{k_1\ldots k_s l}_{np_1\ldots p_s q},\ ((\overline{L}{}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}))\overline{L}{}^l_{p_1},\ \overline{H}{}^l(\overline{T}{}^{k_s}_{p_s}(\ldots(\overline{T}{}^{k_1}_{p_1'}(V_n))\ldots))] \\ \textit{etc.}\end{array}\right\} 2^s - 1$$

En changeant contre ceux de 3^e *espèce, les structures fibrées*

$$\left.\begin{array}{r}\overline{E}[V_n,\ \overline{L}{}^{k_1\ldots k_s l}_{np_1\ldots p_s q},\ \overline{L}{}^l_n((\overline{L}{}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}))\overline{L}{}^l_{p_1},\ \overline{H}{}^l(\overline{T}{}^{k_s}_{p_s}(\ldots(\overline{T}{}^{k_1}_{p'_1}(V_{n'}))\ldots))] \\ \textit{etc.}\end{array}\right\} 2^s - 1$$

sont aussi définies sur $\overline{E}$.

De plus, nous pouvons définir jet ordinaire d'ordre l entre deux ensembles de jets semi-holonomes d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ et donc nous avons le

THÉORÈME 7. *On peut aussi définir une structure fibrée avec un groupe d'isotropie (holonome) sur l'ensemble* $\overline{E} = \overline{T}{}^l_q(\overline{T}{}^{k_s}_{p_s}(\ldots(\overline{T}{}^{k_1}_{p_1}(V_n))\ldots))$, *c'est-à-dire, les prolongements (ordinaires) d'ordre* $(k_1, k_2, \ldots, k_s;\ l)$ *sont définis sur cet ensemble. En utilisant le groupe d'isotropie (holonome) de* $1^{ère}$ *espèce, nous avons la structure fibrée*

$$\overline{E}[V_n,\ \overline{L}{}^{k_1\ldots k_s l}_{np_1\ldots p_s q},\ \overline{L}{}^l_n((\overline{L}{}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s})),\ \overline{H}{}^l(\overline{T}{}^{k_s}_{p_s}(\ldots(\overline{T}{}^{k_1}_{p_1}(V_{n'}))\ldots))].$$

En changeant ce groupe contre ceux de 2^e *espèce, les structures fibrées*

$$\left.\begin{array}{r}\overline{E}[V_n,\ \overline{L}{}^{k_1\ldots k_s l}_{np_1\ldots p_s q},\ ((L^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}))L^l_{p_1},\ H^l(\overline{T}{}^{k_s}_{p_s}(\ldots(\overline{T}{}^{k_1}_{p_1}(V_n))\ldots))] \\ \textit{etc.}\end{array}\right\} 2^s - 1$$

sont obtenues et pour ceux de 3^e *espèce, on a les structures fibrées*

$$\left.\begin{array}{r}\overline{E}[V_n\ \overline{L}{}^{k_1\ldots k_s l}_{np_1\ldots p_s q},\ L^l_n((\overline{L}{}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}))L^l_{p_1},\ H^l(\overline{T}{}^{k_s}_{p_s}(\ldots(\overline{T}{}^{k_1}_{p'_1}(V_{n'}))\ldots))] \\ \textit{etc.}\end{array}\right\} 2^s - 1.$$

13. Jets mélangés d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ **de** $(V_{p_1}, V_{p_2}, \ldots, V_{p_s})$ **dans** V_{n_s}. Nous énonçons ce paragraphe en ajoutant quelques explications supplémentaires à l'exposé de § 8.

DÉFINITION. *Lorsque les coefficients à* (8. 2) *sont symétriques par rapport aux indices* (α), (β) *et ne sont pas nécessairement symétriques par rapport à*

(γ), *nous pouvons définir l'ensemble de jets mélangés d'ordre* $(k_1, k_2, \bar{k}_3)$ *et il est marqué par* $L^{k_1 k_2 \bar{k}_3}_{n p_1 p_2 p_3}$. *La matrice* (*A*) *est aussi regardée comme exprimant un élément de* $M^{k_1 k_2 \bar{k}_3}_{n p_1 p_2 p_3}$.

Et on a la

PROPOSITION 13. 1. *L'expression qui correspond à* (8. 3″) *est représentée par*

$$L^{k_1 k_2 \bar{k}_3}_{n p_1 p_2 p_3} \equiv (\overline{M}^{k_3}_{n p_3},\ \overline{M}^{k_3}_{p_1 p_3},\ \overline{M}^{k_3}_{p_2 p_3}, L^{k_1 k_2}_{n p_1 p_2},\ [L^{k_1 k_2}_{n p_1 p_2}], {}^{\bar{k}_3}_{p_3}). \tag{13. 1}$$

Si l'on ne demande pas nécessairement symétrie par rapport à (α), il existe la marque "$-$" sur k_1 dans la forme (13. 1). Ainsi, lorsqu'on ne demande pas symétrie par rapport à (β), la marque "$-$" est trouvée sur k_2 dans la forme précédente. Généralement, on trouve la marque "$-$" sur quelques d'entre k_1, $k_2, \dots, k_s$ dans $L^{k_1 \dots k_s}_{n p_1 \dots p_s}$ de (8. 6). Suivant que la marque sur chaque indice $k_a (a = 1, 2, \dots, s)$ existe ou n'existe pas, on peut considérer 2^s cas. Lorsque nous ne trouvons rien sur tous les indices k_a, (8. 6) définit l'ensemble de jets ordinaires. Et lorsqu'on trouve la marque "$-$" sur tous les indices k_a, (8. 6) définit l'ensemble de jets semi-holonomes. Alors, on a la

PROPOSITION 13. 2. *Nous pouvons considérer* $2^s - 2$ *ensembles de jets mélangés d'ordre* $(k_1, k_2, \dots, k_s)$, *par exemple,*

$$L^{k_1 \dots \bar{k}_a \dots k_s}_{n p_1 \dots p_a \dots p_s} \equiv (M^{k_s}_{n p_s},\ M^{k_s}_{p_1 p_s}, \dots,\ M^{k_s}_{p_{s-1} p_s},\ L^{k_1 \dots \bar{k}_a \dots k_{s-1}}_{n p_1 \dots p_a \dots p_{s-1}},\ [L^{k_1 \dots \bar{k}_a \dots k_{s-1}}_{n p_1 \dots p_a \dots p_{s-1}}], {}^{k_s}_{p_s}), \tag{13. 2}$$

$$L^{k_1 \dots k_{s-1} \bar{k}_s}_{n p_1 \dots p_{s-1} p_s} \equiv (\overline{M}^{k_s}_{n p_s},\ \overline{M}^{k_s}_{p_1 p_s}, \dots,\ \overline{M}^{k_s}_{p_{s-1} p_s},\ L^{k_1 \dots k_{s-1}}_{n p_1 \dots p_{s-1}},\ [L^{k_1 \dots k_{s-1}}_{n p_1 \dots p_{s-1}}], {}^{\bar{k}_s}_{p_s}). \tag{13. 3}$$

14. Considérations dans les cas divers de jet d'ordre l entre deux ensembles de toutesortes de jet d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$. Lorsque les jets d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ sont ordinaires, pour le jet d'ordre l entre deux ensembles de ces jets, on doit prendre nécessairement celui ordinaire. Lorsqu'ils sont des jets mélangés d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$, nous pouvons prendre un jet mélangé, un jet semiholonome convenable l ou un jet ordinaire d'ordre l. En cas de jets semi-holonomes d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$, on peut le prendre entre un jet semi-holonome, un jet mélangé et un jet ordinaire. Donc, à l'exception des cas que nous avons déjà énoncés, il nous reste de discuter les quatre cas suivants :

(A) *jet mélangé d'ordre l entre deux ensembles de jets mélangés d'ordre* $(k_1, k_2, \dots, k_s)$,

(B) *jet ordinaire d'ordre l entre deux ensembles de jets mélangés d'ordre* $(k_1, k_2, \dots, k_s)$,

(C) *jet semi-holonome d'ordre l entre deux ensembles de jets mélangés d'ordre* $(k_1, k_2, \dots, k_s)$,

(D) *jet mélangé d'ordre l entre deux ensembles de jets semi-holonomes d'ordre*

$(k_1, k_2, \dots, k_s)$.

D'abord, nous considérons le cas (B) en utilisant l'exposé à § 9. Les ensembles $(\!(L_{np_1\dots p_s}^{k_1\dots k_s})\!)$ dans (9. 5), (9. 8), (9. 11), (9. 12), (9. 13) et (9. 14) à § 9 sont substitués par $(\!(L_{np_1\dots p_a\dots p_b\dots p_s}^{k_1\dots \overline{k_a}\dots \overline{k_b}\dots k_s})\!)$, c'est-à-dire, avec les marques "$-$" sur quelques $k_a, \dots, k_b$ qui correspondent aux coefficients pas toujours symétriques dans les représentants tensoriels. Par exemple, on a

$$L_{mq_1q_2,np_1p_2}^{l\,l\,l\quad \overline{k_1}k_2} \equiv L_{mn}^{\ \ l}(L_{np_1p_2}^{\overline{k_1}k_2})\ L_{p_1q_1}^{\ \ l} \times L_{p_2q_2}^{\ \ l}$$

dont l'élément a le représentant tensoriel de la forme (9. 10c) avec la condition: $u^i_{\alpha_1\dots\alpha_\lambda\beta_1\dots\beta_\mu}$ sont symétriques par rapport aux indices (β), mais ne sont pas nécessairement symétriques par rapport aux indices (α). De cela, $u^j_{\gamma_1\dots\gamma_\lambda\delta_1\dots\delta_\mu}$ de (9. 10c) sont symétriques par rapport aux indices (δ), mais ne sont pas nécessairement symétriques par rapport aux indices (γ). À l'exception de cette remarque, nous pouvons énoncer analogiquement sur ces jets. En ce cas, pour simplifier les jets d'ordre l de $1^{\text{ère}}$ espèce, de 2^{e} espèce et de 3^{e} espèce sont appelés *jets d'ordre l d'espèce* (B. 1), *d'espèce* (B. 2) *et d'espèce* (B. 3), respectivement.

PROPOSITION 14. 1. *On trouve un ensemble de jets d'ordre l d'espèce* (B. 1), $2^s - 1$ *ensembles d'espèce* (B. 2) *et* $2^s - 1$ *ensembles d'espèce* (B. 3). *Par exemple, nous avons les ensembles de jets d'ordre l entre deux ensembles de jets mélangés d'ordre* $(\overline{k_1}, k_2, \dots, k_s)$,

$$L_{mp_1\dots p_s,np_1p_2\dots k_s}^{l\qquad \overline{k_1}k_2\dots k_s} \equiv L_{mn}^{\ \ l}(\!(L_{np_1p_2\dots p_s}^{\overline{k_1}k_2\dots k_s})\!),$$

$$L_{nq_1q_2p_3\dots p_s;np_1p_2\dots p_s}^{l\,l\qquad \overline{k_1}k_2\dots k_s} \equiv (\!(L_{np_1p_2\dots p_s}^{\overline{k_1}k_2\dots k_s})\!)L_{p_1q_1}^{\ \ l} \times L_{p_2q_2}^{\ \ l},$$

$$L_{mq_1q_2p_3\dots p_s,np_1p_2\dots p_s}^{l\,l\,l\qquad \overline{k_1}k_2\dots k_s} \equiv L_{mn}^{\ \ l}(\!(L_{np_1p_2\dots p_s}^{\overline{k_1}k_2\dots k_s})\!)L_{p_1q_1}^{\ \ l} \times L_{p_2q_2}^{\ \ l},$$

pour chaque espèce, respectivement.

Ensuite, nous considérons aussi le cas (D), en utilisant l'exposé à § 9. De même que dans le cas précédent, les jets d'ordre l de $1^{\text{ère}}$ espèce, de 2^{e} espèce, et de 3^{e} espèce sont appelés jets d'ordre l d'espèce (D. 1), d'espèce (D. 2) et d'espèce (D. 3), respectivement. Si l'on ne demande pas symétrie par rapport à (i) dans (9. 10a) et (9. 10a$'$), la forme qui correspond à (9. 11) est notée

$$L_{mq_1p_2,np_1p_2}^{\bar{l}\,l\quad \overline{k_1}\overline{k_2}} \equiv \overline{L}_{mn}^{\ \ l}(\!(\overline{L}_{np_1p_2}^{\,k_1k_2})\!)L_{p_1q_1}^{\ \ l}.$$

Ainsi, si l'on ne demande pas symétrie par rapport aux indices de coordonnées canoniques de R_{p_1}, $L_{p_1q_1}^{\ \ l}$ est substitué par $\overline{L}_{p_1q_1}^{\ \ l}$. Généralement, lorsqu'on ne demande pas symétrie par rapport aux indices de coordonnées canoniques de R_n (ou R_{p_a}), $L_{mn}^{\ \ l}$ (ou $L_{p_aq_a}^{\ \ l}$) de (9. 14) est substitué par $\overline{L}_{mn}^{\ \ l}$ (ou $\overline{L}_{p_aq_a}^{\ \ l}$). Par exemple, on peut trouver l'ensemble suivant de jets mélangés d'espèce (D. 3) d'ordre l entre deux ensembles de jets semi-holonomes d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$:

$$L^{\bar{l}\,\bar{l}\,l\qquad\qquad\overline{k_1\ldots k_s}}_{mq_1q_2p_3\ldots p_s,np_1\ldots p_s} \equiv \overline{L}^{\,l}_{mn}(\!(\overline{L}^{\,k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s})\!)\overline{L}^{\,l}_{p_1q_1} \times L^{\,l}_{p_2q_2}.$$

De plus, nous considérons ainsi le cas (A). De même que les deux cas précédents, les jets d'ordre l de 1ère espèce, de 2e espèce et de 3e espèce sont appelés jets d'ordre l d'espèce (A. 1), d'espèce (A. 2) et d'espèce (A. 3), respectivement. En ce cas on trouve quelques marques "$-$" sur les indices supérieurs de $(\!(L^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s})\!)$ à (9. 14). Par exemple, on peut trouver l'ensemble suivant de jets mélangés d'espèce (A. 2) d'ordre l entre deux ensembles de jets mélangés d'ordre $(k_1, k_2, \cdots, k_s)$:

$$L^{\bar{l}\,l\qquad\qquad\bar{k}_1\bar{k}_2\ldots k_s}_{nq_1q_2p_3\ldots p_s,np_1p_2\ldots p_s} \equiv (\!(L^{\bar{k}_1\bar{k}_2\ldots k_s}_{np_1p_2\ldots p_s})\!)\overline{L}^{\,l}_{p_1q_1} \times L^{\,l}_{p_2q_2}.$$

En ce cas, lorsqu'on trouve seulement $\overline{L}^{\,l}_{p_aq_a}$ et ne trouve pas $L^{\,l}_{p_aq_a}$, les jets mélangés d'espèce (A. 2) (ou (A. 3)) se réduisent des jets semi-holonomes entre deux ensembles de jets mélangés qui sont appelés jets d'espèce (C. 2) (ou (C. 3).)

Nous allons compter combien d'ensembles de jets mélangés d'espèce (A. 2) il existe. Lorsque nous trouvons la marque "$-$" sur l'indice k_a, nous pouvons considérer les trois cas suivants: il existe $\overline{L}^{\,l}_{p_aq_a}$ à droite de la forme précédente; il existe $L^{\,l}_{p_aq_a}$; il n'existe rien. Lorsque nous ne trouvons pas la marque "$-$" sur l'indice k_a, nous pouvons considérer les deux cas suivants: il existe $L^{\,l}_{p_aq_a}$, ou il n'existe rien. Alors, si l'on trouve t marques "$-$" sur ces indices $k_1, \ldots, k_s$, on peut considérer $3^t \cdot 2^{s-t} - 1$ cas, $(t \neq 0, s)$. Mais dans ces cas, ils contiennent $2^s - 1$ cas de jet ordinaire d'espèce (B. 2) et $2^t - 1$ cas de jet semi-holonome d'espèce (C. 2). Alors, nous avons la

PROPOSITION 14. 2. *On trouve* $3^t \cdot 2^{s-t} + 1 - 2^s - 2^t$ *ensembles de jets mélangés d'espèce* (A. 2) *d'ordre* l *et* $2^t - 1$ *ensembles de jets semi-holonomes d'espèce* (C. 2). *Par exemple, nous avons respectivement*

$$L^{\bar{l}\,\bar{l}\,l\qquad\qquad\bar{k}_1\bar{k}_2k_3\ldots k_s}_{nq_1q_2q_3p_4\ldots p_t,np_1p_2p_3\ldots p_s} \equiv (\!(L^{\bar{k}_1\bar{k}_2k_3\ldots k_s}_{np_1p_2p_3\ldots p_s})\!)\,\overline{L}^{\,l}_{p_1q_1} \times L^{\,l}_{p_2q_2} \times {}^{\,l}_{p_3q_3}$$

et

$$L^{l\,\bar{l}\qquad\qquad\bar{k}_1\bar{k}_2k_3\ldots k_s}_{nq_1q_2p_3\ldots p_s,np_1p_2p_3\ldots p_s} \equiv (\!(L^{\bar{k}_1\bar{k}_2k_3\ldots k_s}_{np_1p_2p_3\ldots p_s})\!)\,\overline{L}^{\,l}_{p_1q_1} \times \overline{L}^{\,l}_{p_2q_2}.$$

De la même manière, nous allons compter combien d'ensembles de jets mélangés d'espèce (A. 3) (ou d'espèce (C. 3)) il existe. En ce cas, simplement, on attache $L^{\,l}_{mn}$ aux formes précédentes, mais nous ne pouvons pas attacher $\overline{L}^{\,l}_{mn}$. En effet, lorsque la forme d'ensemble de jets mélangés est (13. 3), on trouve $\overline{M}^{k_s}_{np_s}$ dans le membre droit. Et dans le cas où nous avons la forme (13. 2), on trouve $L^{k_1\ldots\bar{k}_a\ldots k_{s-1}}_{np_1\ldots p_a\ldots p_{s-1}}$ qui contient $M^{\bar{k}_a}_{np_a}$. Mais, le nombre d'ensembles d'espèce (A. 3) n'est pas identiquement celui d'ensembles d'espèce (A. 2), car on trouve encore les ensembles de jets mélangés, par exemple, tels que $L^{\,l}_{mn}(\!(L^{\bar{k}_1\bar{k}_2k_3\ldots k_s}_{np_1p_2p_3\ldots p_s})\!)\overline{L}^{\,k_1}_{p_1q_1} \times \overline{L}^{\,k_2}_{p_2q_2}$. Le nombre de tels ensembles est égal à celui de (C 2), $2^t - 1$. Au même raisonnement, l'ensemble d'espèce (A. 1) se réduit à celui d'espèce (B. 1). Donc, on n'a pas d'ensemble d'espèce (A. 1). Alors, on arrive à la

PROPOSITION 14. 3. *Nous trouvons* $3^t \cdot 2^{s-t} - 2^s$ *ensembles de jets mélangés d'espèce* (A. 3) *d'ordre* l, *par exemple,*

$$L^{l\,\bar{l}\,l\,l \qquad \bar{k}_1\bar{k}_2k_3\ldots k_s}_{mq_1q_2q_3p_4\ldots p_s, np_1p_2p_3\ldots p_s} \equiv L_{mn}^{\;l}\left(\!\left(L^{\bar{k}_1\bar{k}_2k_3\ldots k_s}_{np_1p_2p_3\ldots p_s}\right)\!\right) \overline{L}_{p_1q_1}^{\;l} \times L_{p_2q_2}^{\;l} \times L_{p_3q_3}^{\;l}.$$

Celui d'espèce (C. 3) *n'existe pas. Ainsi, il n'existe pas de jet mélangé d'espèce* (A. 1) (*ou d'espèce* (C. 1)).

Es cas de jet mélangé d'espece (D), on peut compter en posant $t = s$ dans les cas précédents d'espèce (A. 2), (A. 3). Alors, nous avons la

PROPOSITION 14. 4. *On trouve* $3^s + 1 - 2^{s+1}$ *ensembles de jets mélangés d'espèce* (D. 2), *par exemple,*

$$L^{\bar{l}\,l \qquad \overline{k_1\ldots k_s}}_{nq_1q_2p_3\ldots p_s, np_1\ldots p_s} \equiv \left(\!\left(\overline{L}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}\right)\!\right) \overline{L}_{p_1q_1}^{\;l} \times L_{p_2q_2}^{\;l},$$

et celui d'espèce (D. 1) *n'existe pas.*

Mais, le nombre d'ensembles d'espèce (D. 3) est différent. On peut utiliser $\overline{L}_{mn}^{\;l}$ au lieu de $L_{mn}^{\;l}$. Nous trouvons encore les ensembles tels que $\overline{L}_{mn}^{\;l}((\overline{L}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}))\, L_{p_1q_1}^{\;l} \times L_{p_2q_2}^{\;l}$. Le nombre de ces ensembles est le même que celui des ensembles d'espèce (S. 2), $2^s - 1$. Néanmoins, on y trouve les ensembles d'espèce (S. 3) tels que $\overline{L}_{mn}^{\;l}((\overline{L}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}))\, \overline{L}_{p_1q_1}^{\;l} \times \overline{L}_{p_2q_2}^{\;l}$. Le nombre de ces ensembles est aussi identique à $2^s - 1$. Alors, on a la

PROPOSITION 14. 5. *Nous avons* $2 \cdot 3^s - 2^{s+1}$ *ensembles de jets mélangés d'espèce* (D. 3), *par exemple*

$$L^{\bar{l}\,\bar{l}\,l \qquad \overline{k_1\ldots k_s}}_{mq_1q_2p_3\ldots p_s, np_1\ldots p_s} \equiv \overline{L}_{mn}^{\;l}\left(\!\left(\overline{L}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}\right)\!\right) \overline{L}_{p_1q_1}^{\;l} \times L_{p_2q_2}^{\;l},$$

$$L^{l\,\bar{l}\,l \qquad \overline{k_1\ldots k_s}}_{mq_1q_2p_3\ldots p_s, np_1\ldots p_s} \equiv L_{mn}^{\;l}\left(\!\left(\overline{L}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}\right)\!\right) \overline{L}_{p_1q_1}^{\;l} \times L_{p_2q_2}^{\;l},$$

$$L^{\bar{l}\,l\,l \qquad \overline{k_1\ldots k_s}}_{mq_1q_2p_3\ldots p_s, np_1\ldots p_s} \equiv \overline{L}_{mn}^{\;l}\left(\!\left(\overline{L}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}\right)\!\right) L_{p_1q_1}^{\;l} \times L_{p_2q_2}^{\;l},$$

$$L^{l\,\bar{l}\,\bar{l} \qquad \overline{k_1\ldots k_s}}_{mq_1q_2p_3\ldots p_s, np_1\ldots p_s} \equiv L_{mn}^{\;l}\left(\!\left(\overline{L}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}\right)\!\right) \overline{L}_{p_1q_1}^{\;l} \times \overline{L}_{p_2q_2}^{\;l}$$

Finalement, pour comprendre les nombres des ensembles de chaque espèce facilement, nous écrivons le tableau.

$1^{\text{ère}}$ espèce	2^{e} espèce	3^{e} espèce	jets d'ordre l	entre deux ensembles de
1	2^s-1	2^s-1	jets ordinaires	jets ordinaires
(A.1) 0	(A.2) $3^t 2^{s-t}-1-2^s-2^t$	(A.3) $3^t 2^{s-t}-2^s$	jets ordinaires	
(B.1) 1	(B.2) 2^s-1	(B.3) 2^s-1	jets mélangés	jets mélangés
(C.1) 0	(C.2) 2^t-1	(C.3) 0	jets semi-holonomes	
(O.1) 1	(O.2) 2^s-1	(O.3) 2^s-1	jets ordinaires	
(D.1) 0	(D.2) 3^s+1-2^{s+1}	(D.3) $2\cdot 3^s-2^{s+1}$	jets mélangés	jets semi-holonomes
(S.1) 1	(S.2) 2^s-1	(S.3) 2^s-1	jets semi-holonomes	

15. Groupes d'isotropie infinitésimale mélangé d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s; l)$ et prolongements mélangés d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s; l)$ de variété V_n. De même qu'à § 10, en utilisant les ensembles de jets mélangés d'ordre l d'espèces (A. 2), (A. 3), (B. 1), (B. 2), (B. 3), (C. 2), (D. 2), (D. 3), nous pouvons définir groupes d'isotropie infinitésimale mélangé d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s; l)$ de chaque espèce. Donc, nous avons la

PROPOSITION 15. 1. *Les nombres de groupes d'isotropie infinitésimale mélangé d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s; l)$ de chaque espèce sont égaux à ceux des ensembles de jets mélangés de chaque espèce à § 14, respectivement. Pour chaque espèce nous avons par exemple,*

$$L^{\overline{k_1}\overline{k_2}k_3\ldots k_s\,\overline{l}\,l\quad l}_{np_1p_2p_3\ldots p_s,\,p_1p_2p_3} \equiv \left(\!\left(L^{\overline{k_1}\overline{k_2}k_3\ldots k_s}_{np_1p_2p_3\ldots p_s}\right)\!\right)\ \overline{L}^l_{p_1} \times L^l_{p_2} \times L^l_{p_3} \qquad d'esp\grave{e}ce\ (\text{A. }2),$$

$$L^{\overline{k_1}\overline{k_2}k_3\ldots k_s\,l\,\overline{l}\,l\quad l}_{np_1p_2p_3\ldots p_s,\,np_1p_2p_3} \equiv L^l_n\left(\!\left(L^{\overline{k_1}\overline{k_2}k_3\ldots k_t}_{np_1p_2p_3\ldots p_s}\right)\!\right)\ \overline{L}^l_{p_1} \times L^l_{p_2} \times L^l_{p_3} \qquad d'esp\grave{e}ce\ (\text{A. }3),$$

$$L^{\overline{k_1}k_2\ldots k_s\,l}_{np_1p_2\ldots p_s,n} \equiv L^l_n\left(\!\left(L^{\overline{k_1}k_2\ldots k_s}_{np_1p_2\ldots p_s}\right)\!\right) \qquad d'esp\grave{e}ce\ (\text{B. }1),$$

$$L^{\overline{k_1}k_2\ldots k_s\,l\,l}_{np_1p_2\ldots p_s,\,p_1p_2} \equiv \left(\!\left(L^{\overline{k_1}k_2\ldots k_s}_{np_1p_2\ldots p_s}\right)\!\right)\ L^l_{p_1} \times L^l_{p_2} \qquad d'esp\grave{e}ce\ (\text{B. }2),$$

$$L^{\overline{k_1}k_2\ldots k_s\,l\,l\,l}_{np_1p_2\ldots p_s,\,np_1p_2} \equiv L^l_n\left(\!\left(L^{\overline{k_1}k_2\ldots k_s}_{np_1p_2\ldots p_s}\right)\!\right)\ L^l_{p_1} \times L^l_{p_2} \qquad d'esp\grave{e}ce\ (\text{B. }3),$$

$$L^{\overline{k_1}\overline{k_2}k_3\ldots k_s\,\overline{l}\,\overline{l}}_{np_1p_2p_3\ldots p_t,\,p_1p_2} \equiv \left(\!\left(L^{\overline{k_1}\overline{k_2}k_3\ldots k_s}_{np_1p_2p_3\ldots p_s}\right)\!\right)\ \overline{L}^l_{p_1} \times \overline{L}^l_{p_2} \qquad d'esp\grave{e}ce\ (\text{C. }2),$$

$$L^{\overline{k_1\ldots k_s}\,\overline{l}\,l}_{np_1\ldots p_s,\,p_1p_2} \equiv \left(\!\left(\overline{L}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}\right)\!\right)\ \overline{L}^l_{p_1} \times L^l_{p_2} \qquad d'esp\grave{e}ce\ (\text{D. }2),$$

$$L^{\overline{k_1\ldots k_s}\,l\,\overline{l}\,l}_{np_1\ldots p_s,\,np_1p_2} \equiv L^l_n\left(\!\left(\overline{L}^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}\right)\!\right)\ \overline{L}^l_{p_1} \times L^l_{p_2} \qquad d'esp\grave{e}ce\ (\text{D. }3).$$

Nous considérons les ensembles de vitesses d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s; l)$ qui sont prolongés $t+1$ fois de la manière semi-holonome et u fois de celle ordinaire $(u + t = s,\ t \neq 0, s)$, par exemple, $\overline{T}^l_q(T^{k_s}_{p_s}(\ldots(T^{k_{t+1}}_{p_{t+1}}(\overline{T}^{k_t}_{p_t}(\ldots(\overline{T}^{k_1}_{p_1}(V_n))\ldots)))\ldots)$. En ce cas, pour la fibre nous prenons $L^{\overline{k_1\ldots k_t k_{t+1}\ldots k_s l}}_{np_1\ldots p_t p_{t+1}\ldots p_s q}$ et pour groupe d'isotropie, nous pouvons choisir arbitrairement dans les groupes d'isotropie d'espèce (A. 2), (A. 3), (B. 1), (B. 2), (B. 3), (C. 2). En correspondant à ces groupes d'isotropie, nous pouvons considérer les prolongements principaux, respectivement. Donc, nous avons le

THÉORÈME 8. *Nous pouvons définir les structures fibrées suivantes sur l'ensembles de vitesses mélangées d'ordre* $(k_1, k_2, \dots, k_s; l)$, *par exemple,*

$$\overline{E}' \equiv \overline{T}{}^{l}_{q}(T^{k_s}_{p_s}(\dots(T^{k_{t+1}}_{p_{t+1}}(\overline{T}{}^{k_t}_{p_t}(\dots(\overline{T}{}^{k_1}_{p_1}(V_n)\!)\dots)\!)\!)\dots)\!).$$

Lorsque nous utilisons le groupe d'isotropie d'espèce (B. 1), *la structure fibrée s'exprime par*

$$\overline{E}'\,[V_n,\ L^{\overline{k_1\dots k_t}k_{t+1}\dots k_s\,\overline{l}}_{np_1\dots p_tp_{t+1}\dots p_sq},\ L^l_n(\!(L^{\overline{k_1\dots k_t}k_{t+1}\dots k_s}_{np_1\dots p_tp_{t+1}\dots p_s})\!),$$
$$H^l(T^{k_s}_{p_s}(\dots(T^{k_{t+1}}_{p_{t+1}}(\overline{T}{}^{k_t}_{p_t}(\dots(\overline{T}{}^{k_1}_{p_t}(V_{n'})\!)\dots)\!)\!)\dots)\!)].$$

En changeant ce groupe d'isotropie de $1^{ère}$ *espèce et le prolongement principal de* $1^{ère}$ *espèce contre ceux d'espèces* (A. 2), (B. 2), (C. 2), *on peut aussi définir les structures fibrées, par exemple,*

$$\overline{E}'[V_n,\ L^{\overline{k_1\dots k_t}k_{t+1}\dots k_s\,\overline{l}}_{np_1\dots p_tp_{t+1}\dots p_sq},\ (\!(L^{\overline{k_1\dots k_t}k_{t+1}\dots k_s}_{np_1\dots p_tp_{t+1}\dots p_s})\!)\ \overline{L}{}^l_{p_1},$$
$$H^l(T^{k_s}_{p_s}(\dots(T^{k_{t+1}}_{p_{t+1}}(\overline{T}{}^{k_t}_{p_t}(\dots(\overline{T}{}^{\overline{k_1}}_{p'_1}(V_n)\!)\dots)\!)\!)\dots)\!)].$$

Contre ceux d'espèces (A. 3), (B. 3), *les structures fibrées, par exemple,*

$$\overline{E}'[V_n, L^{\overline{k_1\dots k_t}k_{t+1}\dots k_s\,\overline{l}}_{np_1\dots p_tp_{t+1}\dots p_sq},\ L^l_n(\!(L^{\overline{k_1\dots k_t}k_{t+1}\dots k_s}_{np_1\dots p_tp_{t+1}\dots p_s})\!)\ \overline{L}{}^l_{p_1},$$
$$H^l(T^{k_s}_{p_s}(\dots(T^{k_{t+1}}_{p_{t+1}}(\overline{T}{}^{k_t}_{p_t}(\dots(\overline{T}{}^{\overline{k_1}}_{p'_1}(V_{n'})\!)\dots)\!)\!)\dots)\!)]$$

sont aussi définies sur E.

Lorsque $t = s$, on peut aussi prendre dans les groupes d'isotropie d'espèces (D. 2), (D. 3). Alors, on a le

THÉORÈME 9. *Nous pouvons définir les structures de prolongements mélangés sur les ensembles de vitesses mélangées d'ordre* $(k_1, k_2, \dots, k_s; l)$ *et le nombre de structures de prolongement mélangé est égal à celui de groupes d'isotropie. En utilisant les groupes d'isotropie d'espèce* (D. 2), *on a les structures fibrées, par exemple,*

$$\overline{E}[V_n,\ \overline{L}{}^{k_1\dots k_s\,l}_{np_1\dots p_sq},\ (\!(\overline{L}{}^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s})\!)L^l_{p_1} \times \overline{L}{}^{\overline{l}}_{p_2},$$
$$H^l(\overline{T}{}^{k_s}_{p_s}(\dots(\overline{T}{}^{\overline{k_2}}_{p_2}(\overline{T}{}^{k_1}_{p'_1}(V_n)\!)\!)\dots)\!)],$$

et en changeant contre ceux d'espèce (D. 3), *nous avons, par exemple,*

$$\overline{E}[V_n,\ \overline{L}{}^{k_1\dots k_s\,l}_{np_1\dots p_sq},\ L^l_n(\overline{L}{}^{k_1\dots k_s}_{np_1\dots p_s})\!)\ L^l_{p_1} \times \overline{L}{}^l_{p_2},$$
$$H^l(\overline{T}{}^{k_s}_{p_s}(\dots(\overline{T}{}^{\overline{k_2}}_{p'_2}(\overline{T}{}^{k_1}_{p'_1}(V_{n'})\!)\!)\dots)\!)].$$

16. Connexions infinitésimales d'ordre supérieur des prolongements d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s; l)$ **de** V_n. Dans l'exposé de Ch. Ehresmann [13] nous trouvons la définition générale des connexions d'ordre r d'un espace fibré. Alors, en utilisant cette définition, nous pouvons obtenir immédiatement celle des prolongements d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s; l)$ de V_n qui sont munis des structures fibrées suivantes

(16.1) $E[V_n, L^{k_1\ldots k_s l}_{np_1\ldots p_s q}, L^l_n(L^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s}), H^l(T^{k_s}_{p_s}(\ldots(T^{k_1}_{p_1}(V_n))\ldots))]$,

etc. (les formes qui sont obtenues en substituant les autres groupes d'isotropie à § 10 et ses prolongements principaux au lieu de ce groupe structural et ce prolongement principal dans la forme précédente)

Soit $\Phi = H^l(T^{k_s}_{p_s}(\ldots(T^{k_1}_{p_1}(V_n))\ldots))H^{-1l}(T^{k_s}_{p_s}(\ldots(T^{k_1}_{p_1}(V_n))\ldots))$ le groupoïde principal associé et soit $\widetilde{V}_n$ la base de Φ, c'est-à-dire, l'ensemble des unités de Φ. Si $\widetilde{x}\,(\in V_n)$ est l'isomorphisme identique de la fibre de $x \in V_n$, on peut identifier V_n avec $\widetilde{V}_n$ par $x \to \widetilde{x}$. Soit $a(\theta)$ l'unité à droite de $\theta \in \Phi$, $b(\theta)$ l'unité à gauche, c'est-à-dire, a est la projection verticale, b la projection horizontale de Φ sur $\widetilde{V}_n$ ou V_n.

DÉFINITION. *Un déplacement infinitésimal d'ordre r de la fibre de x est une 1^r-vitesse verticale ξ d'origine $\widetilde{x}$ dans Φ, c'est-à-dire, $a\xi$ est la vitesse nulle réduite à x.*

DÉFINITION. *Un élément de connexion d'ordre r en $x \in V_n$ est un élément X de $\widetilde{J}^r(V_n. \Phi)$, ensemble des jets non holonomes d'ordre r de V_n dans Φ, vérifiant les conditions suivantes:*

(16.2) $\left\{\begin{array}{l} \alpha(X) = x,\ \beta(X) = \widetilde{x},\ aX = \textit{jet d'ordre } r \textit{ et de source } x \textit{ de la} \\ \textit{rétractation de } V_n \textit{ sur } x,\ bX = \textit{jet d'ordre } r \textit{ et de source } x \textit{ de} \\ \textit{l'application identique de } V_n. \end{array}\right.$

Étant $\widetilde{Q}^r$ l'espace des éléments de connexion d'ordre r sur V_n. Alors, $\widetilde{Q}^r$ est un espace fibré admettant $\widetilde{\Phi}^r$ le prolongement non holonome d'ordre r de Φ, comme groupoïde principal associé, ses fibres sont isomorphes à

$$\widetilde{T}^r_{n,e}(L^l_n(L^{k_1\ldots k_s}_{np_1\ldots p_s})),\ \text{etc.},$$

espace des n^r-vitesses non holonomes d'origine e du groupe structural de l'espace fibré E, étant e l'élément unité. Comme ces fibres sont homéomorphes à un espace numérique, $\widetilde{Q}^r$ admet toujours une section.

DÉFINITION. *Une section de l'espace des éléments de connexion d'ordre r sur V_n définit une connexion infinitésimale d'ordre r sur E.*

De même, on peut énoncer la

DÉFINITION. *Nous pouvons définir les connexions semi-holonomes d'ordre* *r sur E et les connexions holonomes d'ordre r sur E, en substituant jets non-holonomes (vitesses non holonomes) dans la définition précédente par jets semi-holonomes ou jets holonomes (vitesses semi-holonomes ou vitesses holonomes), respectivement.*

Ensuite, nous allons considérer sur un espace fibré $E(B, F, G, H)$ de classe $C^{k_1+k_2+\cdots+k_s}$. Étant $\Phi = HH^{-1}$ le groupoïde principal associé, nous définissons les projections $a(\theta)$, $b(\theta)$, de même qu'au paragraphe précédent.

DÉFINITION. *Un déplacement infinitésimal holonome d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ de la fibre de x est une $(1^{k_1}, 1^{k_2}, \dots, 1^{k_s})$-vitesse verticale ζ d'origine $\tilde{x}$ dans Φ, c'est-à-dire, $\alpha\zeta$ est une vitesse nulle réduite à $\tilde{x}$.*

$I^{k_1}(B, \Phi)$ est défini comme la définition précédente de $I^r(V_n, \Phi)$ avec la condition (16. 2). Par récurrence on définit encore l'ensemble

$$(16, 3) \qquad I^{k_s}(B, I^{k_{s-1}}(B, \dots, I^{k_1}(B, \Phi)\dots)).$$

Alors, nous avons la

DÉFINITION. *Un élément de connexion holonome d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ en $x \in B$ est un élément Z de l'ensemble* (16.3). *L'élément $Z^{-1} = \rho Z$, où ρ est la symétrie $\theta \to \theta^{-1}$ dans Φ, est un coélément de connexion holonome d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$.*

Et immédiatement le théorème est obtenu.

THÉORÊME 10. *À toute $(1^{k_1}, 1^{k_2}, \dots, 1^{k_s})$-vitesse ξ d'origine x, un élément de connexions holonomes d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ fait correspondre le déplacement infinitésimal holonome $Z\xi$ de la fibre de x.*

Soit $\Phi^{k_1k_2\dots k_s}$ le prolongement holonome d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ de Φ et $Q^{k_1k_2\dots k_s}$ l'ensemble des éléments de connexion d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ sur B. Sur $Q^{k_1k_2\dots k_s}$, on peut définir une structure fibrée admettant $\Phi^{k_1k_2\dots k_s}$ comme groupoïde principal associé. Ses fibres sont isomorphes à

$$T_n^{k_s}(T_n^{k_{s-1}}(\dots(T_n^{k_1}(e \in G))\dots)), \qquad (n: \text{la dimension de B}),$$

l'espace des vitesses d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ de G, et d'origine e. Comme ces fibres sont homéomorphes à un espace numérique, $Q^{k_1k_2\dots k_s}$ admet une section et nous avons la

DÉFINITION. *Une section de l'ensemble $Q^{k_1k_2\dots k_s}$ des éléments de connexion d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ définit une connexion holonome infinitésimale d'ordre $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ sur E.*

Alors, par cette connexion, celle sur tout espace fibré associé à $\Phi = HH^{-1}$ peut être conduite.

REMARQUE. En considérant la définition de $(n^{k_1}, n^{k_2}, \ldots, n^{k_s})$-vitesse verticale, on peut dire que cette connexion d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ est une sorte des connexions (non holonomes) d'ordre $k_1 + k_2 + \cdots + k_s$ au sens large.

DÉFINITION. *Dans la définition précédente, en utilisant jets semi-holonomes, vitesses semi-holonomes et prolongements semi-holonomes de* Φ *au lieu de jets holonomes, vitesses holonomes et prolongements holonomes de* Φ, *les connexions semi-holonomes d'ordre* $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ *sur* E *sont définies.*

En particulier, en remplaçant l'espace fibré E par un prolongement d'ordre $(h_1, h_2, \ldots, h_t; l)$ de V_n, les connexions précédentes nous conduisent aux connexions holonomes (ou semi-holonomes) infinitésimales d'ordre $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ des prolongements d'ordre $(h_1, h_2, \ldots, h_t; l)$ de V_n.

BIBLIOGRAPHIE

H. V. CRAIG :

[1] On tensors relative to the extended point transformation. Amer. J. M., 59 (1937), 764-774.
[2] On extensors and a Euclidean basis for higher order spaces, Amer. J. M., 61 (1937), 791-808.
[3] Vector and tensor analysis, McGraw-Hill Book Co., (1943).
[4] On the multiple parameter Jacobian extensor, Tensor N. S., 2 (1952), 27-35.
[5] On certain linear extensor equations, Tensor, N. S., 4 (1954), 40-50.
[6] On certain linear extensor equations II, Tensor, N. S., 5 (1955), 77-84.
[7] On extensors first order partial differential equations and Poisson brackets, Tensor, N. S., 5 (1956), 159-164.

CH. EHRESMANN :

[1] Les prolongements d'une variété defférentiable, Atti IV Congresso Unione mat. Italiana, Taormina Ott., (1951), 1-9.
[2] Les prolongements d'une variété différentiable, I. Calcul des jets, prolongement princial, C. R. Ac. Sc., Paris, 233 (1951), 598-600.
[3] Les prolongements d'une variété différentiable, II. L'espace des jets d'ordre r de V_n dans V_m, C. R. Ac. Sc., Paris, 233 (1951), 777-779.
[4] Les prolongements d'une variété différentiable, III. Transitivité des prolongements, C. R. Ac. Sc., Paris, 233 (1951), 1081-1083.
[5] Structures locales et structures infinitésimales, C. R. Ac. Sc., Paris, 234 (1952), 587-589.
[6] Les prolongements d'une variété diffèrentiable, IV. Éléments de contact et éléments d'enveloppe, C. R. Ac. Sc., Paris, 234 (1952), 1028-1030.
[7] Les prolongements d'une variété différentiable, V. Covariants différentiels et prolongements d'une structure infinitésimale, C. R. Ac. Sc., Paris, 234 (1952), 1424-1425.
[8] Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie, Colloque intern. Géométrie différentielle de Strasbourg, C. N. R. S., (1953), 97-110.
[9] Extension du calcul des jets aux jets non-holonomes, C. R. Ac. Sc., Paris, 239 (1954), 1762-1764.
[10] Sur les structures infinitésimales régulières, Proceedings intern. Congress of Math.,

Amsterdam (1954).
[11] Applications de la notion de jet non holonome, C. R. Ac. Sc., Paris, 240 (1955), 397-399.
[12] Les prolongements d'un espace fibré différentiable, C. R. Ac. Sc., Paris, 240 (1955). 1755-1757.
[13] Les connexions infinitésimales d'ordre supérieur, Dagli Atti des V Congresso dell'Unione mat. Italiana, Pavia-Torino (1956), 1-3.

H. HOMBU ET T. SUGURI :

[1] A treatment of geometric quantities in the manifold of surface-elements, Mem. Fac. Sci., Kyûsyû Imp. Univ., Ser. A. 2 (1941), 67-90.

A. KAWAGUCHI :

[1] Theory of connections in a Kawaguchi space of higher order, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 13 (1937), 237-240.
[2] Einige Satze über die Extensoren, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 17 (1938), 166-176.
[3] Views on higher geometry of connections, Tensor, 1 (1938), 13-18.
[4] Eine Verallgemeinerung von Extensoren, Monatsh., 48 (1939), 329-339.
[5] Views on higher order geometry of connections, II, Tensor, 2 (1939), 39-45.
[6] Die Differentialgeometrie höherer Ordnung I. Erweiterte Koordinatentransformationen und Extensoren, Jour. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., 9 (1940), 1-152.
[7] Views on higher order geometry of connections, III, Tensor, 3 (1940), 68-70.
[8] Views on higher order geometry of connections, IV, Tensor, 4 (1941), 66-68.
[9] Die Differentialgeometrie höherer Ordnung III. Erweiterte Parametertransformationen und P-Tensoren, Jour. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., 10 (1941), 77-156.
[10] On the theory of non-linear connections I. Introduction to the theory of general non-linear connections, Tensor, N. S., 2 (1952), 123-142.
[11] On the theory of non-linear connections, Convegno internazionale di Geom. Diff., (1953), 27-32.
[12] On the theory of non-linear connections II. Theory of Minkowski space and of non-linear connections in a Finsler space, Tensor, N. S., 6 (1956) 165-199.
[13] Die Differentialgeometrie höherer Ordnung IV, Erweiterung der verallgemeinerten Rheonomtransformation von Flächenelementen höherer Ordnung und R_K-Extensoren, Publicationen Mathematicae, Debrecen, 7 (1960) 256-276.

M. KAWAGUCHI :

[1] A generalization of the extensor, Tensor, N. S., 2 (1952), 59-66.
[2] On a generalization of the multiple parameter extensor, Tensor, N. S., 2 (1952), 99-101.
[3] On some theorems in the g-extensor analysis, Tensor, N. S., 3 (1953), 46-52.
[4] Sur les dérivées covariantes des g-extenseurs, Tensor, N. S., 11 (1961), 74-98.
[5] An introduction to the theory of Kawaguchi spaces, R. A. A. G., 3°Series, No. 33, (1960), 1-41.

V. V. VAGNER :

[1] The theory of composite manifolds, Trudy Sem. Vektor, Tensor, Analizu, 8 (1960), 11-72.
[2] The geometry of the generalized Cartan spaces and the theory of geometric differential objects, Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.), 77 (1951), 777-780.

FACULTÉ DES SCIENCES,
UNIVERSITÉ DE HOKKAIDO, SAPPORO.