DIE BESSELSCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG UND EINE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG DRITTER ORDNUNG MIT EINEM WENDEPUNKT

KEN-ITI TAKAHASI

(Received June 6, 1961)

Einleitung.

In meiner früheren Abhandlung ([7]) habe ich eine Abhandlung ([1]) von Herrn Prof. M. Hukuhara erweitert. Nämlich ich habe die asymptotische Entwickelung der Lösung eines Systems von linearen homogenen Differentialgleichungen, welche von zwei Parametern abhängen, betrachtet, und ferner das Ergebnis unter der Bedingung

$$K\,|\lambda| < |\mu| < K'^{-1}\,|\lambda|^{\sigma_0}$$

auf die Besselsche Differentialgleichung angewandt ([8]).

Neuerdings hat Herr M. Iwano eine neue Theorie aufgestellt, welche sich auf eine Differentialgleichung mit einem Wendepunkt, („Turning point" aufs English) anwenden lässt ([2]). Er hat die Theorie auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem Wendepunkt aufgestellt.[1] Mit Benutzung der Theorie hat er ferner ein genaueres Resultate als diejenigen von R. E. Langer und R. McKelvey gefunden ([2], S. 49, [5], [6]).

Es ist bezweckt in dieser Abhandlung erstens in § 1 die Normalformen (I) und (II) des Systems von linearen homogenen Differentialgleichungen, welche von einem Parameter abhängen, und die Normalformen (III), (IV) und (V) des Systems mit zwei Parametern zu erklären; zweitens in §2 mit Benutzung der Methode von Herrn M. Iwano die Besselsche Differentialgleichung in jedem von passend übereinanderliegende Teibereiche zur Normalform zu bringen; und schliesslich in § 3 eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung zur Normalform zu bringen.[2]

1. Normalform.

1. Normalform. (I) Wir denken uns das System von linearen Differentialgleichungen:

1) Neuerdings hat Herr M. Iwano die Theorie einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit einem Wendepunkt aufgestellt ([4]).

2) Das Ergebnis des Paragraphen 3 stammt aus dem Manuskript meines speziellen Vortrags in „*Kansû-hôteisiki Bunkakai*", Oktober 1960.

$$(1.1)\qquad dy_j/dx = \lambda^m \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x,\lambda)y_k,\ (j=1,\ldots\ldots,n),$$

die sich mit Benutzung einer Matrize folgendermassen umschreiben lässt:

$$dY/dx = \lambda^m A(x,\lambda)Y.$$

Das System (1.1) unter den folgenden Voraussetzungen (i), (ii) und (iii) wollen wir die Normalform (I) nennen.

(i) Es ist $A(x,\lambda)$ in

$$(1.2)\qquad |x-a|<r,\ \alpha<\arg\lambda<\beta,\ R<|\lambda|<\infty^{3)}$$

regulär, und es lässt sich für $\lambda\to\infty$ folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$(1.3)\qquad A(x,\lambda)\simeq\sum_{r=0}^{\infty}\underset{r}{A}(x)\lambda^{-r/s},$$

wo $\underset{r}{A}(x)$ in $|x-a|<r$ regulär sind, und s eine natürliche Zahl ist.

(ii) Das Indizes m ist eine natürliche Zahl.

(iii) Die charakteristische Gleichung von (1.1):

$$|\underset{0}{A}(a)-\rho E|=0$$

besitzt voneinander verschiedene Wurzeln.

(II) Das System (1.1) unter den folgenden Voraussetzungen (i) und (ii) wollen wir die Normalform (II) nennen.

(i) Es ist $A(x,\lambda)$ in (1.2) regulär, und es lässt sich für $\lambda\to\infty$ in der Form der rechten Seite von (1.3) asymptotisch entwickeln.[4)]

(ii) Es ist $m=0$.

(III) Wir betrachten das System

$$(1.4)\qquad dy_j/dx = \lambda^m\mu^{m'}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x,\lambda,\mu)y_k,\ (j=1,\ldots\ldots,n),$$

welches von zwei Parametern λ und μ abhängt ([4]). Das System (1.4) unter den folgenden Voraussetzungen (i), (ii) und (iii) wollen wir die Normalform (III) nennen.

(i) Es ist $A(x,\lambda,\mu)$ in

$$(1.5)\qquad x\in D(a,r),\lambda\in D(\alpha,\beta;R,\infty),\mu\in D(\alpha',\beta';R',\infty);K|\lambda|^{\sigma}<|\mu|<K'^{-1}|\lambda|^{\sigma'5)}$$

---

3) Man nimmt oft r hinreichend klein zu sein an. An Stelle von $|x-a|<r$, $\alpha<\arg\lambda<\beta$, $R<|\lambda|<\infty$ schreibt man $x\in D(a,r)$, $\lambda\in D(\alpha,\beta;R,\infty)$.

4) Wir sagen dass $A(x,\lambda)$ für $\lambda\to\infty$ asymptotisch entwickelbar ist.

5) Der Einfachheit halber schreiben wir an Stelle von Ungleichung $K|\lambda|^{\sigma}<|\mu|<K'^{-1}|\lambda|^{\sigma'}$ bloss $U(\sigma,\sigma')$.

regulär, und es lässt sich für $\lambda \to \infty$, $\mu \to \infty$ folgendermassen asymptotisch entwickeln ([4]):

$$(1.6) \qquad A(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r(\sigma, \sigma'; \lambda, \mu) \underset{r}{A}(x, \lambda^{n'} \mu^{-n}).$$

(ii) Die Indizen m und m' sind ganze Zahlen, und es ist

$$m_0 \equiv mn + m'n' \geqq 0, \ m_0' \equiv mn_0 + m'n_0' \geqq 0, \ (m_0, m_0') \neq (0, 0) \ ([4]).$$

(iii) Die charakteristische Gleichung von (1.4):

$$|\underset{00}{A}(a) - \rho E| = 0$$

besitzt voneinander verschiedene Wurzeln.

(IV) Das System (1.4) unter den folgenden Voraussetzungen (i) und (ii) wollen wir die Normalform (IV) nennen.

(i) Es ist $A(x, \lambda, \mu)$ in (1.5) regulär, und es lässt sich für $\lambda \to \infty$, $\mu \to \infty$ in der Form der rechten Seite von (1.6) asymptotisch entwickeln.

(ii) Die Indizen m und m' sind ganze Zahlen, und es ist $m_0 \leqq 0$, $m_0' \leqq 0$.

(V) Das System (1.4) unter den folgenden Voraussetzungen (i), (ii) und (iii) wollen wir die Normalform (V) nennen.

(i) Es gilt die Voraussetzung (i) von (III).

(ii) Es gilt $m_0 m_0' < 0$.

(iii) Es gilt die Voraussetzung (iii) von (III).

§ 2. Die Besselsche Differentialgleichung.

2. Umwandelung zu der Normalform. Wir betrachten die Besselsche Differentialgleichung:

$$(2.1) \qquad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \lambda^2) y = 0$$

mit einer irregulären singulären Stelle $x = \infty$ für hinreichend grosse $|\lambda|$, wo λ ein Parameter ist.

Wendet man die Transformation $y = x^{1/2} u$, $x = t\mu$ auf (2.1) an, so geht (2.1) ins Folgende über:

$$t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{1}{4} + t^2 \mu^2 - \lambda^2 \right) u = 0,$$

welche weiter durch die Transformation $u = y_2$, $du/dt = \mu y_1$ zu

$$(2.2) \qquad dY/dt = \mu A(t, \lambda, \mu) Y$$

wird, wo

$$A(t, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0, & -1 + t^{-2}\lambda^2\mu^{-2} - \dfrac{1}{4}t^{-2}\mu^{-2} \\ 1, & 0 \end{bmatrix}.$$

An Stelle von (2. 1) betrachten wir (2. 2) in den folgenden Bereichen:

(R_1): $t \in D(a, r)$, $\lambda \in D(\alpha, \beta; R, \infty)$, $\mu \in D(\alpha', \beta'; R', \infty)$; $U(0, 1)$,

(R_2): $t \in D(a, r)$, $\lambda \in D(\alpha, \beta; R, \infty)$, $\mu \in D(\alpha', \beta'; R', \infty)$; $U(1)$,

(R_3): $t \in D(a, r)$, $\lambda \in D(\alpha, \beta; R, \infty)$, $\mu \in D(\alpha', \beta'; R', \infty)$; $U(1, \infty)$,

wobei die Grösse a von Null verschieden ist.

(A) **Der Fall** (R_1). Wendet man die Transformation $Y = P(\lambda, \mu)Z$ mit

$$P(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \lambda^{-1}\mu \end{bmatrix}$$

auf (2. 2) an, so geht (2. 2) ins Folgende über:

$$dZ/dt = \lambda B(t, \lambda, \mu)Z, \tag{2. 3}$$

wo

$$B(t, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0, & t^{-2} - \lambda^{-2}\mu^2 - \dfrac{1}{4}t^{-2}\lambda^{-2} \\ 1, & 0 \end{bmatrix}.$$

Für (2. 3) sind die Bedingungen des Artikels 1, (III) erfüllt; d. h.

(i) Es ist $B(t, \lambda, \mu)$ in (R_1) regulär, und für $\lambda \to \infty, \mu \to \infty$ asymptotisch entwickelbar.

(ii) Es ist $m_0 = 1$, $m_0' = 1$.

(iii) Die charakteristische Gleichung von (2. 3) besitzt voneinander verschiedene Wurzeln $\pm a^{-1}$.

Daher ist (2. 3) die Normalform (III).

(B) **Der Fall** (R_2). Wendet man die Transformation $t = \lambda\mu^{-1}v$ auf (2. 2) an, so geht (2. 2) ins Folgende über:

$$dY/dv = \lambda A(v, \lambda)Y, \tag{2. 4}$$

wo

$$A(v, \lambda) = \begin{bmatrix} 0, & -1 + v^{-2} - \dfrac{1}{4}v^{-2}\lambda^{-2} \\ 1, & 0 \end{bmatrix}.$$

Der auf (R_2) entsprechende Bereich ist

$$K^{-1} < |v| < K', \ \lambda \in D(\alpha, \beta; R, \infty), \tag{2. 5}$$

wo die Grössen K und K' hinreichend gross sind. Da die charakteristische Gleichung von (2. 4) im Teilbereiche von (2. 5):

$$v \in D(a, r),\ \lambda \in D(\alpha, \beta\,;\, R, \infty) \tag{2.6}$$

voneinander verschiedene Wurzeln besitzt, wenn $a \neq \pm 1$ ist, so ist (2. 4) sicher die Normalform (I).

(C) Der Fall (R_3). In diesem Falle sind die Bedingungen des Artikels 1, (III) erfüllt; d. h.

(i) Es ist $A(t, \lambda, \mu)$ in (R_3) regulär, und für $\lambda \to \infty$, $\mu \to \infty$ asymptotisch entwickelbar.

(ii) Es ist $m_0 = 1$, $m_0' = 1$.

(iii) Die charakteristische Gleichung besitzt voneinandcr verschiedene Wurzeln $\pm i$.

Daher ist (2. 2) die Normalform (III).[6)]

3. Umwandelung von (2. 4) zu der Normalform. In diesem Art. behandeln wir den Fall $a = 1$ in (2. 6).[7)] Wendet man die Transformation $v - 1 = x\mu^{-2}$ [8)] auf (2. 4) an, so geht (2. 4) ins Folgende über:

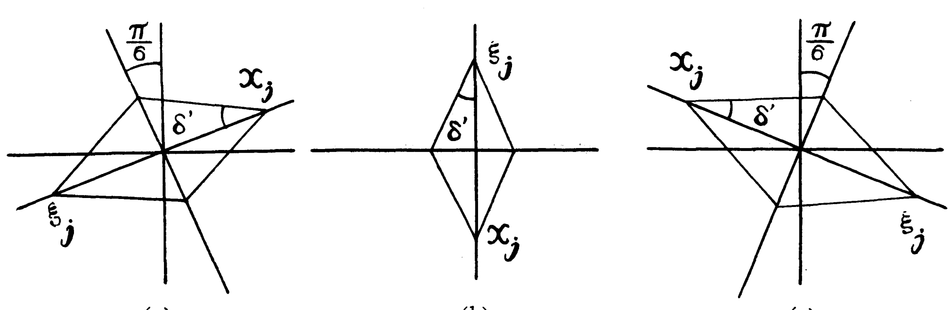
$$dY/dx = \lambda\mu^{-2}A(x, \lambda, \mu)Y, \tag{3.1}$$

wo

$$A(x, \lambda, \mu) = A(1 + x\mu^{-2}, \lambda).$$

An Stelle von (2. 4) betrachten wir (3. 1) in den folgenden Bereichen:

6) Da die Differenz von zwei Wurzeln der charakteristischen Gleichung $2i$ ist, so kann man den Existenzsatz, (Vgl. [4]) benutzen, wenn man z. B. δ, δ'; α', β' der Art annimmt, dass
(i) die Ungleichung $\delta + \delta' < \pi/6$, $(\delta, \delta' > 0)$ gilt.
(ii) (a) $\alpha' = -(\pi + \delta)$, $\beta' = -\frac{\pi}{3} + \delta$, (b) $\alpha' = -\left(\frac{\pi}{3} + \delta\right)$, $\beta' = \frac{\pi}{3} + \delta$, (c) $\alpha' = -\left(-\frac{\pi}{3} + \delta\right)$, $\beta' = \pi + \delta$, und wenn man an Stelle von $D(a, r)$ folgende Rhomben annimmt:



7) Ähnlich kann man den Fall $a = -1$ behandeln.

8) Die Schriften x, μ sind verschieden von x, μ des Artikels 2.

(R_4): $x \in D(a, r)$, $\lambda \in D(\alpha, \beta\,;\, R, \infty)$, $\mu \in D(\alpha', \beta';\, R', \infty)$; $U(0, 1/3)$,

(R_5): $x \in D(a, r)$, $\lambda \in D(\alpha, \beta\,;\, R, \infty)$, $\mu \in D(\alpha', \beta';\, R', \infty)$; $U(1/3)$,

(R_6): $x \in D(a, r)$, $\lambda \in D(\alpha, \beta\,;\, R, \infty)$, $\mu \in D(\alpha', \beta';\, R', \infty)$; $U(1/3, 1)$,

(R_7): $x \in D(a, r)$, $\lambda \in D(\alpha, \beta\,;\, R, \infty)$, $\mu \in D(\alpha', \beta';\, R', \infty)$; $U(1)$,

(R_8): $x \in D(0, r)$, $\lambda \in D(\alpha, \beta\,;\, R, \infty)$, $\mu \in D(\alpha', \beta';\, R', \infty)$; $U(1, \infty)$,

wobei die Grösse a von Null verschieden ist.

(A) Die Fälle (R_4) **und** (R_6). Wendet man die Transformation $Y = P(\mu)Z$ mit

$$P(\mu) = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \mu \end{bmatrix}$$

auf (3. 1) an, so geht (3. 1) ins Folgende über:

$$dZ/dx = \lambda\mu^{-3}B(x, \lambda, \mu)Z, \tag{3. 2}$$

wo

$$B(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0, & \mu^2\left[-1 + \left(1 - \dfrac{1}{4}\lambda^{-2}\right)(1 + x\mu^{-2})^{-2}\right] \\ 1, & 0 \end{bmatrix};$$

daher ist (3. 2) für (R_4) und (R_6) bzw. die Normalformen (III) und (IV).

(B) Der Fall (R_8). Wendet man die Transformation $Y = P(\lambda)Z$ mit

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \lambda \end{bmatrix}$$

auf (3. 1) an, so geht (3. 1) ins Folgende über:

$$dZ/dx = \mu^{-2}B(x, \lambda, \mu)Z, \tag{3. 3}$$

wo

$$B(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0, & \lambda\left[-1 + \left(1 - \dfrac{1}{4}\lambda^{-2}\right)(1 + x\mu^{-2})^{-2}\right] \\ 1, & 0 \end{bmatrix};$$

daher ist (3. 3) die Normalform (IV).

(C) Der Fall (R_5). Wendet man die Transformation

$$\mu = \rho\lambda^{1/3}, \ (K^{-1} < |\rho| < K')$$

auf (3. 2) an, so geht (3.2) ins Folgende über:

$$dZ/dx = \rho^{-3}A(x, \lambda, \rho)Z,$$

wo

$$A(x, \lambda, \rho) = \begin{bmatrix} 0, & \rho^2\lambda^{2/3}\left[-1 + \left(1 - \frac{1}{4}\lambda^{-2}\right)(1 + x\rho^{-2}\lambda^{-\frac{2}{3}})^{-2}\right] \\ 1, & 0 \end{bmatrix},$$

welche durch die Transformation $Z = P(x)W$ mit

$$P(x) = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & x^{-1/2} \end{bmatrix}$$

uns zur Differentialgleichung

$$dW/dx = x^{1/2}\rho^{-3}B(x, \lambda, \rho)W$$

führt, wo

$$B(x, \lambda, \rho) = \begin{bmatrix} 0, & x^{-1}\rho^2\lambda^{2/3}\left[-1 + \left(1 - \frac{1}{4}\lambda^{-2}\right)(1 + x\rho^{-2}\lambda^{-2/3})^{-2}\right] \\ 1, & -\frac{1}{2}\rho^3 x^{-3/2} \end{bmatrix},$$

welche weiter durch die Transformation

$$x\rho^{-2} = t, \ (K^{-1} < |t| < K')$$

zu

$$dW/dt = t^{1/2}B(t, \lambda)W \tag{3.4}$$

wird, wo

$$B(t, \lambda) = \begin{bmatrix} 0, & t^{-1}\lambda^{2/3}\left[-1 + \left(1 - \frac{1}{4}\lambda^{-2}\right)(1 + t\lambda^{-2/3})^{-2}\right] \\ 1, & -\frac{1}{2}t^{-3/2} \end{bmatrix};$$

daher ist (3. 4) die Normalform (II).

(D) Der Fall (R_7). Wendet man die Transformation

$$\mu = \rho\lambda, \ (K^{-1} < |\rho| < K')$$

auf (3. 3) an, so geht (3. 3) ins Folgende über:

$$dZ/dx = \rho^{-2}\lambda^{-2}B(x, \lambda, \rho)Z,$$

wo

$$B(x,\lambda,\rho)=\begin{bmatrix}0, & \lambda^2\Big[-1+\Big(1-\frac{1}{4}\lambda^{-2}\Big)(1+x\rho^{-2}\lambda^{-2})^{-2}\Big]\\ 1, & 0\end{bmatrix},$$

welche durch die Transformation

$$x\rho^{-2}=t,\ (K^{-1}<|t|<K')$$

zu

$$dZ/dt=\lambda^{-2}B(t,\lambda)Z \tag{3.5}$$

wird, wo

$$B(t,\lambda)=\begin{bmatrix}0, & \lambda^2\Big[-1+\Big(1-\frac{1}{4}\lambda^{-2}\Big)(1+t\lambda^{-2})^{-2}\Big]\\ 1, & 0\end{bmatrix};$$

daher ist (3. 5) sicher die Normalform (II).

§ 3. Differentialgleichungen dritter Ordnung.

4. Hilfssatz. Wir denken uns das Differentialgleichungssystem:

$$dy_j/dx=\lambda^m\mu^{m'}\sum_{k=1}^{2}a_{jk}(x,\lambda,\mu)y_k,\ (j=1,2). \tag{4.1}$$

Wir stellen die folgenden Voraussetzungen:

(i) Es ist $A(x,\lambda,\mu)$ in (1. 5) regulär, und es lässt sich für $\lambda\to\infty$, $\mu\to\infty$ in der Form der rechten Seite von (1. 6) asymptotisch entwickeln.

(ii) Es ist $a_{22}(x,\lambda,\mu)=0$.

(iii) Es ist $\underset{00}{a_{11}}(x)=0$, $\underset{00}{a_{12}}(x)=0$, $\underset{00}{a_{21}}(x)=1$, $\underset{00}{a_{22}}(x)=0$.

(iv) Die Indizen m und m' sind ganze Zahlen, und es ist

$$m_0\geqq 0,\ m_0'\geqq 0,\ (m_0,m_0')\neq(0,0).$$

Wendet man die Transformation $Y=P(x,\lambda,\mu)Z$ mit

$$P(x,\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}p_{11}(x,\lambda,\mu) & p_{12}(x,\lambda,\mu)\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

wo

$$p_{11}=\Phi/a_{12},\ p_{12}=\lambda^{-m}\mu^{-m'}\Phi'/a_{12},\ \Phi=\exp\Big[\int\frac{a_{21}'+\lambda^m\mu^{m'}a_{11}a_{21}}{2a_{21}}dx\Big]$$

sind, auf (4. 1) an, so geht (4. 1) ins Folgende über:

$$dZ/dx=\lambda^m\mu^{m'}B(x,\lambda,\mu)Z, \tag{4.2}$$

wo

$$B(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0, & b_{12}(x, \lambda, \mu) \\ 1, & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_{12} = \frac{1}{4a_{21}^2}(2\lambda^{-m}\mu^{-m'}a_{11}a_{21}a_{21}' + 4a_{12}a_{21}^3 + 3\lambda^{-2m}\mu^{-2m'}a_{21}'^2$$
$$+ a_{11}^2a_{21}^2 - 2\lambda^{-2m}\mu^{-2m'}a_{21}a_{21}'' - 2\lambda^{-2m}\mu^{-2m'}a_{11}'a_{21}^2),$$

und folglich auch $B(x, \lambda, \mu)$ in (1. 5) regulär, und für $\lambda \to \infty$, $\mu \to \infty$ asymptotisch entwickelbar ist, und insbesondere ist nach der Voraussetzung (iii)

$$\underset{00}{B}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es sei

$$\pi : [P_0(x_0, y_0) \ldots\ldots P_{l+1}(x_{l+1}, y_{l+1})]$$

das durch die Koeffizienten von $b_{12}(x, \lambda, \mu)$ gebildetes Polygon ([7], S. 62), wo die absoluten Beträge der Neigungen von P_0P_1 und P_lP_{l+1} bzw. σ und σ' gleich sind. Es sei m_i der absolute Betrag der Neigung von P_iP_{i+1}.

Wendet man ferner die Transformation $Z = \overline{P}(\lambda, \mu)\overline{Z}$ mit

$$\overline{P}(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \lambda^{-y_i/2}\mu^{-x_i/2} \end{bmatrix}$$

auf (4. 2) an, so geht (4. 2) ins Folgende über:

(4. 3) $$d\overline{Z}/dx = \lambda^{m'+y_i/2}\mu^{m+x_i/2}\overline{B}(x, \lambda, \mu)\overline{Z},$$

wo

$$\overline{B}(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0, & \overline{b}_{12}(x, \lambda, \mu) \\ 1, & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{b}_{12}(x, \lambda, \mu) = \lambda^{-y_i}\mu^{-x_i}b_{12}(x, \lambda, \mu)$$

ist, und folglich auch $\overline{B}(x, \lambda, \mu)$ in

(4. 4) $$x \in D(a, r),\ \lambda \in D(\alpha, \beta\,;\, R, \infty),\ \mu \in D(\alpha', \beta';\, R', \infty)\,;\, U(m_i, m_{i+1})$$

regulär ist, und es sich für $\lambda \to \infty$, $\mu \to \infty$ folgendermassen asymptotisch entwickeln lässt:

$$\overline{B}(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r(m_i, m_{i+1}\,;\, \lambda, \mu)\underset{r}{\overline{B}}(x, \lambda^{n_i'}\mu^{-n_i}),$$

wo n_i und n_i' zueinander prime positive Zahlen sind so dass $n_i'/n_i = m_i$. Da

$\underset{00}{\bar{b}_{12}}(x) \neq 0$ ist, so ist das System (4.3) eine Normalform, wenn x_t und y_t gerade Zahlen sind.[9]

5. Umwandelung zu der Normalform. Wir denken uns das Differentialgleichungssystem:

$$dy_j/dx = \lambda^m \mu^{m'} \sum_{k=1}^{3} a_{jk}(x, \lambda, \mu) y_k, \ (j = 1, 2, 3), \tag{5.1}$$

welches von zwei Parametern λ und μ abhängt. Wir stellen die folgenden Voraussetzungen:

(i) Die Indizen m und m' sind ganze Zahlen.

(ii) Es ist

$$A(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(x, \lambda, \mu) & a_{13}(x, \lambda, \mu) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) Es ist $A(x, \lambda, \mu)$ in

$$x \in D(a, r), \ \lambda \in D(\alpha, \beta ; R, \infty), \ \mu \in D(\alpha', \beta'; R', \infty) \tag{5.2}$$

regulär, und es lässt sich folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$A(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r,s=0}^{\infty} \underset{rs}{A}(x) \lambda^{-r} \mu^{-s}.$$

(iv) Es sind $\underset{rs}{A}(x)$ in $D(a, r)$ regulär und es gilt entweder $\underset{rs}{a_{jk}}(x) \neq 0$ oder $\underset{rs}{a_{jk}}(x) \equiv 0$.

Es sei

$$\pi : [P_0(x_0, y_0) \ldots P_{l+1}(x_{l+1}, y_{l+1})]$$

das durch die Koeffizienten von $a_{12}(x, \lambda, \mu)$ gebildetes Polygon, und m_t der absolute Betrag der Neigung von $P_t P_{t+1}$. Wendet man die Transformation $Y = P(\lambda, \mu) Z$ mit

$$P(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-y_t/2} \mu^{-x_t/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-y_t} \mu^{-x_t} \end{bmatrix}$$

auf (5.1) an, so geht (5.1) ins Folgende über:

$$dZ/dx = \lambda^{m+y_t/2} \mu^{m'+x_t/2} B(x, \lambda, \mu) Z, \tag{5.3}$$

wo

9) Von jetzt an setzen wir stets voraus, dass es keine negative Potenz existiert.

$$B(x,\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}0 & b_{12}(x,\lambda,\mu) & b_{13}(x,\lambda,\mu)\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$b_{12}(x,\lambda,\mu)=\lambda^{-y_i}\mu^{-x_i}a_{12}(x,\lambda,\mu),\ b_{13}(x,\lambda,\mu)=\lambda^{-3y_i/2}\mu^{-3x_i/2}a_{13}(x,\lambda,\mu),$$

und folglich auch $B(x,\lambda,\mu)$ in

(5.4) $\quad x\in D(a,r),\ \lambda\in D(\alpha,\beta\,;\,R,\infty),\ \mu\in D(\alpha',\beta';\,R',\infty)\,;\ U(m_i,m_{i+1})$

regulär ist, und $b_{12}(x,\lambda,\mu)$ sich für $\lambda\to\infty$, $\mu\to\infty$ folgendermassen asymptotisch entwickeln lässt:

$$b_{12}(x,\lambda,\mu)\simeq\sum_{r=0}^{\infty}K_r(m_i,m_{i+1};\,\lambda,\mu)\underset{r}{b}_{12}(x,\lambda^{n_i'}\mu^{-n_i}),$$

wobei n_i und n_i' zueinander prime natürliche Zahlen sind so dass $n_i'/n_i=m_i$.

Es sei

$$\bar{\pi}:\ [\bar{P}_0(\bar{x}_0,\bar{y}_0)\cdots\cdots\bar{P}_{l'+1}(\bar{x}_{l'+1},\ \bar{y}_{l'+1})]$$

ein Vereinigung von zwei Polygone, welche durch die Koeffizienten von $b_{12}(x,\lambda,\mu)$ und $b_{13}(x,\lambda,\mu)$ gebildet werden, wo die absoluten Beträge der Neigungen von $\bar{P}_0\bar{P}_1$ und $\bar{P}_{l'}\bar{P}_{l'+1}$ bzw. m_i und m_{i+1} gleich sind. Es sei $\bar{m}_i$ der absolute Betrag der Neigung von $\bar{P}_i\bar{P}_{i+1}$.

(A) Der Fall dass die folgenden Ungleichungen gleichzeitig gelten:

$$\bar{y}_k+m_i\bar{x}_k\leqq 0,\ \bar{y}_k+m_{i+1}\bar{x}_k\leqq 0,\ (k=0,\ldots\ldots,\ l'+1).^{10)}$$

In diesem Falle ist $b_{13}(x,\lambda,\mu)$ in (5.2) regulär, und lässt es sich folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$b_{13}(x,\lambda,\mu)\simeq\sum_{r=0}^{\infty}K_r(m_i,m_{i+1};\,\lambda,\mu)\underset{r}{b}_{12}(x,\lambda^{n_i'}\mu^{-n_i});$$

daher ist das System (5.3) eine Normalform, wenn die charakteristische Gleichung von (5.3) voneinander verschiedene Wurzeln besitzt, und das System (5.3) lässt sich nach den Zerlegungssatz ([2]) zum Falle von Art. 4 bringen, wenn die charakteristische Gleichung eine zweifache Wurzel $\rho_2(x)$ derart besitzt, dass

$$\rho_1(x)\neq\rho_2(x),\ \rho_1(x)\neq 0,\ \rho_2(x)\neq 0$$

ist.

(B) Der Fall dass mindestens eine Zahl k existiert, welche mindestens

10) $\bar{x}_k\leqq 0$, wenn $m_{i+1}=\infty$.

eine von den folgenden Ungleichungen erfullt:

$$\overline{y}_k + m_i\overline{x}_k > 0,\ \overline{y}_k + m_{i+1}\overline{x}_k > 0.$$ [11]

(B)$_1$ **Der Fall** $\overline{x_k} = 0,\ y_k = 0$. In diesem Falle ist $B(x, \lambda, \mu)$ in

$$(5.5)\qquad x \in D(a, r), \lambda \in D(\alpha, \beta\,;\ R, \infty),\ \mu \in D(\alpha', \beta';\ R', \infty)\,;\ U(\overline{m}_k, \overline{m}_{k+1})$$

regulär, und lässt es sich für $\lambda \to \infty,\ \mu \to \infty$ folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$B(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r(\overline{m}_k, \overline{m}_{k+1};\ \lambda, \mu)\underset{r}{\overline{B}}(x, \lambda^{\overline{n}_k'}\mu^{-\overline{n}_k}),$$

wo $\overline{n}_k$ und $\overline{n}_k'$ zueinander prime natürliche Zahlen sind so dass $\overline{n}_k'/\overline{n}_k = \overline{m}_k$; daher lässt sich das System (5. 3) entweder zur Normalform oder zum Falle von Art. 4 bringen.

(B)$_2$ **Der Fall**$(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \neq (0, 0)$. Wendet man die Transformation $Z = \overline{P}(\lambda, \mu)\overline{Z}$ mit

$$\overline{P}(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-\overline{y}_k/3}\mu^{-\overline{x}_k/3} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2\overline{y}_k/3}\mu^{-2\overline{x}_k/3} \end{bmatrix}$$

auf (5. 3) an, so geht (5. 3) ins Folgende über:

$$(5.6)\qquad d\overline{Z}/dx = \lambda^{m+y_i/2+\overline{y}_k/3}\mu^{m'+x_i/2+\overline{x}_k/3}\overline{\overline{B}}(x, \lambda, \mu)\overline{Z}.$$

Hierbei ist

$$\overline{\overline{B}}(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\overline{b}}_{12}(x, \lambda, \mu) & \overline{\overline{b}}_{13}(x, \lambda, \mu) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\overline{b}}_{12} = \lambda^{-y_i-2\overline{y}_k/3}\mu^{-x_i-2\overline{x}_k/3}a_{12},\ \overline{\overline{b}}_{13} = \lambda^{-3y_i/2-\overline{y}_k}\mu^{-3x_i/2-\overline{x}_k}a_{13},$$

und folglich ist $\overline{\overline{B}}(x, \lambda, \mu)$ in (5. 5) ebenfalls regulär, und lässt es sich für $\lambda \to \infty,\ \mu \to \infty$ folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$\overline{\overline{B}}(x, \lambda, \mu) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} K_r(\overline{m}_k, \overline{m}_{k+1};\ \lambda, \mu)\underset{r}{\overline{\overline{B}}}(x, \lambda^{\overline{n}_k'}\mu^{-\overline{n}_k}),$$

wo

$$\underset{00}{\overline{\overline{B}}}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \underset{00}{\overline{\overline{b}}}_{13}(x) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ (\underset{00}{\overline{\overline{b}}}_{13}(x) \neq 0)\,;$$

11) $\overline{x}_k > 0$, wenn $m_{i+1} = \infty$.

daher ist das System (5. 6) eine Normalform.

6. Eine Anwendung des Ergebnisses des Artikels 5 auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Wir betrachten die Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\lambda^2P(x,\lambda)\frac{dy}{dx}+\lambda^3Q(x,\lambda)y=0. \tag{6. 1}$$

Wir setzen für $P(x,\lambda)$ und $Q(x,\lambda)$ voraus, dass sie in

$$x\in D(0,r),\ \lambda\in D(\alpha,\beta\,;\,R,\infty)$$

regulär sind, und dass sie für $\lambda\to\infty$ asymptotisch entwickelbar sind.

Wendet man die Transformation

$$x=t\mu^{-1},\ y=y_3,\ dy/dt=\lambda\mu^{-1}y_2,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\lambda^2\mu^{-2}y_1 \tag{6. 2}$$

auf (6. 1) an, so geht (6. 1) ins Folgende über:

$$dY/dt=\lambda\mu^{-1}A(t,\lambda,\mu)Y, \tag{6. 3}$$

in der

$$A(t,\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}0 & -P(t\mu^{-1},\lambda) & -Q(t\mu^{-1},\lambda)\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

und folglich auch $A(t,\lambda,\mu)$ in

$$t\in D(0,r),\ \lambda\in D(\alpha,\beta\,;\,R,\infty),\ R'<|\mu|<\infty,\ (R'=r'/r) \tag{6. 4}$$

regulär ist, und es sich für $\lambda\to\infty$, $\mu\to\infty$ folgendermassen asymptotisch entwickeln lässt ([7], S. 18, Hilfssatz 12):

$$A(t,\lambda,\mu)\simeq\sum_{r=0}^{\infty}K_r(1,\infty\,;\,\lambda,\mu)\underset{r}{A}(x,\lambda\,\mu^{-1}),$$

Da $m=1$, $m'=-1$; $n=1$, $n'=1$; $n_0=0$ und $n_0'=1$ ist, so hat man $m_0=0$, $m_0'<0$; daher ist (6. 3) eine Normalform (IV). Für

$$t\in D(a,r''),(a\neq 0),\ \lambda\in D(\alpha,\beta\,;\,R,\infty),\ R'<|\mu|<\infty\,;\ U(0,1) \tag{6. 6}$$

kann man die Theorie des Artikels 5 auf (6. 3) anwenden, denn es entweder $\underset{rs}{a_{jk}}(t)\neq 0$ oder $\underset{rs}{a_{jk}}(t)\equiv 0$ in $D(a,r'')$ ist.

N. B. Neuerdings hat Herr M. Iwano die folgenden Tatsachen bewiesen:

(i) Betrachten wir an Stelle von (R_6), (R_7) und (R_8)

(R'): $x \in D(0, r)$, $\lambda \in D(\alpha, \beta; R, \infty)$, $\mu \in D(\alpha', \beta'; R', \infty)$; $U(1/3, \infty)$,

so ist der Koeffizient $\lambda\mu^{-3} B(x, \lambda, \mu)$ der rechten Seite von (3. 2) in (R') regulär, und lässt es sich für $\lambda \to \infty$, $\mu \to \infty$ folgendermassen asymptotisch entwickeln:

$$\lambda\mu^{-3} B(x, \lambda, \mu) \simeq \Sigma K_r (1/3, \infty; \lambda, \mu) \underset{r}{B}(x, \lambda\mu^{-3}),$$

daher ist das System (3. 2) die Normalform (IV).

(ii) Betracht man z. B. den Fall dass $v \to \infty$ in (2. 5), so kann man mit Hilfe von R. E. Langer zwei Fälle (R_2), (R_3) gleichzeitig behandeln.

LITERATURVERZEICHNIS.

[1] M. HUKUHARA, Sur les propriétés asymptotiques des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires contenant un paramèter, Memo. Fac. Eng. Kyûshû Imp. Univ., 8(1937), 249-280.

[2] M. IWANO, Über eine asymptotische Darstellung der Lösung eines Systems von linearen Differentialgleichungen, welche von zwei Parametern abhängen, La Funkcialaj Ekv., **14**(1961), 11-52.

[3] M. IWANO, Differentialgleichungen mit einem Wendepunkt, Seminar Univ. Tôkyô, (1960).

[4] M. IWANO, Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit einem Wendepunkt, (Vortrag), Math. Soc. Jap., (1961).

[5] R. E. LANGER, The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the 2-nd order with special reference to a turning point, Trans. Amer. Math. Soc., **67**(1949), 461-490.

[6] R. MCKELVEY, The solutions of 2-nd order linear differential equations about a turning point of order two, Trans. Amer. Math. Soc., **78**(1955), 103-123.

[7] K. TAKAHASHI, Über eine erweiterte asymptotische Darstellung der Lösung eines Systems von homogenen linearen Differentialgleichungen, welche von zwei Parametern abhängen, Jour. Fac. Soc. Univ. Tôkyô, 8(1959), 1-73.

[8] K. TAKAHASHI, Über eine asymptotische Darstellung der Lösung eines Systems von Differentialgleichungen, welche von zwei Parametern abhängen, und eine Anwendung auf spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Tôhoku Math. Jour., **13**(1961), 1-17.

UNIVERSITÄT DER LANDWIRTSCHAFT
UND TECHNOLOGIE ZU TÔKIÔ.