GROUPES SIMPLES DE CHEVALLEY

EIICHI ABE

(Received November 22, 1960)

1. Introduction. Utilisant la théorie des algèbres de Lie semi-simples, Chevalley [1] a construit des groupes simples attachés à tous les types de groupes continus simples complexes (classiques ou exceptionnels). Dans le présent mémoire, nous donnerons une autre démonstration de la simplicité des groupes de Chevalley. Récemment, R.Steinberg [6] a construit certains groupes simples attachés à certains types de groupes continus simples réels en faisant une modification aux groupes de Chevalley de types A_n, D_n $(n \geqq 4)$, E_6, d'ailleurs il a construit une classe de groupes simples qui ne sont pas attachés à aucuns groupes simples continus réels en faisant une autre modification aux groupes de Chevalley de types D_4. Notre démonstration de la simplicité peut aussi s'appliquer à ces groupes et, bien qu'ils soient tres rares, nous pouvons démontrer la simplicité de certains groupes modifiés qui sont exceptés dans la démonstration de Steinberg.

Les groupes de Chevalley et leurs modifications par Steinberg serons introduits dans les paragraphes **4** et **7**. Après avoir donné dans le paragraphe **2** certains résultats connus sur les algèbres de Lie semi-simples, nous introduirons dans les paragraphes **3** et 5 certaines classes de sous-algèbres maximales et de sous-groupes maximaux. Celles-là sont des généralisations des sous-algèbres traitées par Sato [4] sur les algèbres linéaires spéciales et recherchées en général par Dynkin [2] sur les algèbres semi-simples complexes. Si le corps de base est algébriquement clos de caractéristique 0, ceux-ci sont des sous-groupes algébriques des groupes de Chevalley dont les algèbres de Lie sont isomorphes à celles-là. La démonstration de la simplicité sera donnée dans le paragraphe **6** dans lequel les sous-groupes maximaux introduits au préalable jouerons un rôle important. Cette méthode de la démonstration est de plus analogue à celle d'Iwasawa [3] sur les groupes projectifs spéciaux et à celle de Tamagawa [7] qui a appliqué sa méthode aux groupes orthogonaux.

2. Préliminaire. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de rang n sur le corps C des nombres complexes; $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$; Δ le système des racines $\neq 0$ de $\mathfrak{g}$ (par rapport à $\mathfrak{h}$), et soit $B(X, Y)$ la forme de

Killing de $\mathfrak{g}$. La restriction de B à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ sera notée simplement (H, H'), qui est la forme bilinéaire non dégénérée. Pour toute racine $r \in \Delta$, il existe un élément et un seul $H'_r \in \mathfrak{h}$ tel que $r(H) = (H, H'_r)$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$. Nous poserons $H_r = 2\, r(H'_r)^{-1} H'_r$. On peut alors attacher à toute racine r un élément radiciel X_r de telle manière que les conditions suivantes soient satisfaites[1]:

(1) on a $[X_r, X_{-r}] = H_r$ pour toute racine r,

(2) si $r, s, r+s$ sont des racines, on a $[X_r, X_s] = N_{r,s} X_{r+s}$ avec $N_{r,s} = \pm(p+1)$, p étant le plus grand entier $i \geqq 0$ tel que $s - ir$ soit une racine.

Soit $\mathfrak{H}$ le groupe additif engendré par H_r, $r \in \Delta$. Une base $(H_1, H_2, \ldots\ldots, H_n)$ de $\mathfrak{H}$ avec les $X_r, r \in \Delta$, formons une base de $\mathfrak{g}$ et nous l'appellerons une base canonique. Nous désignerons par V l'espace vectoriel sur le corps R des nombres réels qui est le dual de l'espace R-vectoriel engendré par H_r, $r \in \Delta$, alors Δ est un ensemble fini de V et la symétrie de Weyl w_r définie par $w_r(u) = u - u(H_r)r$ pour $u \in \Delta$ est l'opérateur linéaire de V conservant l'ensemble Δ. Le système de racines vérifie les conditions suivantes;

(3) l'ensemble Δ engendre un groupe additif discret dans V,

(4) l'espace vectoriel V est engendré par Δ,

(5) si $r \in \Delta$, on a $-r \in \Delta$, mais $\pm kr \notin \Delta$ pour tout entier $k > 1$.

(6) pour toute $r \in \Delta$, il existe une symétrie w_r appliquant r sur $-r$ et telle que $w_r(\Delta) = \Delta$.

Nous dirons en général qu'un sous-ensemble fini Δ de V vérifiant les conditions (3)-(6) est un système de racines de l'espace vectoriel V.
nous désignerons par $W(\Delta)$ le groupe d'opérateurs dans V engendré par $w_r, r \in \Delta$ et nous l'appellerons le groupe de Weyl de Δ. On peut définir sur le dual V^* de V un produit scalaire défini positif par la formule:

$$(f, g) = \sum_{r \in \Delta} f(r)\, g(r).$$

Par dualité, on définit donc ainsi un produit scalaire (x, y) défini positif sur V, qui sera invariant par tout opérateur linéaire dans V conservant l'ensemble Δ (cf. la forme de Killing). Nous poserons

$$A_{r,s} = 2(r,s)/(s,s) \tag{7}$$

alors $A_{r,s} = p - q$ où $[-p, q]$ est l'intervalle de l'ensemble des entiers, p et q étant des entiers $\geqq 0$, tels que $s + ir$ soit une racine pour $-p \leqq i \leqq q$. On a donc $w_r(s) = s - A_{s,r} r$.

Comme l'ensemble Δ est fini, il existe $x \in V$, tel que l'on ait $(x, r) \neq 0$ pour toute racine r; nous noterons Σ l'ensemble des racines r telles que $(x, r) > 0$.

---

1) Cf. Chevalley [1] Théorème 1 de §I.

Les ensembles Σ et $-\Sigma$ forment donc une partition de Δ. Nous munirons V de la relation d'ordre (partielle) compatible avec sa structure d'espace vectoriel réel pour laquelle les éléments positifs sont les combinaisons linéaires à coefficients $\geqq 0$ d'éléments de Σ. Il est clair que Σ est l'ensemble des racines positives. Considérons l'ensemble $\mathfrak{F}$ des parties F de Σ telles que tout élément de Σ soit de combinaison linéaire à coefficients $\geqq 0$ d'éléments de F, et soit Π un élément minimal de l'ensemble $\mathfrak{F}$ ordonné par inclusion. On supposera numérotés les éléments de Π sous la forme $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$. On a alors

(8) Π est une base de V (donc $m = n$),

(9) toute racine est de la forme $\pm \Sigma \lambda_i a_i$ avec $\lambda_i \geqq 0$ entier,

(10) les scalaires $a_{ij} = -A_{a_i a_j}$ sont entiers $\geqq 0$ pour $i \neq j$.

La partie Π de Δ ne dépend que de Σ, ainsi l'on dit que les éléments de Π sont les racines fondamentales et que Π est un système de racines fondamentales. Nous appellerons $h(r) = \Sigma \lambda_i$ la hauteur de r par rapport à Π. Pour $w \in W(\Delta)$ si l'on a $w(\Sigma) = \Sigma$, alors $w = 1$. De plus

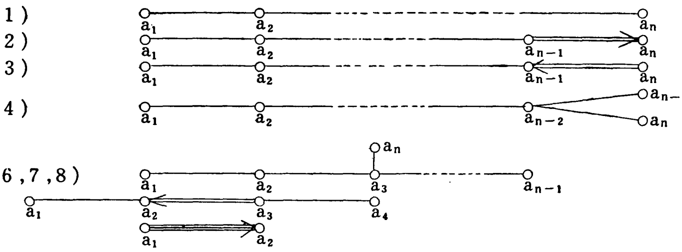
(11) pour deux systèmes de racines fondamentales Π, Π', il existe un élément w de $W(\Delta)$ tel que $w(\Pi) = \Pi'$.[2)]

Soit Δ' un sous-ensemble de Δ satisfaisant aux conditions: *a*) si $r, s \in \Delta'$ et $r + s \in \Delta$, on a $r + s \in \Delta'$; *b*) si $r \in \Delta'$ on a $-r \in \Delta'$. Alors $w_r(\Delta') = \Delta'$ pour $r \in \Delta'$. Donc Δ' est un système de racines dans l'espace vectoriel V' qui est le sous-espace de V engendré par les $r \in \Delta'$. Son groupe de Weyl est le groupe engendré par les restrictions de w_r à V'. Nous identifierons le groupe de Weyl $W(\Delta')$ avec le sous-groupe de $W(\Delta)$ engendré par les w_r, $r \in \Delta'$. Nous appellerons dans ce qui suit Δ' un sous-système de racines de Δ.

On fait correspondre à Π un diagramme S ainsi obtenu: à chaque $a_i \in \Pi$ on fait correspondre un point S_i du plan, deux points distincts S_i, S_j étant joints par un nombre de traits égal à $a_{ij}a_{ji}$, et orienté de S_i à S_j si $(a_i, a_i) > (a_j, a_j)$. On dit que le système de racines Δ est connexe s'il n'existe pas de partitions $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$, toute élément de Δ' étant orthogonal à tout élément de Δ''. Le diagramme d'un système de racines fondamentales Π d'un système de racines connexe est à une similitude près un des systèmes $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n (n = 6,7,8)$, F_4, G_2 du tableau qui suit, et il existe une algèbre de Lie simple à une isomorphisme près dont le système de racines est un de ces types.

2) Cf. Séminaire Chevalley [5]. Ce peut être déduit de la Proposition 6 de l'Exposé 14.

(A_n) $(n \geqq 1)$
(B_n) $(n \geqq 2)$
(C_n) $(n \geqq 3)$
(D_n) $(n \geqq 4)$
(E_n) $(n = 6, 7, 8)$
(F_4)
(G_2)



3. Certains sous-algebres maximales. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur le corps C, et $(H_1, H_2, \cdots\cdots\cdots, H_n, X_r,\ r \in \Delta)$ sa base canonique. On désigne par $\mathfrak{g}_Z$ le groupe additif engendré par cette base, qui admet une structure d'algèbre de Lie sur l'anneau Z des entiers. Soit maintenant K un corps quelconque. Le produit tensoriel $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g}_Z \otimes K$ admêt une structure d'algèbre de Lie sur K qui sera dorénavant designée par $\mathfrak{g}$ tandique l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ sera désignée par $\mathfrak{g}_C$. Pareillement, $\mathfrak{H} \otimes K$, $H_i \otimes 1$, $X_r \otimes 1$ serons désignés par $\mathfrak{h}$, H_i, X_r respectivement où l'élément neutre sera noté 1 quelque soit le corps en question. Alors $(H_1, H_2, \cdots\cdots\cdots, H_n, X_r, r \in \Delta)$ est aussi une base de $\mathfrak{g}$ que nous appellerons encore une base canonique de $\mathfrak{g}$. Nous supposons choisi une fois pour toutes un système de racines fondamentales $\Pi = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de Δ. Soit $\Delta^{(i)}$ le sous-ensemble de Δ formé de racines $r = \Sigma\lambda_k a_k$ telles que $\lambda_i \geqq 0$; $\Delta_1^{(i)}$ le sous-emsemble de $\Delta^{(i)}$ formé de racines $r = \Sigma\lambda_k a_k$ telles que $\lambda_i = 0$; $\Delta_0^{(i)}$ le sous-ensemble de $\Delta^{(i)}$ formé de racines $r = \Sigma\lambda_k a_k$ telles que $\lambda_i > 0$. Alors les ensembles $\Delta_1^{(i)}$ et $\Delta_0^{(i)}$ forment une partition de $\Delta^{(i)}$, de plus les ensembles $\Delta^{(i)}$ et $-\Delta_0^{(i)}$ forment celle de Δ. D'ailleurs on a

(13) si $r, s \in \Delta_0^{(i)}$ et $r + s \in \Delta$, alors $r + s \in \Delta_0^{(i)}$,
(14) si $r, s \in \Delta_1^{(i)}$ et $r + s \in \Delta$, alors $r + s \in \Delta_1^{(i)}$,
(15) si $r \in \Delta_1^{(i)}$, $s \in (\pm\Delta_0^{(i)})$ et $r + s \in \Delta$, alors $r + s \in (\pm\Delta_0^{(i)})$.

Nous démontrerons maintenant le lemme suivant:

LEMME 1. *Si $r \in \Delta_0^{(i)}$, il existe une suite finie $(r_0, r_1, \cdots\cdots\cdots, r_h)$ de racines positives telle que $r_0 = r$, $r_k - r_{k+1} \in \Pi$ $(1 \leqq k \leqq h-1)$ et $r_h = a_i$. Egalement si $r \in (-\Delta_0^{(i)})$, il existe une suite finie $(r_0, r_1, \cdots\cdots\cdots, r_h)$ de racines négatives telle que $r_0 = r$, $r_k - r_{k+1} \in -\Pi$ $(1 \leqq k \leqq h-1)$ et $r_h = -a_i$.*

DÉMONSTRATION. Nous démontrerons d'abord quelques assertions:

(16) Pour toute racine $r \in \Sigma$, $\notin \Pi$, il y a au moins une a_k telle que $A_{r, a_k} > 0$.

En effet, on a $2(r, r) = (r, r) A_{r,r} = \Sigma\lambda_k (r, r) A_{a_k, r} = \Sigma\lambda_k (a_k, a_k) A_{r, a_k}$, si $r = \Sigma\lambda_k a_k$. Les λ_k étant $\geqq 0$, l'un au moins des nombres A_{r, a_k} est > 0. Soit $r = \Sigma\lambda_k a_k \in \Delta_0^{(i)}$. Nous désignerons par $\Pi_1(r)$ l'ensemble de racines a_k de Π

telles que $\lambda_k = 1$; par $\Pi_2(r)$ l'ensemble de racines a_k de Π telles que $\lambda_k > 1$. Nous montrerons

(17) Supposons que $\Pi_2(r)$ ne soit pas nul, alors si $A_{r,a_k} > 0$ pour une $a_k \in \Pi_1(r)$ on a que a_k est orthogonale à toutes les racines de $\Pi_2(r)$.

En effet, $A_{r,a_k} = A_{a_k,a_k} + \sum_{j \neq k} \lambda_j A_{a_j,a_k} = 2 + \sum_{j \neq k} \lambda_j A_{a_j,a_k} > 0$. Les A_{a_j,a_k} étant $\leqq 0$ pour $j \neq k$, si $\lambda_j \geqq 2$, il doit devenir $A_{a_j,a_k} = 0$. Ce qui montre notre assertion.

(18) Soit $r \in \Delta_0^{(i)}$. Supposons aussi que $\Pi_2(r)$ ne soit pas nul. Alors il existe une suite finie $(r_0, r_1, \ldots\ldots\ldots, r_h)$ de racines positives telle que $r_0 = r$, $r_k - r_{k+1} \in \Pi$ $(1 \leqq k \leqq h-1)$, $A_{r_k, r_k - r_{k-1}} > 0$ et $\Pi_2(r_h)$ soit nul.

Nous démontrerons (18) par induction relativement à la hauteur $h(r)$ de racine r. Si $h(r) = 1$ ou 2, on a $\Pi_2(r)$ est nul. Si $h(r) = 3$ et $\Pi_2(r)$ n'est pas nul, alors $r = a_i + 2a_j$ ou $r = 2a_i + a_j$. Donc on a $r_1 = r - a_j$ ou $r_1 = r - a_i$ est une racine $a_i + a_j$. De plus $A_{r,a_j} = A_{a_i,a_j} + 2\,A_{a_j,a_j} > 0$ ou $A_{r,a_i} = 2\,A_{a_i,a_i} + A_{a_j,a_i} > 0$ respectivement. Donc notre assertion est vraie. Supposons maintenant que notre assertion soit vraie pour des racines de hauteurs $< h(r)$. Il suffira évidemment d'etablir qu'il existe une racine $a_j \in \Pi_2(r)$ telle que $A_{r,a_j} > 0$. En vertu de (16), il existe une racine a_j telle que $A_{r,a_j} > 0$. Si $a_j \in \Pi_2(r)$, elle prouverait notre assertion. Donc, supposons que $a_j \in \Pi_1(r)$. Posons $r_1 = r - a_j$, alors par l'hypothèse de l'induction il existe une racine $a_k \in \Pi_2(r)$ telle que $A_{r_1,a_k} > 0$, ceci parce que $h(r_1) < h(r)$ et $\Pi_2(r) = \Pi_2(r_1)$. En vertu de (17), a_j est orthogonal à a_k. Par suite on a $A_{r,a_k} = A_{r_1,a_k} + A_{a_j,a_k} = A_{r_1 a_k} > 0$. La racine a_k a donc le propriété requise, ce qui montre notre assertion.

En vertu de (18) il suffit de démontrer le lemme 1 pour une racine $r \in \Delta_0^{(i)}$ telle que $\Pi_2(r)$ soit nul. Si $\Pi_1(r)$ contient plus de deux racines, il existe au moins deux racines telles qu'elles soient orthogonales à toutes les racines de $\Pi_1(r)$ excepté une et seule une racine de $\Pi_1(r)$. Ceci parce que, dans le diagramme de Π, les points correspondants à des racines de $\Pi_1(r)$ sont connexes. Parmi ces deux racines, soit $a_k \neq a_i$. Alors on a $r_1 = r - a_k$ est une racine. En effet, $A_{r,a_k} = 2 + A_{a_j,a_k}$ pour une racine $a_j \in \Pi$. Si $A_{a_j,a_k} = -1$ on a $A_{r,a_k} > 0$ donc $r - a_k$ est une racine. Si $A_{a_j,a_k} = -2$, $a_j + 2a_k$ est une racine donc $r + a_k$ est aussi une racine. D'ailleurs $A_{r,a_k} = 0$, par suite $r - a_k$ est une racine. Enfin si $A_{a_j,a_k} = -3$, $a_j + 3a_k$ est une racine donc $r + 2a_k$ est une racine. D'ailleurs $A_{r,a_k} = -1$, par suite $r - a_k$ est une racine. Similairement on aura une suite de racines ayant les propriété requises. La seconde assertion sera pareillement démontrée.

PROPOSITION 1. *Soit* $\mathfrak{g}^{(i)}$ *le sous-algèbre de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *engendrée* *par* X_r *pour* $r \in \Delta^{(i)}$ *et par* $\mathfrak{h}$. *Si la caractéristique de* K *est* $\neq 2,3$ *alors* $\mathfrak{g}^{(i)}$ *est une sous-algèbre maximale de* $\mathfrak{g}$.

DÉMONSTRATION. Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ une sous-algebre de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \tilde{\mathfrak{g}} \subsetneqq \mathfrak{g}$. Parce que la caractéristique $\chi(K)$ de K est $\neq 2, 3$ $N_{r,s} \not\equiv 0 \pmod{\chi(K)}$ pour toutes racines r,s telles que $r+s$ soit une racine. Donc si $X_r, X_s \in \tilde{\mathfrak{g}}$ et que $r+s$ soit une racine, alors $X_{r+s} \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Supposons que X_{-a_i} soit contenu dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, on aura $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$. Donc $X_{-a_i} \notin \mathfrak{g}$. Nous montrerons que $X_r \notin \tilde{\mathfrak{g}}$ pour tout racine $r \in \Delta_0^{(i)}$. Ceci établit que $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}^{(i)}$ c'est-à-dire que $\mathfrak{g}^{(i)}$ soit une sous-algèbre maximale de $\tilde{\mathfrak{g}}$. En vertu du lemme 1, pour une racine $r \in (-\Delta_0^{(i)})$, il existe une suite finie $(r_0, r_1, \dots\dots\dots, r_h)$ de racines telle que $r_0 = r$, $r_{k-1} - r_k \in \Pi$ $(1 \leqq k \leqq h-1)$ et $r_h = -a_i$. Comme $X_{-a_i} \notin \tilde{\mathfrak{g}}$ et $X_{a_k} \in \tilde{\mathfrak{g}}$ pour toute $a_k \in \Pi$, on a $X_{r_{h-1}} \notin \tilde{\mathfrak{g}}$. Similairement on a $X_{r_{h-2}} \notin \tilde{\mathfrak{g}}, \dots\dots\dots, X_{r_0} = X_r \notin \tilde{\mathfrak{g}}$. Ce qui démontre notre assertion.

Soit $\mathfrak{g}_0^{(i)}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{(i)}$ engendrée par X_r pour $r \in \Delta_0^{(i)}$ et par H_{a_i}; $\mathfrak{g}_1^{(i)}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{(i)}$ engendrée par X_r pour $r \in \Delta_1^{(i)}$. Alors $\mathfrak{g}_0^{(i)}$ est un ideal résoluble de $\mathfrak{g}^{(i)}$ et $\mathfrak{g}^{(i)}$ est la somme semi-directe de $\mathfrak{g}_0^{(i)}$ et de $\mathfrak{g}_1^{(i)}$.

REMARQUE. Si la caractéristique de K est $= 0$, $\mathfrak{g}_0^{(i)}$ est le radical de $\mathfrak{g}^{(i)}$ et $\mathfrak{g}_1^{(i)}$ est une sous-algèbre semi-simple maximale de $\mathfrak{g}^{(i)}$. Donc $\mathfrak{g}^{(i)} = \mathfrak{g}_0^{(i)} \dotplus \mathfrak{g}_1^{(i)}$ est une décomposition de Levi.

4. Groupes de Chevalley. Pour toute racine $r \in \Delta$, nous posons $x_r(t) = \exp t(\operatorname{ad} X_r)$, $t \in C$. On sait alors qu'il existe une matrice $A_r(T)$, dont les coefficients sont les polynomes en une lettre T à coefficients entiers tels que, pour tout $t \in C$, la matrice qui représente $x_r(t)$ par rapport à la base canonique de $\mathfrak{g}_C$ soit $A_r(T)$.[3] Si $t \in K$, on peut substituer t à T dans les coefficients de la matrice $A_r(T)$; on obtient ainsi une matrice à coefficients dans K. Nous désignerons encore par $x_r(t)$ l'endomorphisme de l'espace K-vectoriel $\mathfrak{g}$ qui est représenté par cette matrice relativement à la base canonique de $\mathfrak{g}$. Alors $x_r(t)$ est une automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur le corps K. Nous désignerons par $\mathfrak{X}_r$ le groupe formé des $x_r(t)$, $t \in K$. Nous désignerons par G le groupe engendré par $\mathfrak{X}_r$ pour toute $r \in \Delta$ qui nous appellerons le groupe de Chevalley. (Remarque: Celui désigné par G' dans [1]) Nous dessinerons au-dessous des résultats de Chevalley sur la structure de G. Nous désignerons par $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ les sous-groupes de G engendrés par $\mathfrak{X}_r$, $r \in \Sigma$, et par $\mathfrak{X}_r$, $r \in (-\Sigma)$ réspectivement, qui sont sous-groupes résolubles de G. Tout élément u de $\mathfrak{U}$ ne peut se mettre que d'une seule manière sous la forme $u = x_{r_1}(t_1)\ x_{r_2}(t_2) \dots\dots\dots x_{r_N}(t_N)$ où $h(r_1) < h(r_2) \dots\dots\dots < h(r_N)$.

3) Cf. Chevalley [1] §II.

Soit $\chi_{r,z}$ un homomorphisme du groupe additif P_r engendré par les racines de $\mathfrak{g}_C$ dans le groupe multiplicatif K^* des éléments $\neq 0$ de K défini par $\chi_{r,z}(u) = Z^{u(H_r)}$, $z \in K^*$. Nous désignerons par $h(\chi_{r,z})$ l'automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui laisse fixes les éléments de $\mathfrak{h}$ et qui transforme X_s en $\chi_{r,z}(s)X_s$ pour toutes $r \in \Delta$; par $\mathfrak{H}_r$ le groupe formé des $h(\chi_{r,z}), z \in K^*$; par $\mathfrak{H}$ le groupe engendré par les $\mathfrak{H}_r$, $r \in \Delta$. (Remarque: Celui désigné par $\mathfrak{H}'$ dans [1]). Alors $\mathfrak{H} \subset G$. Ceci en vertu de l'existance d'homomorphisme ϕ_r, pour $r \in \Delta$, de $SL(2, K)$ sur un groupe d'automorphisme de $\mathfrak{g}$ tel que

$$(19) \quad \phi_r\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix} = x_{-r}(t);\ \phi_r\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = x_r(t);\ \phi_r\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z^{-1}\end{pmatrix} = h(\chi_{r,z}).$$

Parce que $SL(2, K)$ est engendré par $\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\phi_r(SL(2, K)) \subset G$ donc $\mathfrak{H}_r \subset G$et on a aussi $\mathfrak{H} \subset G$. Nous poserons $\omega_r = \phi_r\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ et désignerons par $\mathfrak{W}$ le groupe engendré par $\mathfrak{H}$ et par les éléments ω_r pour toute $r \in \Delta$. Il existe alors un homomorphisme ζ et un seul de $\mathfrak{W}$ sur le groupe de Weyl $W(\Delta)$ qui possède la propriété suivante:

(20) si $\omega \in \mathfrak{W}$ et $w = \zeta(\omega)$, on a $\omega\mathfrak{X}_r\omega^{-1} = \mathfrak{X}_{w(r)}$ et $\omega h(\chi)\omega^{-1} = h(\chi')$ pour tout homomorphisme χ de P_r dans K^*, où χ' est l'homomorphisme χ de P_r dans K^*, défini par $\chi'(r) = \chi(w^{-1}(r))$ pour toute $r \in \Delta$; le noyau de l'homomorphisme ζ est $\mathfrak{H}$.

Nous choisirons un système de représentants des classes de $\mathfrak{W}$ modulo $\mathfrak{H}$, et nous désignerons par $\omega(w)$ celui de ces représentants pour lequel $\zeta(\omega(w)) = w$. Si $w \in W(\Delta)$, nous désignerons par $\mathfrak{U}_w$ le groupe engendré par les $\mathfrak{X}_r$ pour les racines positives r telles que $w(r) < 0$. Alors on a[4)]

PROPOSITION 2. *Le groupe G est la réunion des ensembles $\mathfrak{U}\mathfrak{H}\omega(w)\mathfrak{U}_w$, où w parcourt les éléments du groupe $W(\Delta)$. Ces ensembles sont mutuellement disjoints; un élément de $\mathfrak{U}\mathfrak{H}\omega(w)\mathfrak{U}_w$ ne peut se mettre que d'une seule maniere sous la forme $xh\omega(w)x'$, avec $x \in \mathfrak{U}$, $h \in \mathfrak{H}$, $x' \in \mathfrak{U}_w$.*

COROLLAIRE. *Soient Δ' le sous-système de racines de Δ et $\widetilde{G}$ le sous-groupe de G engendré par les $\mathfrak{X}_r$ pour $r \in \Delta'$. Le groupe $\widetilde{G}$ est alors la réunion des ensembles $\widetilde{\mathfrak{U}}\,\widetilde{\mathfrak{H}}\,\omega(w)\widetilde{\mathfrak{U}}_w$, où w parcourt les élément du groupe $W(\Delta')$ à condition que $\omega(w)$ sont contenus dans $\widetilde{G}$ et $\widetilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U} \cap \widetilde{G}$, $\widetilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \cap \widetilde{G}$, $\widetilde{\mathfrak{U}}_w = \mathfrak{U}_w \cap \widetilde{G}$. Ces ensembles sont mutuellement disjoints, un élément de $\widetilde{\mathfrak{U}}\widetilde{\mathfrak{H}}\omega(w)\widetilde{\mathfrak{U}}_w$ ne peut se mettre que d'une seule maniere sous la forme $xh\,\omega(w)x'$, avec $x \in \widetilde{\mathfrak{U}}$, $h \in \widetilde{\mathfrak{H}}$, $x' \in \widetilde{\mathfrak{U}}_w$.*

4) Cf. Chevalley [1] Théorème 2 de §III.

REMARQUE: Il existe un homomorphisme de $\widetilde{G}$, dont le noyau fini, sur le groupe de Chevalley attaché à l'algèbre de Lie semi-simple dont le système de racines est Δ'.

5. Certains sous-groupes maximaux. Les notations étant celle des paragraphes 2 et 3, nous désignerons par $G^{(i)}$ le sous-groupe de G engendré par $\mathfrak{H}$ et les $\mathfrak{X}_r$ pour $r \in \Delta^{(i)}$; par $G_0^{(i)}$ le sous-groupe de $G^{(i)}$ engendré par $\mathfrak{H}_{a_i}$ et les $\mathfrak{X}_r$ pour $r \in \Delta_0^{(i)}$; par $G_1^{(i)}$ le sous-groupe de $G^{(i)}$ engendré par les $\mathfrak{X}_r$ pour $r \in \Delta_1^{(i)}$. Le groupe $G_0^{(i)}$ est un sous-groupe résoluble distingué de $G^{(i)}$. Ceci en vertu de (15) et de la formule

$$x_r(t)x_s(u)x_r(t)^{-1} = \prod_{i,j} x_{ir+js}(C_{i,j;r,s}t^i u^j) \tag{21}$$

où le produit est étendu aux couples d'entiers $i > 0$, $j > 0$ tels que $ir + js$ soit une racine.[5] De plus, en vertu de la Proposition 2 et de son Corollaire il résulte que $G^{(i)}$ est le produit semi-direct de $G_0^{(i)}$ et de $G_1^{(i)}$. Nous démontrerons dans ce qui suit que le groupe $G^{(i)}$ est un sous-groupe maximal de G.

REMARQUE: Si le corps K est algébriquement clos, $G_1^{(i)}$ est un sous-groupe algébrique semi-simple de $G^{(i)}$ et $G_0^{(i)}$ est le radical de $G^{(i)}$.[6] D'ailleurs si le corps K est de caractéristique 0, les algèbres de Lie de $G^{(i)}$, $G_0^{(i)}$ et $G_1^{(i)}$ sont isomorphes aux algèbres $\mathfrak{g}^{(i)}$, $\mathfrak{g}_0^{(i)}$ et $\mathfrak{g}_1^{(i)}$ respectivement.

LEMME 2. *Soit $w \in W(\Delta)$. Pour que $w(\Delta_0^{(i)}) = \Delta_0^{(i)}$ et que $w(\Delta_1^{(i)}) = \Delta_1^{(i)}$ il faut et il suffit que w soit un élément de $W(\Delta_1^{(i)})$.*

DÉMONSTRATION. En vertu de (15), il appert que, si $w \in W(\Delta_1^{(i)})$, on a $w(\Delta_0^{(i)}) = \Delta_0^{(i)}$ et $w(\Delta_1^{(i)}) = \Delta_1^{(i)}$. Réciproquement, supposons que $w(\Delta_0^{(i)}) = \Delta_0^{(i)}$ et $w(\Delta_1^{(i)}) = \Delta_1^{(i)}$. Nous désignerons par $\bar{w}$ la restriction de w à $\Delta_1^{(i)}$. Etant $\Pi_1 = \Pi \cap \Delta_1^{(i)}$ et $\bar{w}(\Pi_1)$ les systèmes de racines fondamentales de $\Delta_1^{(i)}$, en vertu de (12), il existe un élément w_1 de $W(\Delta_1^{(i)})$ tel que ww_1^{-1} conserve l'ensemble des racines de $\Sigma_1 = \Sigma \cap \Delta_1^{(i)}$. Parce que $w_1^{-1}(\Delta_0^{(i)}) = \Delta_0^{(i)}$, on a $ww_1^{-1}(\Delta_0^{(i)}) = \Delta_0^{(i)}$. Donc $ww_1^{-1}(\Sigma) = \Sigma$. Ceci démontre que $ww_1^{-1} = 1$, c'est-à-dire $w = w_1 \in W(\Delta_1^{(i)})$.

LEMME 3. *Soit $\widetilde{G}$ un sous-groupe de G. Si $\mathfrak{X}_r$, $\mathfrak{X}_s$ sont contenus dans $\widetilde{G}$ et que $ir + js$ soit une racine pour $i > 0$, $j > 0$ entiers, il résulte que $\mathfrak{X}_{ir+js}$ est aussi contenu dans $\widetilde{G}$.*

DÉMONSTRATION. Les racines r,s sont contenues dans un certain sous-système de racines connexes Δ_1 de type (A_2), (B_2) ou (G_2) de Δ. Si Δ_1 n'est pas de type G_2, les seules combinaisons linéaires de coefficients entiers > 0 qui soient des racines sont r,s, $r + s$ ou d'ailleurs $r + 2s$ (ou $2r + s$). Dans le

5) Cf. Chevalley [1] p. 33.
6) Cf. Séminaire Chevalley [5], Exposé 9, Définitions 2 et 3.

premier cas, on a $x_r(t)x_s(1)x_r(t)^{-1}x_s(1)^{-1} = x_{r+s}(\pm t)$ pour $t \in K$. Donc $\mathfrak{X}_{r+s} \subset \widetilde{G}$. Dans le second cas, posons $x_r(t)x_s(1)x_r(t)^{-1}x_s(1)^{-1} = x_{r+s}(\pm t)x_{r+2s}(\pm t) = y$, alors on a $x_r(1)yx_r(1)^{-1}y^{-1} = x_{r+2s}(\pm t)$. Donc $\mathfrak{X}_{r+2s} \subset G$ et par suite $\mathfrak{X}_{r+s} \subset G$. Si Δ_1 est de type (G_2), excepté des cas anterieurs, il est possible que $r+s, r+2s$, $2r+s$ ou $r+s$, $2r+s$, $3r+s$, $3r+2s$ soient des racines. Mais nous pouvons démontrer dans ces cas de manière analogue au précédent.

PROPOSITION 3. *Le groupe $G^{(i)}$ est un sous-groupe maximal de G.*

DÉMONSTRATION. Soit $\widetilde{G}$ un sous-groupe de G tel que $G^{(i)} \subsetneqq G \subset \widetilde{G}$. Soit x un éléments de $\widetilde{G}$ qui n'est pas contenu dans $G^{(i)}$. Comme $\mathfrak{U}, \mathfrak{H}$ sont contenus dans $G^{(i)}$, si $x = uh\omega(w)u'$ pour $u \in \mathfrak{U}$, $h \in \mathfrak{H}$, $u' \in \mathfrak{U}_w$, alors $\omega(w)$ est un élément de G, mais celui-ci n'est pas contenu dans $G^{(i)}$. On a donc $w \notin W(\Delta_1^{(i)})$. En vertu du lemme 2, $w(\Delta_1^{(i)}) \neq \Delta_1^{(i)}$ ou $w(\Delta_0^{(i)}) \neq \Delta_0^{(i)}$ c'est-a-dire qu'il existe une racine $r \in \Delta_1^{(i)}$ telle que $w(r) \in (\pm\Delta_0^{(i)})$ ou il existe une racine $r \in \Delta_0^{(i)}$ telle que $w(r) \in (-\Delta_0^{(i)})$ ou $\Delta_1^{(i)}$. Dans le premier cas, si $w(r) \in \Delta_1^{(i)}$ pour $r \in \Delta_1^{(i)}$, $w(-r) \in (-\Delta_0^{(i)})$ où $-r \in \Delta_1^{(i)}$. Dans le second cas, si $w(r) \in \Delta_1^{(i)}$ pour $r \in \Delta_0^{(i)}$, $w(s) = -r \in (-\Delta_0^{(i)})$ où $s = -w(r) \in \Delta_1^{(i)}$. Nous avons donc démontré qu'il existe une racine s de $\Delta^{(i)}$ telle que $w(s)$ ou $w^{-1}(s)$ soit une racine de $-\Delta_0^{(i)}$. Comme $\mathfrak{X}_s \subset G$ et que $\omega(w) \in \widetilde{G}$, en vertu des formules

$$\omega(w)\mathfrak{X}_s\omega(w)^{-1} = \mathfrak{X}_{w(s)};\quad \omega(w)^{-1}\mathfrak{X}_s\omega(w) = \mathfrak{X}_{w^{-1}(s)}$$

on a $\mathfrak{X}_{w(s)} \subset \widetilde{G}$ et $\mathfrak{X}_{w^{-1}(s)} \subset \widetilde{G}$. Par consequent on a démontré qu'il existe une racine r de $-\Delta_0^{(i)}$ telle que $\mathfrak{X}_r \subset G$. En vertu du lemme 1, il existe une suite de racines $(r_0, r_1, \dots\dots\dots, r_h)$ telle que $r_0 = r$, $r_{k+1} - r_k \in \Pi$ $(1 \leqq k \leqq h - 1)$ et $r_h = -a_i$. On a donc $\mathfrak{X}_{r_i} \subset \widetilde{G}$ pour tout $0 \leqq i \leqq h$. Ceci en vertu du lemme 3. En particulier, $\mathfrak{X}_{-a_i} \subset \widetilde{G}$. Parce que le groupe G est engendré par les groupes $\mathfrak{X}_{a_k}$ et $\mathfrak{X}_{-a_k}$ pour $a_k \in \Pi$[7], on a $\widetilde{G} = G$. Ceci démontre notre assertion.

PROPOSITION 4. *L'intersection des groupes maximaux $G^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ de G est le groupe $\mathfrak{U}\mathfrak{H}$.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que l'intersection des groupes $G^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ contient $\mathfrak{U}\mathfrak{H}$. Supposons qu'un élément $x = uh\omega(w)u'$ de G soit contenu dans l'intersection des groupes $G^{(i)}$. Comme $\mathfrak{U}, \mathfrak{H} \subset G^{(i)}$, on a $\omega(w) \in G^{(i)}$ donc $w \in W(\Delta_1^{(i)})$. En vertu du lemme 2, $w(a_i) \in \Delta_0^{(i)}$ pour tout i. Par suite w conserve l'emsemble des racines positives Σ. Donc on a $w = 1$. Ceci démontre que $x = uh \in \mathfrak{U}\mathfrak{H}$. La proposition a donc été démontrée.

7) Cf. Chevalley [1] p. 38 Lemme 4.

6. Démonstration de la simplicité. Supposons maintenant que $\mathfrak{g}_C$ soit une algèbre de Lie simple.

LEMME 4. *Soit N un sous-groupe distingué de G. Sauf dans le cas où $\mathfrak{g}_C$ est de type (G_2) et K à 2 éléments, s'il y a une racine r telle que $\mathfrak{X}_r \subset N$, on a alors $N = G$.*

Pour la démonstration, voir Chevalley [1] p. 62-63.

LEMME 5. *Supposons que l'on ne soit pas dans l'un des cas suivants: a) K est un corps à 2 éléments, et $\mathfrak{g}_C$ est de l'un des types (A_1), (B_2) ou (G_2); b) K est un corps à 3 éléments et $\mathfrak{g}_C$ est de type (A_1). Alors le groupe des commutateurs de G est identique au groupe G.*

DÉMONSTRATION. Si le rang de $\mathfrak{g}_C$ est $= 1$, on sait que G est isomorphe à $PSL(2, K)$ qui est simple sauf dans le cas où K est un corps à 2 ou 3 éléments. Donc notre assertion est vraie. Supposons maintenent que le rang de $\mathfrak{g}_C$ soit $\geqq 2$. Comme le groupe des commutateurs G' de G est un sous-groupe distingué de G, en vertu du lemme 4 il suffit d'établir qu'il y a une racine r telle que $\mathfrak{X}_r$ soit contenu dans G'. Sauf dans le cas où $\mathfrak{g}_C$ est de type (B_2) il existe deux racines r,s telles qu'elles forment un système de racines fondamentales de certain sous-système de type (A_2) de Δ.[8] Donc on a $x_r(t)x_s(1)x_r(t)^{-1} x_s(1)^{-1} = x_{r+s}(\pm t) \in G'$, par suite $\mathfrak{X}_{r+s} \subset G'$. Supposons maintenant que $\mathfrak{g}_C$ soit de type (B_2) et K est un corps à plus de 3 éléments. Soit (a_1, a_2) un système de racines fondamentales de $\mathfrak{g}_C$. Alors on a $x_{a_1}(t)x_{a_2}(1)x_{a_1}(t)^{-1}x_{a_2}(1)^{-1} = x_{a_1+a_2}(\pm t) x_{a_1+2a_2}(\pm t) = y$ est un élément de G'. Pour un élément $z \neq 1$ de K^*, $h(\chi_{a_1,z})y h(\chi_{a_1,z})^{-1} y^{-1} = x_{a_1+a_2}(\pm(z-1)t) \in G$. Ceci parce que $\chi_{a_1,z}(a_1 + a_2) = z \neq 1$ et $\chi_{a_1,z}(a_1 + 2a_2) = 1$. On a donc $\mathfrak{X}_{a_1+a_2} \subset G'$. Ce qui démontre notre assertion.

LEMME 6. *Soit N un sous-group distingué de G contenant un élément $\neq 1$. Il existe un groupe $G^{(i)}$ tel que $N \not\subset G^{(i)}$. On a donc $N \cdot G^{(i)} = G$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que N soit contenu dans $G^{(i)}$ pour tout i. En vertu de la Proposition 4, on aura $N \subset \mathfrak{U}\mathfrak{H}$. Si $x = uh \neq 1$ est contenu dans N et que u ne soit pas 1, soit $u = x_{r_1}(t_1)x_{r_2}(t_2)\cdots\cdots\cdots x_{r_k}(t_k)$ où $t_i \neq 0$, $h(r_1) < h(r_2) < \cdots\cdots\cdots < h(r_k)$, on a

$$\omega_{r_k} x \omega_{r_k}^{-1} = u'h'\omega_{r_k} x_{r_k}(\pm t_k^{-1}) \text{ où } u' \in \mathfrak{U}, h' \in \mathfrak{H}$$

parce que $w_{r_k}(r_i) > 0$ pour toute $r_i \neq r_k$ et $\omega_r x_r(t) \omega_r^{-1} = x_{-r}(-t) = x_r(-t^{-1}) h(\chi_{r,-t^{-1}}) \omega_r x_r(-t^{-1})$. (cf. (20)). Ce qui nous amène à une contradiction avec l'hypothèse $N \subset \mathfrak{U}\mathfrak{H}$. Si $u = 1$ pour tout élément x de N, on aura $N \subset \mathfrak{H}$. Soit

8) Cf. Figure 1. Dans le cas où $\mathfrak{g}_C$ est de type (G_2), il suffit de poser $r = a_1$, $s = -(2a_1 + 3a_2)$.

$h(\chi)$ un élément $\neq 1$ de N. Il y a alors une racine r telle que $\chi(r) \neq 1$. On a donc

$$x_r(t)h(\chi)x_r(t)^{-1} = h(\chi)x_r((\chi(r) - 1)t).$$

Ce qui nous amène à une contradiction avec l'hypothèse $N \subset \mathfrak{H}$. Ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 1. *Supposons qu'on ne soit pas dans l'un des cas suivants: a) K est un corps à 2 éléments et $\mathfrak{g}_C$ est de l'un des types (A_1), (B_2) ou (G_2); b) K est un corps à 3 élements et $\mathfrak{g}_C$ est de type (A_1). Alors le groupe G est simple.*

DÉMONSTRATION. Soit N un sous-groupe distingué $\neq (1)$ de G. En vertu du lemme 6, il existe au moins un sous-groupe maximal $G^{(i)}$ de G tel que $G = N \cdot G^{(i)}$. Le groupe $G^{(i)}$ est le produit semi-direct du sous-groupe résoluble distingué $G_0^{(i)}$ de G et du sous-groupe $G_1^{(i)}$ de G. Alors $N \cdot G_0^{(i)}$ est un sous-groupe distingué de G. Comme $NG_0^{(i)}$ contient le sous-groupe $\mathfrak{X}_{a_i}$, en vertu du lemme 4, on a $NG_0^{(i)} = G$. Par suite

$$G/N = NG_0^{(i)}/N \cong G_0^{(i)}/G_0^{(i)} \cap N.$$

En vertu du lemme 5, le groupe des commutateurs de G/N est identique à G/N lui-même. D'ailleurs comme $G_0^{(i)}$ est résoluble, $G_0^{(i)}/G_0^{(i)} \cap N$ est aussi résoluble. Par consequent on a $G/N = (1)$, c'est à dire $G = N$. Ceci démontre que le groupe G est simple.

7. Modifications des groupes de Chevalley. Nous introduirons ici certains modifications des groupes de Chevalley par Steinberg et montrerons que notre démonstration de la simplicité est applicable à ces groupes. Soit $\mathfrak{g}_C$ une algèbre de Lie simple de l'un des types (A_{2l-1}), $l \geqq 1$, (D_n), $n \geqq 4$, ou (E_6). Son Schéma du système de racines fondamentales Π est donc symétrique. Soit σ une transformation de Π telle que (cf. Figure 1)

(22) $a_i \to a_{2l-i}$ si $\mathfrak{g}_C$ est de type (A_{2l-1}),

(23) $a_i \to a_i$ $(1 \leqq i \leqq n-2)$ et $a_{n-1} \to a_n$ si $\mathfrak{g}_C$ est de type (D_n),

(24) $a_3 \to a_3, a_6, \to a_6, a_1 \to a_5, a_2 \to a_4$ si $\mathfrak{g}_C$ est de type (E_6).

Alors σ induit une transformation de V en lui-même. Nous noterons que $\sigma(r) = \bar{r}$. Il est important dans ce qui suit que, si $\sigma(r) \neq r, r$ et $\sigma(r)$ soient orthogonales l'une à l'autre. On sait qu'il existe une automorphisme σ_0 de $\mathfrak{g}_Z$ telle que X_r soit transformé en $\pm X_{\bar{r}}$ pour $r \in \Delta$ et de plus X_{a_i} soit transformé en $X_{\bar{a}_i}$ pour toute $a_i \in \Pi$.

Soit maintenant K un corps avec l'automorphisme σ_1 de l'ordre 2. Nous désignerons par $\sigma_1(\alpha) = \bar{\alpha}$ pour $\alpha \in K$ et par K_0 le sous-corps de K formé des éléments α de K tels que $\sigma_1(\alpha) = \alpha$. Alors il existe une semi-automorphisme de Lie $\mathfrak{g}$ sur le corps K définie par la formule

$$(\alpha X_r) \to \sigma_1(\alpha)\sigma_0(X_r).$$

Nous désignerons par V$'$ l'espace R-vectoriel qui est le sous-espace R-vectoriel de V formé des vecteurs invariants par σ. Soient Δ_0 l'ensemble des racines r de Δ telles que $\sigma(r) = r$; Δ_1 l'ensemble des racines r de Δ telles que $\sigma(r) \neq r$. Les ensembles Δ_0 et Δ_1 forment donc une partition de Δ. Or, soit Δ' l'ensemble de vecteurs de V' qui est la réunion de l'ensenble Δ'_0 de racines $r \in \Delta_0$ et de l'enemble Δ'_1 de vecteurs $(r + \bar{r})/2$ pour $r \in \Delta_1$. Nous poserons $w_{r'} = w_r$ si $r' = r \in \Delta'_0$; $w_{r'} = w_r w_{\bar{r}}$ si $r = (r + \bar{r})/2$ pour $r \in \Delta_1$. Alors $w_{r'}$ est une symétrie de V' appliquant r' sur $-r'$ telle que $w_{r'}(\Delta') = \Delta'$. Par suite le sous-ensemble fini Δ' de V' vérifie les conditions (3) $-$ (6). Δ' est donc un systéme de racines de V'. L'ensemble qui suit est un système de racines fondamentales de Δ' par rapport à l'ordre induit par celui de V lequel nous choisirons une fois pour toutes.

(25) $a'_1 = (a_1 + a_{2l-1})/2$, $a'_2 = (a_2 + a_{2l-2})/2, \ldots\ldots, a'_{l-1} = (a_{l-1} + a_{l+1})/2$, $a'_l = a_l$ si $\mathfrak{g}_C$ est de type (A_{2l-1}),

(26) $a'_1 = a_1, \ldots\ldots, a'_{n-2} = a_{n-2}, a'_{n-1} = (a_{n-1} + a_n)/2$ si $\mathfrak{g}_C$ est de type (D_n),

(27) $a'_1 = (a_1 + a_5)/2, a'_2 = (a_2 + a_4)/2, a'_3 = a_3, a'_4 = a_6$ si $\mathfrak{g}_C$ est de type (E_6).

Il est facile de montrer que Δ' est de type (C_l), (B_{n-1}) ou (F_4) dans le cas où $\mathfrak{g}_C$ est de type (A_{2l-1}), (D_n) ou (E_6) réspectivement. Nous identifieron le groupe de Weyl de Δ' au sous-groupe de $W(\Delta)$ engendré par les w_r' pour $r' \in \Delta'$. Nous poserons dans ce qui suit $x_{r'}(t) = x_r(t)$, $t \in K_0$, pour $r' \in \Delta'_0$; $x_{r'}(t) = x_r(t)x_{\bar{r}}(\bar{t})$, $t \in K$, pour $r' \in \Delta'_1$. Nous désignerons ainsi par $\mathfrak{X}_{r'}$ le sous-groupe de G formé des $x_{r'}(t)$ où $t \in K_0$ ou $t \in K$ selon que $r' \in \Delta'_0$ ou $r \in \Delta'_1$. Soit maintenant G^1 le sous-groupe de G engendré par les sous-groupes $\mathfrak{X}_{r'}$ pour $r' \in \Delta'$.

Si $r' \in \Delta'_0$, on sait qu'il existe un homomorphisme ϕ_r de $SL(2, K)$ sur un groupe d'automorphisme de $\mathfrak{g}$ (cf. (19)). Nous posons $\mathfrak{H}_{r'} = \mathfrak{H}_r$ et $\omega_{r'} = \omega_r$ pour $r' \in \Delta'_0$. Si $r' \in \Delta'_1$, il existe un homorphisme $\phi_{r'}$ de $SL(2, K)$ sur un groupe d'automorphisme de $\mathfrak{g}$ tel que

$$(28) \quad \phi_{r'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = x_{-r'}(t);\ \phi_{r'}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{r'}(t);\ \phi_{r'} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = h(\chi_{r,z}\chi_{\bar{r},\bar{z}})$$

Nous désignerons ainsi par $\mathfrak{H}_{r'}$ le sous-groupe de G^1 formé des $h(\chi_{r,z}\ \chi_{\bar{r},\bar{z}})$ où $z \in K^*$; par $\mathfrak{H}^1$ le sous-groupe de $\mathfrak{H}$ engendré par les $\mathfrak{H}_{r'}$, $r' \in \Delta'$; par $\omega_{r'} = \phi_{r'}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $r' \in \Delta'_1$; par $\mathfrak{N}^1$ le groupe engendré par $\mathfrak{H}^1$ et par les éléments $\omega_{r'}$ pour tout r'. Il existe alors un homomorphisme ζ' et un seul de $\mathfrak{W}^1$ sur le groupe de Weyl $W(\Delta')$ qui posède la propriété suivante:

(29) si $\omega \in \mathfrak{W}^1$ et $w = \zeta'(\omega)$, on a

$$\omega\, \mathfrak{X}_{r'}\omega^{-1} = \mathfrak{X}_{w(r')},\ \omega\, h(\chi_{r,z}\chi_{\bar{r},\bar{z}})\omega^{-1} = h(\chi_{r',z}\chi_{\bar{r}',\bar{z}})$$

où χ' étant celui de (20); le noyau de l'homomorphisme ζ' est $\mathfrak{H}'$.

Soient r', s' deux racines de Δ' telles que $r' + s'$ soit une racine de Δ'. On a alors l'un des cas suivants:

(30) si $r', s' \in \Delta'_0$, on a $r' + s' = r + s \in \Delta'_0$,

(31) si $r', s' \in \Delta'_1$, on a $r' + s' \in \Delta'_1$; $r + \bar{s}$ et $\bar{r} + s$ ne sont pas des racines de Δ où $r' = (r + \bar{r})/2$, $s' = (s + \bar{s})/2$ pour r, $s \in \Delta$,

(32) si $r' \in \Delta'_0$ et $s' \in \Delta'_1$, $s' = (s + \bar{s})/2$, on a $r' + s' \in \Delta'_1$, $r' + 2s' \in \Delta'_0$; $r + s$, $r + \bar{s}$, $r + s + \bar{s}$ sont des racines de Δ.

Dans tous les cas il n'y a pas une autre racine qui soit une combinaison linéaire à coefficients >0 de r' et s'.

Dans les cas (30) et (31), on a

$$x_{s'}(u)x_{r'}(t)x_{s'}(u)^{-1} = x_{r'}(t)x_{r'+s'}(N_{s,r}\, tu) \tag{33}$$

où $t, u \in K_0$ ou K selon le cas (30) ou (31). Dans le cas (32), on a

$$x_{s'}(u)x_{r'}(t)x_{s'}(u)^{-1} = x_{r'}(t)x_{r'+s'}(N_{s,\,r}tu)x_{r'+2s'}(N_{s,r}\, N_{s,s+r}u\bar{u}t) \tag{34}$$

$$x_{s'}(u)x_{r'+s'}(t)x_{s'}(u)^{-1} = x_{r'+s'}(t)x_{r'+2s'}(N_{s,s+r}t\bar{u}) \tag{35}$$

où $t \in K_0, u \in K$. De plus on a

$$h(\chi_r,\, _z\chi_{\bar{r},\bar{z}})x_{s'}(t)h(\chi_r,\, _z\chi_{\bar{r},\bar{z}})^{-1} = x_{s'}(\chi_r(s)t) \text{ pour toute } s' \in \Delta'. \tag{36}$$

Or, il est facile de de montrer que si l'automorphisme σ_1 de K est l'ide tité, le groupe G^1 est isomorphe au groupe de Chevalley de type (C_l), (B_{n-1}) (F_4) selon que l'algèbre $\mathfrak{g}_C$ est de type (A_{2l-1}), (D_n) ou (E_6).

Nous désignerons par $\mathfrak{U}^1$ le sous-groupe de G^1 engendré par les $\mathfrak{X}_{r'}$, $r'>$ par $\mathfrak{U}^1_w$, $w \in W(\Delta')$, le sous-groupe de G^1 engendré par $\mathfrak{X}_{r'}, r' > 0$ telles que $w(r') < 0$. Tout élément de $\mathfrak{U}^1$ ne peut se mettre que d'une seule manière sous la forme $u = x_{r'_1}(t_1)\ldots\ldots x_{r'_m}(t_m)$ où $h(r'_1) <\ldots\ldots< h(r'_m)$.

PROPOSITION 2'. *Le groupe G^1 est la réunion des ensembles $\mathfrak{U}^1\ \mathfrak{H}^1\ \omega(w)\mathfrak{U}^1_w$ où $\omega(w)$, w parcourant les éléments du groupe $W(\Delta')$, forment un système de représentants des classes de $\mathfrak{W}^1$ modulo $\mathfrak{H}^1$. Ces ensembles sont mutuellement disjoints; un élément de $\mathfrak{U}^1\mathfrak{H}^1\omega(w)\mathfrak{U}^1_w$ ne peut se mettre que d'une seule manière sous la forme $x\, h\, \omega(w)x'$ avec $x \in \mathfrak{U}^1$, $h \in \mathfrak{H}^1$, $x' \in \mathfrak{U}^1_w$.*

Les propositions analogues à celles du paragraphe 5 peuvent aussi être démontrées pareillement sur les groupes G^1. Nous avons ainsi

THÉORÈME 1′. *Sauf dans le cas où* $\mathfrak{g}_C$ *est de type* (A_1) *et* K_0 *est un corps à 2 ou 3 éléments, le groupe* G^1 *est simple.*

Enfin, nous considérons une autre modification de groupe de Chevalley. Soit $\mathfrak{g}_C$ une algèbre de Lie simple de type (D_4); $\Pi = (a_1,\dots\dots,a_4)$ un système de racines fondamentales de Δ(cf. Figure 1); τ une transformation de Π telle que

$$a_1 \to a_3,\ a_3 \to a_4,\ a_4 \to a_1.$$

Alors τ induit une transformation de V dans lui-même. Nous désignerons par Δ_0' l'ensemble des racines r telles que $\tau(r) = r$; par Δ_1' l'ensemble des vecteurs $r' = (r + \tau(r) + \tau^2(r))/3$ pour $r \in \Delta$, $\tau(r) \neq r$; $w_{r'} = w_r$ pour $r \in \Delta_0'$; $w_{r'} = w_r w_{\tau(r)} w_{\tau^2(r)}$ pour $r' \in \Delta_1'$. Alors l'ensemble $\Delta' = \Delta_0' + \Delta_1'$ est un système de racines dans l'espace R-vectoriel V' qui est le sous-espace de V formé des vecteurs invariants par τ. Les racines $a_1' = a_2$, $a_2' = (a_1 + a_3 + a_4)/3$ de Δ' forment un système de racines fondamentales de Δ' de type (G_2).

Soit maintenant K un corps avec l'automorphisme τ_1 de l'ordre 3. Nous désignerons par K_0 le sous-corps de K formé des éléments invariants par τ_1. Pareillement on peut définir une semi-automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur K. Nous posons $x_{r'}(t) = x_r(t)$, $t \in K_0$, si $r' \in \Delta_0'$; $x_{r'}(t) = x_r(t) x_{\tau(r)}(\tau_1(t)) x_{\tau^2(r)}(\tau_1^2(t))$, $t \in K$, si $r' \in \Delta_1'$. Nous désignerons maintenant par $\mathfrak{X}_{r'}$ le sous-groupe de G formé des $x_{r'}(t)$ pour $r' \in \Delta'$, où $t \in K_0$ ou K selon que $r' \in \Delta_0'$ ou Δ_1'; par G^2 le sous-groupe de G engendré par les $\mathfrak{X}_{r'}$, $r' \in \Delta'$. Si τ_1 est l'identité, G^2 est isomorphe au groupe de Chevalley de type (G_2). Nous pouvons déduire similairement les propriétés analogues aux précédents sur le groupe G^2. On a ainsi

THÉORÊME 1″. *Sauf dans le cas où* K_0 *un corps à 2 éléments, le groups* G^2 *est simple.*

REMARQUE: Le groupe G^1 de type (E_6) sur le corps fini K à q^2 éléments et le groupe G^2 (de type D_4)) sur le corps fini K à q^3 éléments $(q > 2)$ sont des groupes simple finis qui diffèrent strictement de tous les groupes simples de Chevalley.[9]

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. CHEVALLEY, Sur certains groupes simples, Tohôku Math. J. 7 ('55) 14-66.
[2] E. B. DYNKIN, Semi-simple subalgebras of semi-simple Lie algebras, Mat. Sbornik N. S. 30, 349-462('52), A. M. S. Trans., 6.

9) Cf. Steinberg [6]

[3] K. IWASAWA, Über die Einfachheit der speziellen projektiven Gruppen, Proc. of Imp. Acad. of Tokyo, 17 ('41), 57-59.
[4] T. SATO, On linear Lie algebras of a certain dimension, Tohoku Math. J., 12 ('60) 71-76.
[5] Sémineaire Chevalley (1956-58), Classification des groupes de Lie algébriques, Ecole Normale Supérieure.
[6] R. STEINBERG, Variations on a theme of Chevalley, Pacific J. of Math., 9 ('59), 875-891.
[7] T. TAMAGAWA, On the structure of orthogonal groups, Amer. J. of Math., 80 ('58), 191-197.

COLLEGE MÉDICAL DE FUKUSHIMA, FUKUSHIMA.