COHOMOLOGIE DES ALGÈBRES DIFFÉRENTIELLES OÙ OPÈRE UNE ALGÈBRE DE LIE

MICHEL ANDRÉ

(Received July 2, 1962)

Introduction

Dans ce travail, je donne les démonstrations des résultats des deux articles de H.Cartan du colloque de topologie algèbrique de Bruxelles de 1950 :

1. Notions d'algèbre différentielle.
2. Transgression dans un groupe de Lie.

On considère une opération d'une algèbre de Lie L avec une connexion : par exemple celle construite à partir d'un espace fibré principal ou plus particulièrement d'un espace homogène (chapître 3). Deux problèmes sont à résoudre : trouver $H(E)$ à partir de l'algèbre des éléments basiques B_E, de l'algèbre de Lie L et d'une connexion (chapître 5) et trouver $H(B_E)$ à partir de $H(E)$, de l'algèbre de Lie L et de quelquechose de plus (chapître 6). Les deux problèmes sont résolus par l'intermédiaire de la théorie de Hirsch-Koszul (chapitre 1) dans les cas où deux homomorphismes naturels sont des isomorphismes (homomorphismes fondamentaux du premier et du deuxième problèmes). Ces exigences nous amènent à faire des hypothèses de réductivité pour l'algèbre de Lie L (chapître 4). Dans l'exemple d'un espace homogène, on peut obtenir des résultats très précis concernant la solution du deuxième problème et démontrer en particulier une formule généralisée de Hirsch (chapître 2).

Je remercie Monsieur Chevalley de son aide.

Chapître 1. La théorie de Hirsch-Koszul.

1. Algèbres graduées anticommutatives. Toutes les structures que nous rencontrerons au cours de ce travail seront définies, sauf mention spéciale, sur un corps U commutatif et de caractéristique nulle.

Une *algèbre graduée* E est un espace vectoriel gradué, c'est-à-dire la somme directe d'espaces E^p (p entier quelconque), muni d'une multiplication bilinéaire et associative. On postule en outre les conditions suivantes :

1.1. *si p est strictement négatif, l'espace vectoriel E^p est nul,*

1.2. *le produit $E^p \cdot E^q$ est contenu dans E^{p+q}.*

Dans ce travail, E^+ désignera toujours l'idéal de E égal à $\sum_{p>0} E^p$.

Une algèbre graduée est dite *anticommutative* si la condition suivante est satisfaite :

1.3. *si a et b sont des éléments de* E^p *et de* E^q, *alors* $a \cdot b$ *et* $(-1)^{pq}\ b \cdot a$ *sont égaux.*

Un morphisme d'une algèbre graduée (anticommutative) E dans une algèbre graduée (anticommutative) F est un homomorphisme de E dans F pour les structures d'algèbres, qui applique E^p dans F^p.

On peut définir le produit tensoriel de deux algèbres graduées anticommutatives E et F, noté $G = E \otimes F$. L'espace vectoriel G^p est le suivant : $G^p = \sum_{q+r=p} E^q \otimes F^r$. La multiplication est définie par linéarité à partir de la définition restreinte suivante :

1.4. *si* e, e', f *et* f' *sont des éléments respectivement de* E^p, E^q, F^r *et* F^s, *alors*

$$(e \otimes f) \cdot (e' \otimes f') = (-1)^{qr} (e \cdot e' \otimes f \cdot f').$$

L'algèbre graduée G est anticommutative.

Remarquons le cas trivial, où le produit de deux éléments est toujours nul. Ainsi un espace vectoriel gradué est un exemple d'algèbre graduée anticommutative.

Soient E et F deux algèbres graduées et f un homomorphisme de l'espace vectoriel de E dans celui de F ; l'homomorphisme f est dit *de degré* p, s'il applique E^q dans F^{q+p} pour tout q. Un espace vectoriel gradué E (ou une algèbre graduée) est dit *presque fini*, si les espaces vectoriels E^p sont tous de dimension finie.

Une algèbre graduée anticommutative E est dite sous-algèbre graduée anticommutative de l'algèbre graduée anticommutative F, si et seulement si l'ensemble des éléments de E est un sous-ensemble de l'ensemble des éléments de F et l'injection du premier ensemble dans le second, un morphisme d'algébres graduées anticommutatives.

Soit E une sous-algèbre graduée anticommutative de F. Une *dérivation* de E dans F est un homomorphisme f de l'espace vectoriel de E dans celui de F, de degré pair, satisfaisant la condition suivante :

1.5. *si* a *et* b *sont deux éléments de* E, *alors* $f(a \cdot b)$ *est égal à*

$$f(a) \cdot b + a \cdot f(b).$$

Si E et F sont égaux, on parle de dérivation de E.

Soient f une dérivation de E dans F de degré p et f' une dérivation de E' dans F' de degré p. A partir de f et de f', on peut définir une dérivation de degré p de $E \otimes E'$ dans $F \otimes F'$, notée $f * f'$, par la formule suivante :

1.6. $(f*f')(a \otimes b) = f(a) \otimes b + a \otimes f'(b)$.

Une *antidérivation* de E dans F est un homomorphisme g de l'espace vectoriel de E dans celui de F, de degré impair, satisfaisant la condition suivante :

1.7. *si a et b sont des éléments de E^p et de E, alors $g(a \cdot b)$ est égal à $g(a) \cdot b + (-1)^p (a \cdot g(b))$.*

Si E et F sont égaux, on parle d'antidérivation de E.

Soient g une antidérivation de E dans F de degré p et g' une antidérivation de E' dans F' de degré p. A partir de g et de g', on peut définir une antidérivation de degré p de $E \otimes E'$ dans $F \otimes F'$, notée $g*g'$, par la formule :

1.8. *si a et b sont des éléments de E^r et de E', alors $(g*g')(a \otimes b)$ est égal à $g(a) \otimes b + (-1)^r (a \otimes g'(b))$.*

Pour vérifier la condition 1.7, il suffit de le faire pour une paire d'éléments, $a \otimes b$ et $c \otimes d$, avec a, b, c et d appartenant à E^r, E'^s, E^t et E'^v respectivement.

Enonçons le lemme suivant dont la démonstration est triviale :

LEMME 1.9. *Si f et g sont des dérivations de E, alors $f \circ g - g \circ f$ est une dérivation de E. Si f et g sont des antidérivations de E, alors $f \circ g + g \circ f$ est une dérivation de E. Si f est une dérivation et g une antidérivation de E, alors $g \circ f - f \circ g$ est une antidérivation de E. Enfin si f est une antidérivation de E, alors f^2 égal à $f \circ f$ est une dérivation de E.*

On peut démontrer aussi immédiatement le résultat suivant :

LEMME 1.10. *Si E est une algèbre graduée anticommutative engendrée par un sous-ensemble F d'éléments homogénes de E, deux dérivations ou deux antidérivations ou deux morphismes de E dans G sont égaux si et seulement si ces applications coïncident sur F. D'autre part si f est un morphisme de E dans G, g une dérivation(antidérivation)de E et h une dérivation (antidérivation) de G, alors $f \circ g - h \circ f$ est nul sur E, si et seulement s'il l'est sur F.*

Un espace vectoriel gradué E est dit *pair* (ou *impair*), si E^p est nul pour tout p impair (ou pair). D'autre part si E est un espace vectoriel gradué, $V(E)$ est l'espace vectoriel E gradué de la manière suivante: $V^{j+1}(E) = E^j$.

Il est temps d'illustrer ces définitions par quelques exemples. Considérons un espace vectoriel gradué impair E de dimension finie v avec une base homogène : $x_1, x_2, \cdots, x_v$. Considérons aussi l'algèbre extérieure $C(E)$ de E. Graduons-la ; elle a pour base les éléments $x_{j_1} \wedge x_{j_2} \wedge \cdots \wedge x_{j_n}$ avec $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$; $C^m(E)$ est le sous-espace de $C(E)$ engendré par les éléments de la base pour lesquels la somme des degrés des x_j est égale à m. La condition 1.3 se vérifie aisément en remarquant que le degré de $x_{j_1} \wedge x_{j_2} \wedge \cdots \wedge x_{j_n}$ a la même parité que n, car chaque x_j est de degré impair. La graduation ne dépend pas de la base choisie.

Soit maintenant un espace vectoriel gradué pair F de dimension finie w avec une base homogéne $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_w$. Considérons aussi l'algèbre symétrique $X(F)$ de F. Graduons-la; elle a pour base les éléments $y_{j_1} \cdot y_{j_2} \cdots y_{j_n}$ avec $j_1 \leqq j_2 \leqq \cdots\cdots \leqq j_n$; $X^m(F)$ est le sous-espace de $X(F)$ engendré par les éléments de la base pour lesquels la somme des degrés des y_j est égale à m, La condition 1.3 se vérifie aisément en remarquant que le degré de $y_{j_1} \cdot y_{j_2} \cdots y_{j_n}$ est toujours pair, puisque chaque y_j est de degré pair. La graduation ne dépend pas de la base choisie.

Remarquons que si E n'est pas impair ou F pas pair les algèbres $C(E)$ ou $X(F)$ peuvent être graduées de la même manière. Ces algèbres ne sont plus anticommutatives. Si E est impair et si F est pair, il est aussi intéressant de considérer l'algèbre graduée anticommutative $C(E) \otimes X(F)$. Identifions selon l'usage $C(E)$ avec $C(E) \otimes 1$ et $X(F)$ avec $1 \otimes X(F)$. La somme directe $E + F$ s'identifie donc à $E \otimes 1 + 1 \otimes F$.

LEMME 1.11. *Tout homomorphisme de l'espace vectoriel gradué $E + F$ où E est impair et F pair dans une suralgébre graduée anticommutative unitaire B de $C(E) \otimes X(F)$, de degré pair (ou impair) est la restriction d'une et d'une seule dérivation (ou antidérivation) de $C(E) \otimes X(F)$ dans B. Tout homomorphisme de degré 0 de $E + F$ dans une algèbre graduée anticommutative unitaire G est la restriction d'un et d'un seul morphisme de $C(E) \otimes X(F)$ dans G.*

L'unicité est due au lemme 1.10. Je me contente d'indiquer la dérivation ou l'antidérivation g dans le premier cas; l'homomorphisme f donné est de degré p. Pour $j_1 < j_2 < \cdots\cdots < j_m$ et $k_1 \leqq k_2 \leqq \cdots \leqq k_n$ l'application g envoie l'élément $x_{j_1} \wedge x_{j_2} \wedge \cdots \wedge x_{j_m} \otimes y_{k_1} \cdot y_{k_2} \cdots y_{k_n}$ sur l'élément suivant de B:

$$\sum_{1 \leq r \leq m} a_r x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdots x_{j_{r-1}} f(x_{j_r}) \cdot x_{j_{r+1}} \cdots x_{j_m} \cdot y_{k_1} \cdot y_{k_2} \cdots y_{k_n}$$

$$+ \sum_{1 \leqq s \leqq n} a_{m+1} x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdots x_{j_m} \cdot y_{k_1} \cdot y_{k_2} \cdots y_{k_{s-1}} \cdot f(y_{k_s}) \cdot y_{k_{s+1}} \cdots y_{k_n}$$

avec a_q égal à $(-1)^{p(q-1)}$.

Une *algèbre différentielle* est une paire (E, d), où E est une algèbre graduée anticommutative et d une antidérivation de degré $+1$ de E avec la condition suivante

1.12. *l'application d^2 est nulle.*

Un morphisme f d'une algèbre différentielle (E, d) dans une algèbre différentielle (E', d') est un morphisme d'algèbres graduées anticommutatives de E dans E' tel que $f \circ d$ et $d' \circ f$ soient égaux.

On peut définir le produit tensoriel de deux algèbres différentielles (E, d) et (E', d'): c'est la paire $(E \otimes E', d * d')$. Le cas particulier où d'est nul, nous permet de définir le produit tensoriel d'une algèbre différentielle et d'une algèbre graduée anticommutative. Dans le cas d'une multiplication triviale, on a la notion d'espace vectoriel différentielles.

2. Algèbres différentielle filtrées. Une *algèbre différentielle filtrée* est un triplet $(E, d_E, \mathfrak{R}_E)$ où (E, d_E) est une algèbre différentielle et $\mathfrak{R}_E$ une suite décroissante d'idéaux R_p de l'algèbre E:

$$E = R_0 \supset R_1 \supset \cdots \supset R_p \supset R_{p+1} \cdots$$

avec les conditions suivantes:

2.1. *le produit $R_p \cdot R_q$ est contenu dans R_{p+q}*

2.2. *la différentielle d_E applique R_p dans R_p*

2.3. *l'idéal R_p est un sous-espace homogène de E*

2.4. *l'intersection de R_p et de E^q est nulle si q est strictement inférieur à p.*

Appelons T_q le quotient de l'espace vectoriel gradué R_q par l'espace vectoriel gradué R_{q+1}. Notons b_q l'homomorphisme naturel d'espaces vectoriels gradués de degré 0 de R_q sur T_q. Soit T la somme directe des espaces vectoriels gradués T_q. L'espace T est bigradué, d'une part par la graduation des espaces T_q (on parle de graduation totale, notée en indice supérieur), d'autre part par les sous-espaces vectoriels T_q (on parle de graduation filtrante, notée en indice inférieur).

Considérons l'application bilinéaire suivante de $T_p \times T_q$ dans T_{p+q}: à chaque élément de T_p ou de T_q faisons correspondre un représentant dans R_p ou R_q, puis multiplions-les dans E; l'image par b_{p+q} de l'élément de R_{p+q} trouvé est le résultat de l'applications. Ces applications se prolongent d'une seule manière en une application bilinéaire de $T \times T$ dans T. Grâce à cette application, T est muni d'une structure d'algèbre graduée pour les deux graduations, anticommutative pour la graduation totale.

Un raisonnement analogue, à partir de la condition 2.2, nous permet d'introduire une différentielle d_T dans T, pour la graduation totale. Pour la graduation filtrante, on a le résultat suivant: d_T est de degré 0 et b_p est un morphisme de l'espace vectoriel différentiel (R_p, d_E) sur l'espace vectoriel différentiel (T_p, d_T). Non seulement l'algèbre de cohomologie de T, notée K, est une algèbre graduée anticommutative pour la graduation totale, mais encore la structure d'espace vectoriel bigradué de T donne à K une structure d'espace vectoriel bigradué. On désigne par K_p et K^q les sous-espaces de K des éléments de degré filtrant p et de degré total q respectivement. L'intersection de K_p et de K^q est notée K_p^q.

On reconnaît en T et en K les algèbres numérotées 0 et 1 de la théorie spectrale. Le but des pages qui suivent est de construire dans certains cas une différentielle d_K sur l'algèbre K (ou encore sur l'espace vectoriel gradué de K)

telle que l'algèbre de cohomologie $H(K, d_K)$soit isomorphe à l'algèbre de cohomologie $H(E, d_E)$ (ou respectivement que l'espace vectoriel gradué de cohomologie $H(K, d_K)$ soit isomorphe à l'espace vectoriel gradué de l'algèbre de cohomologie $H(E, d_E)$). Le rôle essentiel va être joué par la sous-algèbre de E dont la définition suit.

Appelons Z_p l'espace vectoriel des éléments de R_p que d_E applique dans R_{p+1} et D_p l'espace vectoriel engendré par $d_E(R_p)$ et R_{p+1}. Ce sont deux sous-espaces homogènes de E : appelons Z_p^q et D_p^q les intersections de Z_p et de D_p avec E^q. L'homorphisme b_p applique Z_p sur le sous-espace des cocycles de T_p. Il en découle un homorphisme a_p de degré 0 pour la graduation totale de Z_p sur K_p : le noyau en est D_p.

La condition 2.4 indique en particulier que l'intersection de E^{p-1} et de R_p est nulle. Par conséquent D_p^p est toujours nul ; l'homomorphisme a_p induit un isomorphisme de Z_p^p sur K_p^p. Notons B^p le sous-espace Z_p^p de E^p. La somme directe des B^p est un sous-espace homogène de E, appelons-le B. Les isomorphismes de B^p sur K_p^p permettent de construire un monomorphisme naturel j d'espaces vectoriels gradués de B dans K. Puisque le produit $Z_p \cdot Z_q$ est contenu dans Z_{p+q}, le sous-espace B de E est une sous-algèbre graduée anticommutative de E. Le monomorphisme j est un morphisme d'algèbres graduées anticommutatives (pour K, il s'agit de la graduation totale). Il permet de donner à K une structure de B-module à droite intéressante. D'autre part la différentielle d_E applique Z_p dans Z_{p+1}, on a donc le résultat suivant :

2.5. *la différentielle d_E applique B^p dans B^{p+1}.*

3. Les N-inversions. Soit N un sous-espace vectoriel de K, homogène pour les deux graduations, sous-B-module de K pour la structure de B-module à droite de K, définie dans le paragraphe précédent.

Une *N-inversion* de E est une application k de N dans E satisfaisant aux conditions suivantes :

3.1. *l'application k est un B-homomorphisme*

3.2. *l'application k est un homomorphisme de degré* 0 *de N dans E (il s'agit de la graduation totale de N)*

3.3. *l'application $d_E \circ k$ applique N dans $k(N)$*

3.4. *l'intersection N_p de N et de K_p est appliquée dans Z_p par k et sur celle-ci, $a_p \circ k$ est égal à l'injection de cette intersection dans K_p.*

Si N est égal à K, on parle d'*inversion* de E. L'inversion est dite *multiplicative* si k est un morphisme d'algèbres graduées de K dans E.

Voici un lemme qui va nous permettre d'exploiter cette notion.

LEMME 3.5. *Si k est une N-inversion de E, $k^{-1}(D_p)$ est égal à $\sum_{q>p} N_q$.*

En effet k applique N_q dans Z_q qui est contenu dans D_p si p est strictement inférieur à q. D'autre part soit x un élément non nul de N que k applique dans D_p. Ecrivons x sous la forme $\sum_{i \geqq m} x_i$, avec x_i appartenant à N_i et x_m non nul: ainsi $k(x)$ appartient à Z_m et $a_m \circ k$ applique x sur x_m. Puisque x_m n'est pas nul, $a_m \circ k$ n'applique pas x dans D_m. Par conséquent D_p n'est pas contenu dans D_m, autrement dit m est strictement supérieur à p, ce qu'il fallait démontrer.

LEMME 3.6. *Une N-inversion est toujours un monomorphisme.*

En effet le noyau d'une N-inversion k est contenu dans l'intersection des sous-espaces $k^{-1}(D_p)$ de N, donc dans 0 d'aprés le lemme 3.5.

LEMME 3.7. *Si k est une N-inversion de E, il existe une et une seule différentielle d_N de l'espace vectoriel gradué N avec la propriété suivante: k est un morphisme de (N, d_N) dans (E, d_E).*

C'est trivial puisque k est un monomorphisme.

LEMME 3.8. *Si k est une N-inversion de E, la différentielle d_N induite applique pour tout p l'espace vectoriel $\sum_{i \geqq p} N_i$ dans l'espace vectoriel $\sum_{i > p} N_i$.*

En effet si i est supérieur ou égal à p, l'espace vectoriel $(k \circ d_N)(N_i)$ qui est contenu dans $d_E(R_i)$ est un sous-espace de D_p. Le lemme 3.5 permet de conclure.

Ainsi d_N applique N dans le sous-espace $\sum_{i>0} N_i$. La projection p_N de N sur N_0 est donc un morphisme de (N, d_N) sur $(N_0, 0)$. Il en découle un morphisme p_N^* d'espaces vectoriels gradués de $H(N, d_N)$ dans N_0.

Dorénavant nous utiliserons du lemme 3.5 que le corollaire suivant:

LEMME 3.9. *Si k est une N-inversion de E, pour tout p, l'intersection de $k(N)$ et de $d_E(R_p)$ est contenue dans R_{p+1}.*

En effet cette intersection est l'image par k de $k^{-1}(d_E(R_p))$ qui est contenue dans $k^{-1}(D_p)$. Elle est donc contenue dans l'image par k de la somme $\sum_{q>p} N_q$. Cette image est contenue dans R_{p+1}.

Remarquons que si k est une inversion multiplicative, la différentielle d_K qui s'en déduit est une différentielle pour la structure d'algèbre graduée de K.

4. Les inversions. Il s'agit essentiellement de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 4.1. *Soit k une inversion (respectivement une inversion multiplicative) d'une algèbre différentielle filtrée $(E, d_E, \mathfrak{R}_E)$. Appelons d_K la diffé-*

rentiélle de K déduite de cette inversion. L'inversion k détermine un isomorphisme k^* d'espaces vectoriels gradués (respectivement d'algébres graduées anticommutatives) de $H(K, d_K)$ sur $H(E, d_E)$.

Je vais démontrer ce théorème à l'aide du lemme 3.9 et du lemme évident suivant.

LEMME 4.2. *Soit (F, d) un espace vectoriel différentiel et soit G un sous-espace stable de F. L'injection de G dans F détermine un isomorphisme des espaces de cohomologie $H(G, d)$ et $H(F, d)$ si et seulement si la condition suivante est satisfaite: tout élément de F dont le cobord appartient à G est la somme d'un élément de G et d'un cobord de F.*

Soit x un élément de R_p dont le cobord appartient à $k(K)$. Le lemme 3.9 démontre que $d_E(x)$ appartient à R_{p+1}. Par conséquent x est un élément de Z_p et $(k \circ a_p)(x) - x$ un élément de D_p. Autrement dit x est la somme d'un élément de $k(K)$, d'un cobord et d'un élément de R_{p+1}. Le cobord de ce dernier élément appartient à $k(K)$. En répétant l'opération à partir de p nul, on démontre que tout élément de E dont le cobord appartient à $k(K)$ est la somme d'un élément de $k(K)$, d'un cobord et d'un élément de R_q.

Si l'élément x est homogène de degré p, la décomposition peut se faire en degré p et si q est strictement supérieur à p, l'élément de R_q de la décomposition est nul. Si l'élément x n'est pas homogène, on décompose chacune de ses composantes comme ci-dessus. Ainsi tout élément de E dont le cobord appartient à $k(K)$ est la somme d'un cobord et d'un élément de $k(K)$; le lemme 4.2 permet de conclure.

Nous savons que la différentielle d_E applique B dans B. Le monomorphisme j de B dans K est donc un morphisme d'espaces vectoriels différentiels de (B, d_E) dans (K, d_k). Puisque l'application $k \circ j$ est égale à l'injection de B dans E, le théorème suivant est évident.

THÉORÈME 4.3. *Soit k une inversion d'une algèbre différentielle filtrée $(E, d_E, \mathfrak{R}_E)$ (respectivement une inversion multiplicative). Le monomorphisme naturel j de B dans K détermine un morphisme j^* d'espaces vectoriels graduées (respectivement d'algèbres graduées anticommutatives) de $H(B, d_E)$ dans $H(K, d_K)$. Le morphisme composé $k^* \circ j^*$ est égal à celui de $H(B, d_E)$ dans $H(E, d_E)$ dû à l'injection de B dans E.*

Les cocycles de l'algèbre différentielle (E, d_E) sont des éléments de Z_0 et les cobords sont des éléments de D_0. Il existe donc un morphisme naturel q d'algèbres graduées anticommutatives de $H(E, d_E)$ dans K_0. Rappelons que nous avons défini un morphisme p_K^* de $H(K, d_K)$ dans K_0 dans le paragraphe précédent. Le théorème suivant découle de la condition 3.4.

THÉORÈME 4.4. *Soit k une inversion d'une algèbre différentielle filtrée $(E, d_E, \mathfrak{R}_E)$. Il existe un homomorphisme naturel q de $H(E, d_E)$ dans K_0.*

L'homomorphisme composé $q \circ k^*$ *de* $H(K, d_K)$ *dans* K_0 *est égal à l'homomorphisme dû à la projection de* K *sur* K_0.

5. Algèbres de Chevalley. Abordons le problème de l'existence d'une inversion pour une algèbre différentielle filtrée ; dans ce but, faisons la supposition suivante : (*condition* F)

5.1. *il existe un sous-espace vectoriel* F *de* K_0, *homogène et de dimension finie* ; *les injections canoniques de* F *et de* B *dans* K *déterminent un isomorphisme de* $F \otimes B$ *sur* K (*l'élément* $f \otimes b$ *a pour image le produit des images de* f *et de* b).

Le sous-espace $F \otimes B^p$ est appliqué par cet isomorphisme sur K_p. Complétons la condition F de la manière suivante : (*condition de Chevalley*)

5.2. *le sous-espace* F *de* K_0 *est une sous-algèbre de* K ; *il contient un sous-espace vectoriel gradué impair* P *dont l'injection dans* F *se prolonge en un isomorphisme de l'algèbre extérieure graduée* $C(P)$ *sur l'algèbre* F ; *tout élément de* P *est l'image par* a_0 *d'un élément de* Z_0 *que* d_E *applique dans* B ; *l'algèbre* E *possède une unité.*

Il existe donc un homomorphisme s_P de degré 0 de l'espace vectoriel gradué P dans l'espace vectoriel gradué Z_0 avec les propriétés suivantes : l'application $a_0 \circ s_P$ est égale à l'injection de P dans K_0 et l'image de P par l'application $d_E \circ s_P$ est contenue dans B ; appelons w_P cette application. Les éléments de P sont dits transgressifs et l'application w_P est une transgression.

THÉORÈME 5.3. *Toute algèbre de Chevalley possède au moins une inversion multiplicative. Pour une transgression* w_P *donnée, l'inversion peut être choisie telle que la différentielle correspondant de* K *jouisse de la propriété suivante* : *la restriction de* d_K *au sous-espace* P *de* K *est égale à l'homomorphisme composé de la transgression choisie* w_P *de* P *dans* B *et de l'homomorphisme naturel* j *de* B *dans* K.

Soit donc s_P un homomorphisme de la condition de Chevalley, dont dérive la transgression w_P choisie. Appelons k l'unique morphisme d'algèbres graduées anticommutatives de K dans E jouissant des propriétés suivantes : la restriction de k à P est égale à l'homomorphisme s_P et l'application $k \circ j$ est égale à l'injection de B dans E. Les conditions 3.1 et 3.2 sont vérifiées immédiatement ; il suffit de contrôler les conditions 3.3 et 3.4 sur P et sur $j(B)$.

La restriction de $k \circ d_K$ à P est égale à celle de $d_E \circ k$, c'est-à-dire à $d_E \circ s_P$ ou encore à w_P. Une transgression w_P est toujours égale à l'homomorphisme $k \circ j \circ w_P$. Par conséquent la restriction de d_K à P est égale à l'application composé $j \circ w_P$. Le théorème est ainsi démontré.

6. Algèbres de Hirsch-Koszul. Cette fois la condition F est à compléter de la manière suivante (*condition de Hirsch-Koszul*) :

6.1. *tout élément du sous-espace F de K_0 est l'image par a_0 d'un élément de Z_0 que la différentielle d_E applique dans R_2.*

Désignons par M_q le sous-B-module de K engendré par les éléments homogènes de F de degré total strictement inférieur à q. Une q-inversion est une M_q-inversion : on la notera k_q. Les éléments de F de degré total q forment un sous-espace F^q de F.

LEMME 6.2. *Si k_q est une q-inversion d'une algèbre de Hirsch-Koszul, alors pour tout p, chaque élément de F^q est l'image par a_0 d'un élément de Z_0 que la différentielle d_E applique dans le sous-espace vectoriel de E engendré par $k_q(M_q)$ et par R^p_{q+1}.*

On démontre ce lemme par induction sur p. La condition 6.1 démontre le lemme pour p inférieur ou égal à 2. Supposons p supérieur ou égal à 2 et faisons le passage de p à $p+1$.

Soient x un élément de F^q et y un élément de Z_0 que a_0 applique sur x et d_E, dans le sous-espace vectoriel de E engendré par $k_q(M_q)$ et par R^q_p ; $d_E(y) = u + v$. Les éléments $d_E(v)$ et $-d_E(u)$ sont égaux. En vertu de la condition 3.3, l'élément $d_E(v)$ appartient à l'intersection de $k_q(M_q)$ et de $d_E(R_p)$. D'aprés le lemme 3.9, l'élément $d_E(v)$ est donc un élément de R_{p+1}. Autrement dit v est un élément de Z^{q+1}_p.

D'autre part en vertu de la condition F, l'espace vectoriel K^{q+1}_p est isomorphe à l'espace vectoriel $F^{q+1-p} \otimes B^p$. L'espace vectoriel K^{q+1}_p est donc contenu dans M_q, puisque p est supérieur ou égal à 2. Or $a_p(v)$ appartient à K^{q+1}_p ; c'est donc un élément de M_q.

L'élément $a_p(k_q(a_p(r)) - v)$ est nul. Ainsi $k_q(a_p(v)) - v$ appartient à D^{q+1}_p. Il est donc possible d'écrire v sous la forme suivante : $v = h + d_E(m) + n$ avec h appartenant à $k_q(M_q)$, m à R_p et n à R^{q+1}_{p+1}. Par conséquent $y - m$ est un élément de Z_0 que d_E applique dans le sous-espace de E engendré par $k_q(M_q)$ et par R^{q+1}_{p+1} et que a_0 applique sur x. En effet $a_0(m)$ est nul, puisque m est un élément de R_1. Le lemme est ainsi démontré.

LEMME 6.3. *Si k_q est une q-inversion d'une algèbre de Hirsch-Koszul, alors chaque élément de F^q est l'image par a_0 d'un élément de Z^q_0 que la différentielle d_E applique dans $k_q(M_q)$.*

Pour le démontrer, il suffit d'appliquer le lemme 6.2 en choisissant p égal à $q+2$. On obtient sans autre le résultat ci-dessus, puisque R^{q+1}_{q+2} est nul et que l'élément de Z_0 peut être choisi de degré q.

LEMME 6.4. *Toute q-inversion d'une algèbre de Hirsch-Koszul est la restriction à M_q d'une $q+1$-inversion.*

Soient $f_1, f_2, \cdots, f_m$ les éléments d'une base de F^q et $g_1, g_2, \cdots, g_m$ des éléments de Z^q_0 que d_E applique dans $k_q(M_q)$ et a_0 sur $f_1, f_2, \cdots, f_m$ respectivement (k_q étant une q-inversion).

Ceci étant, soit k_{q+1} l'unique B-homomorphisme de M_{q+1} dans E, qui applique les éléments f_i sur les éléments g_i et dont la restriction à M_q est égale à k_q. Il est aisé de vérifier les propriétés de $q+1$-inversion.

THÉORÈME 6.5. *Toute algèbre de Hirsch-Koszul possède au moins une inversion.*

Puisque M_0 est nul, il existe toujours une 0-inversion. D'aprés le lemme 6.4, il existe donc une q-inversion pour tout q. Enfin si q est strictement supérieur aux degrés des composantes homogènes F^q non nulles de F, M_q est égal à K et une q-inversion est une inversion. Le théorème est ainsi démontré.

7. Un cas particulier. Soit (E, d_E) une algèbre différentielle avec une unité. Supposons que l'espace vectoriel gradué de E est la somme directe de sous-espaces homogènes E_p avec p positif ou nul. Par conséquent l'espace de E est bigradué. La graduation d'algèbre différentielle est dite totale et celle donnée par les E_p est dite filtrante. Supposons en outre les conditions suivantes satisfaites :

7.1. *le produit $E_p \cdot E_q$ est contenu dans E_{p+q},*

7.2. *l'intersection E_q^p de E^p et de E_q est nulle si p est strictement inférieur à q,*

7.3. *la différentielle d_E applique E_p dans l'espace $\sum_{q \geqq p} E_q$,*

7.4. *la différentielle d_E applique E_p^p dans l'espace $\sum_{q>p} E_q$.*

THÉORÈME 7.5. *Soit (E, d_E) une algèbre différentielle satisfaisant aux conditions* 7.1-7.4. *Appelons $\mathfrak{R}_E$ la suite des idéaux R_p égaux à $\sum_{q \geqq p} E_q$. Alors le triplet $(E, d_E, \mathfrak{R}_E)$ est une algèbre différentielle filtrée. L'algèbre bigraduée T est isomorphe à l'algèbre bigraduée E. La différentielle d_T correspond à la différentielle corrigée de E définie de la manière suivante : si x est un élément de E_p, $\bar{d}_E(x)$ est la composante homogène de degré filtrant p de $d_E(x)$. L'algèbre K est isomorphe à l'algèbre $H(E, \bar{d}_E)$ et l'algèbre K_0 est isomorphe à l' algèbre $H(E_0, \bar{d}_E)$. Enfin l'algèbre B est égale à la sous-algèbre $\sum_{p \geqq 0} E_p^p$ de E.*

Pour le démontrer, il suffit de considérer toutes les définitions dans ce cas particulier. On démontre de même le théorème suivant :

THÉORÈME 7.6. *Soit (E, d_E) une algèbre différentielle satisfaisant aux conditions* 7.1-7.4. *Filtrons-la par la suite $\mathfrak{R}_E$. Si l'homomorphisme naturel de*

$H(E_0, \bar{d}_E) \otimes \sum_{p\geqq 0} E_p^p$ dans $H(E, \bar{d}_E)$ est un isomorphisme, la condition F est satisfaite. Si l'espace vectoriel E_1 est nul et si la dimension de $H(E_0, \bar{d}_E)$ est finie, la condition de Hirsch-Koszul est satisfaite. Si l'algèbre $H(E_0, \bar{d}_E)$ contient un sous-space homogène impair P de dimension finie dont l'injection se prolonge en un isomorphisme de l'algèbre extérieure C(P) sur l'algèbre $H(E_0, \bar{d}_E)$ et dont chaque élément homogène de degré p (pour tout p) a un représentant dans E_0 que la différentielle applique dans l'espace vectoriel engendré par E_{p+1}^{p+1} et par $d_E\left(\sum_{i>0} E_i\right)$, alors la condition de Chevalley est satisfaite.

Chapître 2. Cohomologie des X-modules U-gradués.

8. Définitions. Soit V un espace vectoriel gradué de dimension finie v pour lequel V_0 est nul. Considérons l'algèbre symétrique graduée $X(V)$. Un *$X(V)$-module U-gradué* est un $X(V)$-module M qui est gradué pour la structure induite d'espace vectoriel avec la condition :

8.1. *le sous-espace $V^i \cdot M^j$ est contenu dans M^{i+j}.*

Une *$X(V)$-algèbre U-graduée* est une $X(V)$-algèbre qui est une U-algèbre graduée anticommutative pour la structure induite de U-algèbre avec la condition 8.1. Il est possible de munir $X(V)$ d'une structure de $X(V)$-algèbre U-graduée naturelle, en utilisant comme opération externe de $X(V)$-algèbre l'opération interne de $X(V)$.

Soit E un espace vectoriel gradué de dimension finie v. Considérons l'espace vectoriel gradué $V(E)$ pour lequel $V^{i+1}(E)$ et E^i sont égaux pour tout i. Au cours de ce travail, *au lieu d'écrire $X(V(E))$, nous écrirons $X(E)$*. Soit M un $X(E)$-module U-gradué. Considérons l'application suivante d_M de l'espace vectoriel gradué $C(E) \otimes M$ dans lui-même (l'espace vectoriel $C(E)$ est celui de l'algèbre extérieure de E, gradué à partir de la graduation de E) :

8.2. *si $e_1, e_2, \cdots, e_n$ sont des éléments de E, si m appartient à M, alors $d_M(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \otimes m)$ est égal à $\sum_{1\leqq i\leqq n} (-1)^{i+1}\, e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \hat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_n \otimes e_i \cdot m$.*

Il est aisé de vérifier que $(C(E) \otimes M, d_M)$ est un espace vectoriel différentiel.

Remarquons que si E est un espace vectoriel impair et M une $X(E)$-algèbre U-graduée, alors d_M est une différentielle de l'algèbre graduée anticommutative $C(E) \otimes M$.

Dans tous les cas, on peut munir l'espace vectoriel gradué $C(E) \otimes M$ d'une autre graduation intéressante, indiquée par un indice inférieur, en introduisant sur E la graduation où E et E_1 sont égaux et sur M celle où M et M_0 sont égaux. Pour cette graduation, l'application d_M est de degré -1. Puisque

$C(E) \otimes M$ est bigradué, nous obtenons un espace vectoriel de cohomologie bigradué $H(M)$. Remarquons en outre:

8.3. *si r est strictement supérieur à la dimension de E, alors l'espace vectoriel $H_r(M)$ est nul.*

D'autre part $(C(E)\otimes M)_0$ est égal à $1\otimes M$ et $(C(E)\otimes M)_1$, à $E\otimes M$, que d_M applique sur $1\otimes E\cdot M$, qui est égal à $1\otimes X^+(E)\cdot M$. Par conséquent,

8.4. *l'espace vectoriel $H_0(M)$ est isomorphe au quotient $M/X^+(E).M$.*

Soient E' et E'' deux espaces vectoriels gradués de dimensions finies et M' et M'',un $X(E')$-modules et un $X(E'')$-module U-gradués. Appelons E la somme directe gradués de E' et de E''. Il existe un isomorphisme naturel des espaces vectoriels bigradués $C(E)$ et $C(E')\otimes C(E'')$ et un isomorphisme naturel des algèbres graduées $X(E)$ et $X(E')\otimes X(E'')$ (dans cette dernière la multiplication est définie classiquement et non pas comme le premier chapître pourrait le faire croire: $(a\otimes b)\cdot(c\otimes d)$ est égal à $a\cdot c\otimes b\cdot d$). Grâce à cet isomorphisme il est possible de donner à l'espace vectoriel gradué M égal à $M'\otimes M''$ une structure intéressante de $X(E)$-module U-gradué: par définition on aura $(x'\otimes x'')\cdot(m'\otimes m'')$ égal à $x'\cdot m'\otimes x''\cdot m''$. Grâce aux isomorphismes mentionnés, il est aisé de vérifier que les espaces vectoriels différentiels suivants sont isomorphes: $(C(E)\otimes M, d_M)$ et $(C(E'))\otimes M', d_{M'})\otimes(C(E'')\otimes M'', d_{M''})$. Désignons par $M'\hat{\otimes} M''$, le $X(E)$-module U-gradué M. Pour la cohomologie, on démontre immédiatement le lemme suivant:

LEMME 8.5. *Si M' est un $X(E')$-module U-gradué et M'', un $X(E'')$-module U-gradué, alors pour tout couple (p, q), les espaces vectoriels $H^p_q(M'\hat{\otimes} M'')$ et $\sum_{\substack{p'+p''=p\\ q'+q''=q}} H^{p'}_{q'}(M')\otimes H^{p''}_{q''}(M'')$ sont isomorphes.*

Tout espace vectoriel gradué M peut être considéré comme un $X(E)$-module U-gradué avec E nul. La différentielle d_M est alors nulle. Donc si M est un espace vectoriel gradué et N, un $X(E)$-module U-gradué, alors $M\hat{\otimes} N$ est aussi un $X(E)$-module U-gradué et pour tout couple (p, q), les espaces vectoriels $H^p_q(M\hat{\otimes} N)$ et $\sum_{p'+p''=p} M^{p'}\otimes H^{p''}_q(N)$ sont isomorphes.

Considérons maintenant $X(E)$, $X(E')$ et $X(E'')$ comme des $X(E)$, $X(E')$ et $X(E'')$-modules U-gradués respectivement. Pour ces structures, $X(E)$ et $X(E')\hat{\otimes} X(E'')$ sont isomorphes. D'autre part, si F est un espace vectoriel de dimension 1, les $H^p_q(X(F))$ sont tous nuls, excepté $H^0_0(X(F))$ qui est de dimension 1. Une démonstration simple utilisant ces remarques et le lemme 8.5 démontre par induction sur la dimension de E, le lemme suivant:

LEMME 8.6. *Les espaces vectoriels $H^p_q(X(E))$ sont tous nuls, excepté $H^0_0(X(E))$ qui est de dimension* 1.

9. Premiers résultats. Voici un théorème qui va nous permettre de déduire quelques premiers résultats de ce chapître.

THÉORÈME 9.1. *Soit une suite exacte de $X(E)$-modules U-gradués* $0 \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow 0$; *on peut définir pour tout entier s une suite de la forme suivante*: $0 \longrightarrow H_s^0(P) \longrightarrow \ldots \longrightarrow H_{s-i}^i(P) \longrightarrow H_{s-i}^i(Q) \longrightarrow H_{s-i}^i(R) \longrightarrow H_{s-i-1}^{i+1}(P) \longrightarrow \ldots \longrightarrow H_0^s(R) \longrightarrow 0$.

En effet on a la suite suivante exacte d'espaces vectoriels différentiels et bigradués :

$$0 \longrightarrow (C(E) \otimes P, d_P) \longrightarrow (C(E) \otimes Q, d_Q) \longrightarrow (C(E) \otimes R, d_R) \longrightarrow 0.$$

La suite exacte de cohomologie donne le résultat énoncé, puisque les différentielles sont de degré $+1$ pour la graduation supérieure et -1 pour la graduation inférieure.

Soit M' un sous-espace vectoriel homogène supplémentaire de $X^+(E) \cdot M$ dans M. L'espace vectoriel M' est donc isomorphe à l'espace vectoriel $H_0(M)$. Considérons l'homomorphisme naturel du $X(E)$-module U-gradué $X(E) \hat{\otimes} M'$ dans M et appelons M'' le $X(E)$-module U-gradué noyau de cet homomorphisme. Nous obtenons une suite exacte de $X(E)$-modules U-gradués : $0 \longrightarrow M'' \longrightarrow X(E) \hat{\otimes} M' \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Les lemmes 8.5 et 8.6 et le théorème 9.1 nous donnent alors les résultats suivants pour la cohomologie de M''.

LEMME 9.2. *Pour tout q strictement positif et pour tout p les espaces vectoriels* $H_q^p(M)$ *et* $H_{q-1}^{p+1}(M'')$ *sont isomorphes.*

Ce lemme et le fait que les espaces $H_r(M)$ sont tous nuls pour strictement supérieur à la dimension de E permettent des démonstrations par induction, comme nous le verrons (théorèmes 9.4 et 9.6). D'autre part le choix de M' ne se fait pas d'une manière biunivoque. A ce propos voici un lemme :

LEMME 9.3. *Soit f un morphisme de $X(E)$-modules U-gradués de M dans N, déterminant un monomorphisme f^* de $H(M)$ dans $H(N)$. On peut choisir M' et N' de telle manière que f applique M' dans N'.*

Choisissons M'. Ceci étant, puisque f^* est un monomorphisme, l'intersection de $f(M')$ et de $X^+(E) \cdot N$ est nulle. Il est donc toujours possible de choisir N' contenant $f(M')$. En fait, il suffit de supposer que f^* induit un monomorphisme de $H_0(M)$ dans $H_0(N)$.

THÉORÈME 9.4. *Soit f un morphisme de $X(E)$-modules U-gradués de M dans N, determinant un isomorphisme f^* de $H(M)$ sur $H(N)$. L'homomorphisme f est alors un isomorphisme.*

On le démontre par induction sur p, pour les $X(E)$-modules U-gradués M dont les espaces $H_r(M)$ sont nuls si r est strictement supérieur à p. Le théorème est démontré par le cas où p est égal à la dimension de E. Si p est égal à -1, les espaces M et N sont nuls et l'isomorphisme est trivial.

Le passage de $p-1$ à p se fait par l'intermédiaire des $X(E)$-modules U-gradués M'' et N''. En utilisant des espaces M' et N' donnés par le lemme 9.3, on peut construire un homomorphisme g de M'' dans N''. La suite exacte de cohomologie du théorème 9.1 démontre que l'homomorphisme g^* est lui aussi un isomorphisme. L'hypothèse inductive démontre donc que g est un isomorphisme. Par suite l'homomorphisme f est aussi un isomorphisme.

Supposons maintenant l'espace vectoriel de M presque fini, autrement dit les M^p sont tous de dimension finie. Si P est un espace vectoriel gradué fini, on désigne par $P(x)$ la série formelle, dite de Poincaré, dont le coefficient de x^p est égal à la dimension de P^p. Considérons la série formelle suivante (v est la dimension de l'espace E):

9.5. $U(x,y) = \sum_{0 \leqq z \leqq v} y^z H_z(M)(x).$

THÉORÈME 9.6. *Si M est un $X(E)$-module U-gradué presque fini, les séries $H(M)(x)$ et $U(x,1)$ sont égales et les séries $M(x)$ et $X(E)(x)\cdot U(x, -x)$ sont égales.*

La premiére égalité est immédiate. On démontre la deuxième par induction pour les $X(E)$-modules U-gradués presque finis dont les espaces $H_z(M)$ sont nuls si z est strictement supérieur à p. Le théorème est démontré par le cas où p est égal à la dimension de E. Si p est égal à -1, l'espace M est nul et l'égalité est triviale.

Le passage de $p-1$ à p se fait par l'intermédiaire du $X(E)$-module U-gradué presque fini M''. D'après l'hypothèse inductive, les séries $M''(x)$ et $X(E)(x)\cdot U''(x, -x)$ sont égales. D'après le lemme 9.2, les séries $U(x,y) - H_0(M)(x)$ et $y/x\cdot U''(x,y)$ sont égales. Enfin les séries $M''(x) + M(x)$ et $X(E)(x)\cdot H_0(M)(x)$ sont égales. La conclusion est alors immédiate.

10. Les X-algèbres U-graduées. La fin de ce chapître va être consacrée à l'étude des $X(E)$-algèbres U-graduées unitaires, E étant un espace vectoriel gradué impair. Soit M une telle algèbre; nous supposerons en outre que la dimension de M^0 est égale à 1. Nous savons que $(C(E) \otimes M,\ d_M)$ est une algèbre différentielle.

Appelons x_M l'homomorphisme de $X(E)$ dans M qui à x fait correspondre $x\cdot 1$. Puisque la différentielle d_M est nulle sur $1 \otimes M$, l'injection de M dans $C(E) \otimes M$ détermine un homomorphisme y_M de M dans $H(M)$ qui est égal à $H(C(E) \otimes M,\ d_M)$. Enfin puisque d_M applique $C(E) \otimes M$ dans $C(E) \otimes M^+$ et que M^0 est de dimension 1, la projection p_M de $C(E) \otimes M$ sur $C(E)$ détermine un homomorphisme z_M de $H(M)$ dans $C(E)$. L'application z_M est de degré 0 pour les deux graduations. Les applications x_M, y_M, z_M sont des homomorphismes pour les structures d'algèbres.

Nous appliquerons les résultats de ce chapître aux algèbres de Chevalley grâce au théorème suivant, dont la démonstration n'est que la transcription des résultats des paragraphes 4 et 5. Utilisons les notations de ces paragraphes.

THÉOREME 10.1. *Soit* $(E, d_E, \mathfrak{R}_E)$ *une algèbre de Chevalley. Supposons que la sous-algèbre* F *de* K *est isomorphe à* K_0. *Soit* w *une transgression de* P *dans* B. *La dimension de* B^0 *est alors égale à* 1 *et l'homomorphisme* w *se prolonge en un homomorphisme de* $X(P)$ *dans* B, *qui donne à* B *une structure de* $X(P)$*-algèbre* U*-graduée unitaire. Si la différentielle* d_E *est nulle sur l'algèbre* B, *alors il existe un isomorphisme* b *de l'algèbre de cohomologie de la* $X(P)$*-algèbre* U*-graduée (avec la graduation supérieure) sur l'algèbre graduée* $H(E, d_E)$, *tel que l'homomorphisme de* B *dans* $H(E, d_E)$ *dû à l'injection de* B *dans* E *soit égal au composé* $b \circ y_B$ *et tel que l'homomorphisme composé de l'homomorphisme naturel* q *de* $H(E, d_E)$ *dans* K_0 *et de l'isomorphisme de* K_0 *sur* $C(P)$ *soit égal au composé* $z_B \circ b^{-1}$.

Revenons maintenant à la théorie générale. Voici un corollaire du théorème 9.4.

THÉORÈME 10.2. *Si* M *est une* $X(E)$*-algèbre* U*-graduée unitaire ayant une cohomologie triviale* ($H_q^p(M)$ *est nul excepté* $H_0^0(M)$ *qui est de dimension* 1), *alors l'homomorphisme* x_M *est un isomorphisme de* $X(E)$ *sur* M.

En effet l'homomorphisme x_M est un morphisme de $X(E)$ - algèbres U-graduées. Il détermine un homomorphisme x_M^* de $H(X(E))$ dans $H(M)$. La classe de l'unité étant appliquée sur la classe de l'unité, cet homomorphisme est un isomorphisme. Le théorème 9.4 en déduit l'isomorphisme.

Nous allons étudier la suite suivante:

$$X(E) \xrightarrow{x_M} M \xrightarrow{y_M} H(M) \xrightarrow{z_M} C(E).$$

THÉORÈME 10.3. *Le noyau* J_M *de* y_M *est égal à* $X^+(E)$. M *et l'image de* y_M *est égale à* $H_0(M)$.

En effet les cocycles de $(C(E) \otimes M)_0$ sont les éléments de $1 \otimes M$; par conséquent y_M est un épimorphisme de M sur $H_0(M)$. La démonstration de la formule 8.4 en donne le noyau.

THÉORÈME 10.4. *L'image* C_M *de* $H(M)$ *dans* $C(E)$ *par l'homomorphisme* z_M *a une structure d'algèbre extérieure. L'injection dans* C_M *de l'intersection de* C_M *et de* E *se prolonge en isomorphisme de l'algèbre extérieure de cette intersection sur* C_M.

Munissons le corps de base U d'une structure de $X(E)$-algèbre U-graduée triviale et considérons la suite exacte suivante de $X(E)$-algèbres U-graduées: $0 \longrightarrow M^+ \longrightarrow M \longrightarrow U \longrightarrow 0$. Il en découle une suite exacte de cohomologie: $\cdots \longrightarrow H(M) \xrightarrow{z_M} C(E) \longrightarrow H(M^+) \longrightarrow \cdots$. L'image C_M est donc le noyau de l'homomorphisme suivant de $C(E)$ dans $H(M)$: à un élément x de $C(E)$ correspond la classe dans $H(M^+)$ du cocycle $d_M(x \otimes 1)$. Appelons h cette application.

L'algèbre extérieure en question est contenue dans C_M. Démontrons que C_M

y est contenue. Pour les degrés 0 et 1, la proposition est évidente. Le passage de $p-1$ à p se fera grâce au lemme évident suivant:

LEMME 10.5. *Soient x un élément de E, y et z deux éléments de la sous-algèbre de $C(E)$ engendrée par un supplémentaire de l'espace vectoriel engendré par x dans E. Si l'élément $x \wedge y + z$ appartient au noyau de h, l'élément y appartient au noyau de h.*

Soit une base de E: $e_1, e_2, \cdots, e_v$ telle que l'intersection de E et de C_M soit engendrée par les éléments $e_{m+1}, \cdots, e_v$. Soit p supérieur ou égal à 2 et faisons le passage de $p-1$ à p. Ecrivons un élément c de $C_p(E)$ appartenant au noyau de h sous la forme suivante:

$$c = \sum_{1 \leqq j_1 \leqq \cdots \leqq j_p \leqq v} c(j_1, j_2, \cdots, j_p) e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}.$$

On peut écrire cet élément sous la forme suivante pour tout k:

$$c = e_k \wedge \Big(\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < k < \cdots < j_{p-1} \leqq v} \pm c(j_1, \cdots, j_2, k, j_{i+1}, \cdots, j_{p-1}) \cdot e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{p-1}} \Big)$$
$$+ \Big(\sum_{1 \leqq g_1 < \cdots < k < \cdots < g_p \leqq v} c(g_1, g_2, \cdots, g_p) \cdot e_{g_1} \wedge \cdots \wedge e_{g_p} \Big),$$

Le lemme 10.5 et l'hypothèse inductive démontrent à partir de cette forme, que dans la première façon d'écrire c on peut supposer j_2 strictement supérieur à m. Cette conclusion, le lemme 10.5 et l'hypothèse inductive à nouveau démontrent que j_1 lui-même peut être supposé strictement supérieur à m, ce que nous voulions démontrer.

11. Un théorème de réduction. Soit à nouveau une $X(E)$-algèbre U-graduée unitaire M. Remarquons que l'injection de M dans $C(E) \otimes M$ donne à $C(E) \otimes M$ et à $H(M)$ des structures naturelles de M-modules.

D'autre part soit x un élément de E de degré s. Cet élément engendre un espace vectoriel E'' dans E. Soit E' un espace vectoriel homogène de dimension $v-1$ supplémentaire de E'' dans E. L'injection naturelle de $X(E')$ dans $X(E)$ permet de donner à M une structure de $X(E')$-algèbre U-graduée. Quant à l'injection de $C(E')$ dans $C(E)$, elle induit un M-homomorphisme du M-module différentiel $(C(E') \otimes M, d'_M)$ dans le M-module différentiel $(C(E) \otimes M, d_M)$. Le quotient est égal au produit tensoriel de $(E'', 0)$ et de $(C(E') \otimes M, d'_M)$. On obtient donc une suite exacte de cohomologie:

$$\begin{tikzcd} H'(M) \arrow[rr, "p"] & & H(M) \arrow[dl, "q"] \\ & H'(M) \arrow[ul, "r"] & \end{tikzcd}$$

Pour la graduation inférieure, ces homomorphismes p, q et r sont de degré $0, -1$

et 0 et pour la graduation supérieure 0, $-s$ et $s+1$. Ce sont tous des M-homomorphismes et p et r sont des homomorphismes pour les structures multiplicatives. L'homomorphisme r est donc nul, si l'image de l'unité est nulle, autrement dit si la différentielle d_M applique $x \otimes 1$ dans $X^+(E')\cdot M$. Nous avons donc démontré le lemme suivant:

LEMME 11.1. *Si x est un élément de E que x_M applique dans $X(E')\cdot M$, alors il existe des suites exactes de M-modules du type suivant*:
$0 \longrightarrow H'^p_q(M) \longrightarrow H^p_q(M) \longrightarrow H'^{p-s}_{q-1}(M) \longrightarrow 0.$

La condition du lemme est en particulier satisfaite pour un élément appartenant à l'intersection de E et de C_M. En effet x_M applique x dans $X^+(E)\cdot M^+$ qui est égal à $X^+(E')\cdot M^+$ en degré s. En appliquant le lemme 11.1 un nombre suffisant de fois, on démontre le théorème suivant:

THÉORÈME 11.2. *Soit M une $X(E)$-algèbre U-graduée unitaire. Appelons $\widehat{E}$ l'intersection de E et de C_M et $\overline{E}$ un supplémentaire homogène de $\widehat{E}$ dans E. Considérons également la structure de $X(\overline{E})$-algèbre U-graduée de M. L'homomorphisme naturel de $\overline{H}(M)$ dans $H(M)$ est alors un monomorphisme qui peut être prolongé en un isomorphisme d'espaces vectoriels bigraduées de $\overline{H}(M) \otimes C_M$ sur $H(M)$.*

Puisque les espaces vectoriels $\overline{H}_0(M)$ et $H_0(M)$ sont isomorphes, il est intéressant de savoir quand les espaces vectoriels $\overline{H}(M)$ et $\overline{H}_0(M)$ sont isomorphes, pour pouvoir utiliser les résultats du théorème 9.6. Désignons par $C_M(x,y)$ la série formelle òu le coefficient de x^my^n est égal à la dimension de $(C_M)^m_n$.

THÉORÈME 11.3. *Soit M une $X(E)$-algèbre U-graduée unitaire. Si l'idéal de $H(M)$ engendré par $y_M(M^+)$ est égal au noyau de z_M, les espaces vectoriels bigradués $H_0(M) \otimes C_M$ et $H(M)$ sont isomorphes. Si M est une algèbre presque finie, cette condition est également nécessaire et, si elle a lieu, les séries suivantes sont égales*:

$$H(M)(x) = [M(x)/X(E)(x)] \cdot [C_M(x,1)/C_M(x,-x)].$$

On démontre la suffisance de la condition de la manière suivante. D'après le théorème précédent, il suffit de démontrer que les espaces vectoriels $\overline{H}(M)$ et $\overline{H}_0(M)$ sont isomorphes. Le noyau de z_M contient toujours l'image de $\overline{H}_+(M)$; par suite les espaces vectoriels bigradués $\overline{H}^+_0(M)\cdot\overline{H}(M)$ et $\overline{H}^+(M)$ sont égaux. Mais si p est strictement positif, les espaces $\overline{H}^+_p(M)$ et $\overline{H}_p(M)$ sont égaux; par conséquent $\overline{H}_p(M)$ est nul.

Les formules du théorème 9.6 démontrent directement la formule du théorème 11.3. Quant à la nécessité de la condition, on la constate de la façon qui suit. Le lemme 11.1 démontre que l'espace vectoriel $M^+\cdot H'^p_q(M)+M^+\cdot H'^{p-s}_{q-s}(M)$ est isomorphe à un sous-espace de $M^+\cdot H^p_q(M)$. Par conséquent l'ideal de

$H(M)$ engendré par l'image de M^+ a une série qui majore la série $M^+\cdot\bar{H}(M)(x,y)$ $\cdot C_M(x,y)$, c'est-à-dire la série $H_0^+(M)(x)\cdot H_0(M)(x)\cdot C_M(x,y)$ ou encore la série $H_0^+(M)(x)\cdot H_0^+(M)(x)\cdot C_M(x,y)$. D'autre part cet idéal est contenu dans le noyau, dont la série est égale à $H_0(M)(x)\cdot C_M(x,y) - C_M(x,y)$, c'est-à-dire à $H_0^+(M)$ $(x)\cdot C_M(x,y)$. Par conséquent l'idéal en question est égal au noyau.

REMARQUE. En fait on peut démontrer que l'isomorphisme du théorème 11.2 peut être un homomorphisme d'algèbres et qu'alors la condition du théorème 11.3 est toujours nécessaire.

12. Un cas particulier. Supposons maintenant que M a une structure d'algèbre de polynômes $X(F)$, la dimension de F étant finie. Cette algèbre est donc presque finie et les résultats du paragraphe précédent lui sont applicables. Rappelons en premier lieu, un lemme ne faisant pas intervenir cette structure d'algèbre de polynômes et démontré dans le livre Cartan-Eilenberg, Homological Algebra à la page 151.

LEMME 12.1. *Soient un $X(E)$-module U-gradué M et une base de l'espace vectoriel E: $e_1, e_2, \cdots, e_v$, tels que la condition suivante soit satisfaite: appelons $M^{(k)}$ le sous-espace vectoriel de M somme des sous-espaces $e_j\cdot M$ pour j inférieur ou égal à k; alors pour tout k, si $e_k\cdot m$ appartient à $M^{(k)}$, l'élément m y appartient aussi. Sous cette hypothèse, l'espace vectoriel $H(M)$ est alors égal à son sous-espace $H_0(M)$.*

Voici maintenant trois lemmes de géométrie algèbrique.

LEMME 12.2. *Soit G un idéal d'une algèbre de polynômes M. Si pour les structures induites d'espaces vectoriels de M et de G, l'espace quotient M/G est de dimension finie, alors la dimension algèbrique de G dans M est nulle.*

Il suffit de considérer le cas où G est un idéal premier. Puisque M/G est de dimension finie, tout élément de cet anneau est algèbrique sur le corps de base U, par conséquent le corps des quotients de l'anneau M/G est algèbrique sur U, autrement dit la dimension algèbrique de G dans M est nulle.

LEMME 12.3. *Soit G un idéal d'une algèbre de polynômes M à n variables, engendré par p éléments $g_1, g_2, \cdots, g_p$. Supposons la dimension algèbrique de G dans M nulle. Alors p est supérieur ou égal à n, et si p est égal à n, il existe p générateurs de G, $h_1, h_2, \cdots, h_p$, combinaisons linéaires des g_j, tels que pour tout r l'idéal de M engendré par $h_1, h_2, \cdots, h_r$ soit purement de dimension algèbrique $p - r$.*

On connaît le résultat suivant (van der Waerden, Moderne Algebra, volume II, première édition, page 80, deuxième, page 71): si I est un idéal de M différent de M engendré par r éléments $z_1, z_2, \cdots, z_r$ de dimension algèbrique $d \leqq n - r$, alors I est purement de dimension algébrique $n - r$ et il existe r

éléments combinaisons linéaires des z_j, qui engendrent $I, t_1, t_2, \cdots, t_r$ tels que pour tout j l'idéal engendré par $t_1, t_2, \cdots, t_j$ dans M soit de dimension algèbrique inférieure ou égale à $n - j$. La première partie de ce résultat apparaît sous forme de théorème, la seconde apparaît dans la démonstration de ce théorème. Appliquons la première partie du résultat à l'idéal engendré par $t_1, t_2, \cdots, t_j$. Cet idéal est donc purement de dimension algèbrique $n - j$. Le résultat complété de cette manière nous donne la démonstration de la deuxième partie du lemme. D'autre part si p est inférieur ou égal à m, la dimension algèbrique de G dans M doit être égale à $n - p, n$ et p sont alors égaux, ce qui démontre la première partie du lemme.

LEMME 12.4. *Soient G un idéal d'une algèbre de polynômes M, purement de dimension algèbrique k et h un élément de G. Si l'idéal engendré par G et h est de dimension algèbrique strictement inférieure à k, alors pour tout élément m de M, si $h \cdot m$ appartient à G, m appartient à G.*

En effet G est l'intersection d'idéaux primaires I_l associés à des idéaux premiers I_l' de dimension algèbrique k. Aucun I_l' ne peut contenir l'idéal engendré par G et h, autrement dit h n'appartient pas à I_l'. Puisque l'idéal I_l est primaire et que $h \cdot m$ appartient à I_l., l'élément m apparteint à I_l. Par conséquent m est un élément de G.

THÉORÈME 12.5. *Soient deux espaces vectoriels gradués impairs E et F de dimensions finies e et f et une structure de $X(E)$-algèbre U-graduée pour $X(F) = M$. Appelons $\hat{e}$ la dimension de l'intersection de E et de C_M. Supposons la dimension de $H_0(M)$ finie. Alors $e - f$ est supérieur ou égal à $\hat{e}$ et l'égalité a lieu si et seulement si le noyau de z_M est égal à l'idéal de $H(M)$ engendré par $y_M(M^+)$.*

Utilisons un espace $\overline{E}$ comme dans le paragraphe 11 et appliquons les lemmes précédents avec G égal à $X^+(\overline{E}) \cdot M$. Les lemmes 12.2 et 12.3 démontrent que $e - \hat{e}$ est supérieur ou égal à f. Les lemmes 12.2, 12.3, 12.4 et 12.1 démontrent que dans le cas de l'égalité, $\overline{H}(M)$ est égal à $\overline{H}_0(M)$, cette condition étant équivalente à la condition du théorème. (théorème 11.3)

Supposons inversément cette condition satisfaite. Nous pouvons utiliser la formule du théorème 11.3. Toutes les séries convergent pour x entre 0 et 1. Pour x tendant vers 1, le produit de la série de droite par $(1 - x)^{f + \hat{e} - e}$tend vers une limite non nulle. Puisque $H(M)(x)$ est un polynôme à coefficients positifs ou nuls, $(1 - x)^{f + \hat{e} - e}$doit tendre vers une limite non nulle. Par conséquent $f + \hat{e} - e$ est nul, ce qu'il fallait démontrer.

Chapître 3. Opérations et connexions.

13. Opérations. Une *opération* d'une algèbre de Lie L est une paire (E/t), où E est une algèbre graduée anticommutative et t un homomorphisme de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie des dérivations de E de degré 0 (voir le lemme 1.9).

Un morphisme de la représentation (E/t) de L dans la représentation (E'/t') de L est un morphisme f de l'algèbre graduée E dans l'algèbre graduée E' tel que

13.1. *pour tout élément x de L, $f \circ t(x)$ et $t'(x) \circ f$ soient égaux.*

On peut définir le produit tensoriel de deux représentations d'une algèbre de Lie, (E/t) et (E'/t') : c'est la paire $(E \otimes E'/t{*}t')$ où $(t{*}t')(x)$ et $t(x){*}t'(x)$ sont égaux. Le cas particulier où t' est nul, nous permet de définir le produit tensoriel d'une représentation et d'une algèbre graduée anticommutative.

Une *représentation différentielle* d'une algèbre de Lie est un triplet $(E, d/t)$, où (E,d) est une algèbre différentielle et (E/t) une représentation de L avec en outre la condition suivante :

13.2. *pour tout élément x de L, $d \circ t(x)$ et $t(x) \circ d$ sont égaux.*

Un morphisme d'une représentation différentielle $(E, d/t)$ dans une représentation $(E',d'/t')$ de la même algèbre de Lie est un morphisme f de E dans E', qui est un morphisme d'algèbres différentielles de (E,d) dans (E', d') et un morphisme de représentations de (E/t) dans (E'/t').

On peut définir le produit tensoriel de deux représentations différentielles d'une algèbre de Lie, $(E,d/t)$ et $(E', d'/t')$. C'est le triplet $(E \otimes E', d{*}d'/t{*}t')$. Le cas particulier où d' et t' sont nuls permet de définir le produit tensoriel d'une représentation différentielle et d'une algèbre graduée anticommutative.

Une *opération* d'une algèbre de Lie L est un quadruplet $(E, d/t, i)$, où (E, d) est une algèbre différentielle, t une loi qui à chaque x de L fait correspondre une dérivation $t(x)$ de E de degré 0 et i une loi qui à chaque x de L fait correspondre une antidérivation $i(x)$ de E de degré -1, avec les conditions suivantes :

13.3. *les lois t et i sont des homomorphismes de l'espace vectoriel de L dans l'espace vectoriel des homomorphismes de l'espace vectoriel de E dans lui-même,*

13.4. *les dérivations $t(x)$ et $i(x) \circ d + d \circ i(x)$ sont égales,*

13.5. *la dérivation $i(x) \circ i(x)$ est nulle,*

13.6. *les antidérivations $i([x, y])$ et $i(x) \circ t(y) - t(y) \circ i(x)$ sont égales.*

Remarquons que cette structure pourrait être définie en n'utilisant que la loi i. Le triplet $(E, d/t)$ est une représentation différentielle. Un morphisme d'une opération de L $(E, d/t,i)$ dans une opération de L $(E',d'/t',i')$ est un morphisme f de l'algèbre différentielle (E, d) dans l'algèbre différentielle (E', d') tel que

13.7. *les applications $f \circ i(x)$ et $i'(x) \circ f$ soient égales.*

On peut définir le produit tensoriel de deux opérations de L, $(E, d/t, i)$ et $(E', d'/t', i')$: c'est le quadruplet $(E \otimes E'\ d*d'/t*t', i*i')$, où $(i*i')(x)$ et $i(x)*i'(x)$ sont égaux. Le cas particulier où les applications d', t' et i' sont nulles permet de définir le produit tensoriel d'une opération et d'une algèbre graduée anticommutative.

Remarquons que, puisque le carré de $i(x + y)$ est nul

13.8. *l'application* $i(x)\circ i(y) + i(y)\circ i(x)$ *est nulle.*

Soit $(E, d/t, i)$ une opération de L. Les éléments de E annulés par toutes les dérivations $t(x)$, appelés *invariants* forment une sous-algèbre de E, stable par $d : I_E$. Les éléments de E annulés par toutes les antidérivations $i(x)$ forment, eux aussi, une sous-algèbre X_E de E. Les éléments de l'intersection de X_E et de I_E, dits *basiques*, forment également une sous-algèbre de E, stable par $d : B_E$. Les injections de B_E dans I_E et de I_E dans E définissent deux homomorphismes d'algèbres graduées anticommutatives : $H(B_E) \longrightarrow H(I_E) \longrightarrow H(E)$.

Remarquons encore que tout espace vectoriel gradué E, où E^p est nul si p est strictement négatif, a une structure d'algèbre graduée anticommutative, si on définit la multiplication par l'égalité $a\cdot b = 0$. Cette remarque permet de définir sans autre les représentations, les représentations différentielles et les opérations dans le cas vectoriel : chaque fois l'espace vectoriel doit être muni de la multiplication triviale.

14. L'opération fondamentale. Dorénavant l'algèbre de Lie L sera toujours de dimension finie. Considérons maintenant l'espace vectoriel de l'algèbre de Lie L gradué par l'égalité $L = L^1$. L'algèbre extérieure $C(L)$ est l'algèbre des *chaînes* de L. Soit x un élément de L, définissons les endomorphismes suivants de l'espace vectoriel de $C(L)$ pour $x_1, x_2, \cdots, x_n$ appartenant à L :

$$i_{C(L)}(x)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$$

$$t_{C(L)}(x)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1\leq j\leq n} x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{j-1} \wedge [x, x_j] \wedge \cdots \wedge x_n$$

$$d_{C(L)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1\leq j<k\leq n} (-1)^{j+k+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n$$

L'homomorphisme $t_{C(L)}(x)$ est une dérivation de degré 0. Donnons à l'espace vectoriel de $C(L)$ une nouvelle graduation : soit p la dimension de l'espace vectoriel de L et posons $C_{2l-m}(L) = C^m(L)$. Introduisons la multiplication triviale sur ce nouvel espace vectoriel gradué, où le produit de deux éléments est toujours nul, dans ce cas $(C(L), d_{C(L)}/t_{C(L)}, i_{C(L)})$ est une opération de L. Pour la démonstration, je renvoie à la thèse de Koszul (pages 10-13). Sauf exception, il s'agira dorénavant pour $C(L)$ de la première structure d'algèbre graduée anticommutative.

Soit L^* l'espace vectoriel dual de L, gradué par l'égalité $L^{*1} = L^*$. L'algèbre graduée anticommutative $C(L^*)$ est l'algèbre des *cochaînes* de L appelée $A(L)$. Notons par $< l^*, l >$ la fonction bilinéaire de dualité de L et de L^* La fonction définie par $< l_1^* \wedge l_2^* \wedge \cdots \wedge l_n^*,\ l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_n > =$ déterminant $(< l_i^*, l_k >)$ est une fonction bilinéaire de dualité de $A(L)$ et de $C(L)$. On fait opérer L sur $A(L) : (A(L),\ d_{A(L)}/t_{A(L)},\ i_{A(L)})$ où $d_{A(L)},\ t_{A(L)},\ i_{A(L)}$ sont les homomorphismes duaux de $-d_{C(L)}\ -t_{C(L)},\ i_{C(L)}$. Je renvoie également à la thèse de Koszul. (pages 10-13). Le lemme suivant y est aussi démontré.

LEMME 14.1. *Si $y_1, y_2, \cdots, y_l$ sont les éléments d'une base de l'algèbre de Lie L et $y_1', y_2', \cdots, y_l'$, les éléments de la base duale de l'espace dual de L, alors*

$d_{A(L)}$ est égal à $\dfrac{1}{2} \sum\limits_{1 \leq j \leq l} e(y_j') \circ t_{A(L)}(y_j)$.

L'application $e(y)$ d'une algèbre E est la multiplication à gauche dans E par un élément y de E.

Voici pour terminer une notion très importante ; si $(E, d_E/t_E, i_E)$ est une opération de L, une *connexion* est un homomorphisme f de l'algèbre graduée anticommutative $A(L)$ dans l'algèbre graduée anticommutative E, tel que

14.2. *les applications $f \circ i_{A(L)}(x)$ et $i_E(x) \circ f$ soient égales,*

14.3. *les applications $f \circ t_{A(L)}(x)$ et $t_E(x) \circ f$ soient égales.*

15. L'algèbre de Weil. On peut se poser la question suivante : pour une algèbre de Lie L donnée, existe-t-il une opération avec une unité $(W(L),\ d_{W(L)}/t_{W(L)},\ i_{W(L)})$ et une connexion f_0, telles que si $(E, d_E/t_E, i_E)$ est une opération avec une unité et avec une connexion f, il existe un et un seul morphisme g de $(W(L),\ d_{W(L)}/t_{W(L)},\ i_{W(L)})$ dans $(E, d_E/t_E, i_E)$ pour lequel les applications $g \circ f_0$ et f soient égales? La réponse est affirmative (théorème 15.11). Nous allons construire cette opération et l'étudier en détail.

Choisissons une fois pour toutes une base de $L : y_1, y_2, \cdots\cdots, y_l$ et appelons $y_1', y_2', \cdots\cdots, y_l'$ les éléments, de degré 1, de la base duale de l'espace dual L^* de L. D'autre part soit M^* l'espace vectoriel gradué suivant : les espaces vectoriels M^* et L^* sont égaux et M^* est égal à M^{*2}. Puisque L^* est un espace vectoriel gradué impair et M^* un espace vectoriel gradué pair, on peut considérer les algèbres graduées anticommutatives $C(L^*)$, $X(M^*)$ et $C(L^*) \otimes X(M^*)$. La premiére nous est connue, il s'agit de l'algèbre $A(L)$. Nous poserons $X(M^*) = S(L)$ et $C(L^*) \otimes X(M^*) = W(L)$. L'algèbre graduée anticommutative $W(L)$ porte le nom *d'algèbre de Weil*. Remarquons que $W(L)$ est engendrée par $W^0(L)$ isomorphe au corps de base, par $W^1(L)$ égal à $A(L) \otimes 1$ et par $1 \otimes S^2(L)$ contenu dans $W^2(L)$.

Notons par abus de langage $(W(L), d_{A(L)}/t_{A(L)},\ i_{A(L)})$ l'opération produit de l'opération $(A(L),\ d_{A(L)} / t_{A(L)}, i_{A(L)})$ et de l'algèbre graduée anticommutative $S(L)$. Le lemme 14.1 donne la formule suivante :

15.1. $2d_{A(L)} = \sum_{1 \leq k \leq l} e(y'_k \otimes 1) \circ t_{A(L)}(y_k)$.

Faisons usage du lemme 1.10 et appelons $t_{S(L)}(x)$ pour x appartenant à L, la seule dérivation de $W(L)$ nulle sur $A^1(L) \otimes 1$ et définie de la manière suivante sur $1 \otimes S^2(L)$:

15.2. *si x' est un élément de L^*, alors* $t_{S(L)}(x)(1 \otimes x') = 1 \otimes t_{A(L)}(x)(x')$.

Voici d'autre part deux endomorphismes de $W(L)$ pour la structure d'espace vectoriel :

15.3. $d_{S(L)} = \sum_{1 \leq k \leq l} e(y'_k \otimes 1) \circ t_{S(L)}(y_k)$,

15.4. $h_{W(L)} = \sum_{1 \leq k \leq l} i_{A(L)}(y_k) \circ e(1 \otimes y'_k)$.

Remarquons que $h_{W(L)}$ est nul sur $1 \otimes S(L)$. On vérifie aisément que si x' est un élément de L^*, $h_{W(L)}(x' \otimes 1)$ et $1 \otimes x'$ sont égaux. On peut donc écrire la formule 15.2 sous une forme plus pratique :

15.5. *sur $A^1(L)$, les applications $t_{S(L)}(x) \circ h_{W(L)}$ et $h_{W(L)} \circ t_{A(L)}(x)$ sont égales.*

Les endomorphismes $d_{S(L)}$ et $h_{W(L)}$ sont des antidérivations de $W(L)$. En effet si a est un élément de $W^p(L)$ et b de $W^q(L)$, nous avons d'une part les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&(e(y'_k \otimes 1) \circ t_{S(L)}(y_k))(a \cdot b) \\
&= e(y'_k \otimes 1) \circ (t_{S(L)}(y_k)(a) \cdot b + a \cdot t_{S(L)}(y_k)(b)) \\
&= (e(y'_k \otimes 1) \circ t_{S(L)}(y_k))(a) \cdot b + (-1)^p a \cdot (e(y'_k \otimes 1) \circ t_{S(L)}(y_k))(b)
\end{aligned}$$

puisque $a \cdot (y'_k \otimes 1)$ et $(-1)^p (y'_k \otimes 1) \cdot a$ sont égaux et d'autre part les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&(i_{A(L)}(y_k) \circ e(1 \otimes y'_k))\ (a \cdot b) = i_{A(L)}(y_k)\ (e(1 \otimes y'_k)(a) \cdot b) \\
&= (i_{A(L)}(y_k) \circ e(1 \otimes y'_k))\ (a) \cdot b + (-1)^p e(1 \otimes y'_k)\ (a) \cdot i_{A(L)}(y_k)(b) \\
&= (i_{A(L)}(y_k) \circ e(1 \otimes y'_k))(a) \cdot b + (-1)^p a \cdot (i_{A(L)}(y_k) \circ e(1 \otimes y'_k))(b)
\end{aligned}$$

car $1 \otimes y'_k$ est homogène de degré $+2$ et $i_{A(L)}(y_k)$ est nul sur $1 \otimes S(L)$.

Posons $d_{A(L)} + h_{W(L)} + d_{S(L)} = d_{W(L)}$, $t_{A(L)} + t_{S(L)} = t_{W(L)}$ et $i_{A(L)} = i_{W(L)}$.

THÉORÈME 15.6. *Le quadruplet* $(W(L), d_{W(L)}/t_{W(L)}, i_{W(L)})$ *est une opération de L.*

En effet la formule 13.6 est vérifiée puisque les applications $i_{W(L)}(x) \circ t_{S(L)}(y)$ et $t_{S(L)}(y) \circ i_{W(L)}(x)$ sont égales. D'autre part la formule 13.4 sera vérifiée si nous démontrons les égalités suivantes :

15.7. $i_{W(L)}(x) \circ h_{W(L)} + h_{W(L)} \circ i_{W(L)}(x) = 0$,

15.8. $i_{W(L)}(x) \circ d_{S(L)} + d_{S(L)} \circ i_{W(L)}(x) = t_{S(L)}(x)$.

Appliquons le lemme 1.10. Ce sont des égalités de dérivations qu'il suffit de contrôler sur $W^0(L)$, sur $W^1(L)$ et sur $1 \otimes S^2(L)$.

Sur $W^0(L)$, $i_{W(L)}(x)$, $h_{W(L)}$, $d_{S(L)}(x)$ et $t_{S(L)}(x)$ sont nuls. Puisque $h_{W(L)}$ et $i_{W(L)}(x)$ sont nuls sur $1 \otimes S^2(L)$, l'égalité 15.7 est satisfaite sur $1 \otimes S^2(L)$. L'antidérivation $h_{W(L)}$ applique $A^1(L) \otimes 1$ dans $1 \otimes S^2(L)$ et $i_{W(L)}(x)$ applique $A^1(L) \otimes 1$ dans $W^0(L)$, l'égalité est par suite satisfaite sur $A^1(L) \otimes 1$. Sur $A^1(L) \otimes 1$, les applications $d_{S(L)}$ et $t_{S(L)}(x)$ sont nulles, l'égalité 15.8 est donc satisfaite sur $A^1(L) \otimes 1$. Il reste à démontrer que sur $1 \otimes S^2(L)$, les applications $i_{W(L)}(x) \circ d_{S(L)}$ et $t_{S(L)}(x)$ sont égales. Il suffit de remarquer que $t_{S(L)}(x)$ est égale à la somme

$$\sum_{1 \leq k \leq l} i_{W(L)}(x)(y'_k \otimes 1) \cdot t_{S(L)}(y_k),$$

puisque la somme $\sum_{1 \leq k \leq l} i_{A(L)}(x)(y'_k) \cdot y_k$ est égale à x.

Il faut encore démontrer que $d^2_{W(L)}$ est nul; sur $A(L) \otimes 1$, $d^2_{W(L)}$ est égal à $d_{W(L)} \circ h_{W(L)} + h_{W(L)} \circ d_{A(L)}$. Plus particulièrement, $d^2_{W(L)}$ est égal à $d_{S(L)} \circ h_{W(L)} + h_{W(L)} \circ d_{A(L)}$ sur $A^1(L) \otimes 1$. Ainsi $d^2_{W(L)}$ applique $A^1(L) \otimes 1$ dans $A^1(L) \otimes S^2(L)$. Par conséquent $d^2_{W(L)}$ est nul sur $A^1(L) \otimes 1$ si pour tout y de L,$i_{W(L)}(y) \circ d^2_{W(L)}$ est nul sur $A^1(L) \otimes 1$. Mais $i_{W(L)}(y) \circ (d_{S(L)} \circ h_{W(L)} + h_{W(L)} \circ d_{A(L)})$ est égal à $t_{S(L)}(y) \circ h_{W(L)} - d_{S(L)} \circ i_{W(L)}(y) \circ h_{W(L)} - h_{W(L)} \circ i_{W(L)}(y) \circ d_{A(L)}$ en vertu des formules 15.7 et 15.8 ou encore à $t_{S(L)}(y) \circ h_{W(L)} + d_{S(L)} \circ h_{W(L)} \circ i_{W(L)}(y) - h_{W(L)} \circ t_{A(L)}(y) + h_{W(L)} \circ d_{A(L)} \circ i_{W(L)}(y)$ c'est-à- dire à

$(t_{S(L)}(y) \circ h_{W(L)} - h_{W(L)} \circ t_{A(L)}(y)) + (d_{S(L)} \circ h_{W(L)} + h_{W(L)} \circ d_{A(L)}) \circ i_{W(L)}(y)$.

Le premier terme est nul sur $A^1(L) \otimes 1$ d'après la formule 15.5 et le second est nul sur $A^1(L) \otimes 1$, car $i_{W(L)}(y)$ applique $A^1(L) \otimes 1$ dans $W^0(L)$. Ainsi $d^2_{W(L)}$ est nul sur $A^1(L) \otimes 1$, donc sur $A(L) \otimes 1$. Notons la formule suivante:

15.9. *sur* $A(L) \otimes 1$, *l'application* $d_{W(L)} \circ h_{W(L)} + h_{W(L)} \circ d_{A(L)}$ *est nulle.*

Pour terminer la démonstration du théorème, il faut encore démontrer que $d^2_{W(L)}$ est nul sur $1 \otimes S^2(L)$, autrement dit que $d^2_{W(L)} \circ h_{W(L)}$ est nul sur $A^1(L) \otimes 1$. Utilisons la formule 15.9. Sur $A^1(L) \otimes 1$, cette applicaton est égale à $-d_{W(L)} \circ h_{W(L)} \circ d_{A(L)}$ ou encore à $h_{W(L)} \circ d^2_{A(L)}$ qui est nul.

Voici un lemme qui sera très utile par la suite.

LEMME 15.10. *Sur* $I_{W(L)}$, *la differentille* $d_{W(L)}$ *est égale à* $-d_{A(L)} + h_{W(L)}$.

Pour le démontrer, il suffit de vérifier l'égalité suivante qui resulte des égalités 15.1 et 15.3:

$$2d_{A(L)} + d_{S(L)} = \sum_{1 \leq k \leq l} e(y'_k \otimes 1) \circ t_{W(L)}(y_k).$$

Enfin voici le théorème donnant la solution du problème universel posé au début de ce paragraphe. Notons que nous utiliserons la structure précise de l'algèbre $W(L)$ et qu'il est important qu'elle soit presque finie.

THÉORÈME 15.11. *Soit une opération avec unité de L*, $(E, d_E/t_E, i_E)$. *Toute* *connexion f de cette opération peut être prolongée en un morphisme $g(f)$ de l'opération $(W(L), d_{W(L)}/t_{W(L)}, i_{W(L)})$ dans l'opération $(E, d_E/t_E, i_E)$.*

Utilisons le lemme 1.11 et définissons $g(f)$ comme étant l'unique homomorphisme de $W(L)$ dans E satisfaisant aux conditions suivantes : si a est un élément de $A(L)$, les éléments $g(f)(a \otimes 1)$ et $f(a)$ sont égaux et si b est un élément de $A^1(L)$, les éléments $g(f)(h_{W(L)}(b \otimes 1))$ et $(-f \circ d_{A(L)} + d_E \circ f)(b)$ sont égaux, ce qui définit $g(f)$ sur $1 \otimes S^2(L)$. On peut donc écrire la formule suivante :

15.12. *sur $A^1(L) \otimes 1$, les applications $g(f) \circ h_{W(L)}$ et $-g(f) \circ d_{A(L)} + d_E \circ g(f)$ sont égales.*

Démontrons l'égalité de $g(f) \circ i_{W(L)}(x)$ et de $i_E(x) \circ g(f)$ pour tout x de L. En vertu du lemme 1.10, le contrôle sur $A^1(L) \otimes 1$ et sur $1 \otimes S^2(L)$ est suffisant. Sur $A^1(L) \otimes 1$, il s'agit de la propriété 14.3 de la connexion f. Sur $1 \otimes S^2(L)$, c'est-à-dire sur $h_{W(L)}(A^1(L) \otimes 1)$, $i_{W(L)}(x)$ est nul et sur $A^1(L) \otimes 1$ $i_E(x) \circ g(f) \circ h_{W(L)}$ est égal à $-i_E(x) \circ g(f) \circ d_{A(L)} + i_E(x) \circ d_E \circ g(f)$, c'est-à-dire à $-g(f) \circ i_{W(L)}(x) \circ d_{A(L)} + t_E(x) \circ g(f) - d_E \circ i_E(x) \circ g(f)$ en vertu des formules 14.3 et 13.4, puisque $d_{A(L)}$ applique $A^1(L) \otimes 1$ dans $A(L) \otimes 1$. Toujours sur $A(L) \otimes 1$, ceci est égal à $-g(f) \circ t_{A(L)}(x) + g(f) \circ d_{A(L)} \circ i_{W(L)}(x) + t_E(x) \circ g(f) - d_E \circ g(f) \circ i_{W(L)}(x)$ ou encore à $(-d_E \circ g(f) + g(f) \circ d_{A(L)}) \circ i_{W(L)}(x)$ qui est nul sur $A^1(L) \otimes 1$ car $g(f) \circ d_{A(L)} - d_E \circ g(f)$ est nul sur $W^0(L)$. En effet $d_{A(L)}$ est nul sur $W^0(L)$ et $d_E(1)$ étant nul, $d_E \circ g(f)$ est nul sur $W^0(L)$.

Il faut encore démontrer que $g(f) \circ d_{W(L)}$ et $d_E \circ g(f)$ sont égaux. Sur $A(L) \otimes 1$, la différentielle $d_{W(L)}$ est égale à $d_{A(L)} + h_{W(L)}$. Par conséquent sur $A(L) \otimes 1$, l'application $g(f) \circ d_{W(L)} - d_E \circ g(f)$ est égale à $g(f) \circ d_{A(L)} + g(f) \circ h_{W(L)} - d_E \circ g(f)$. En vertu de la formule 15.12, ceci est nul sur $A^1(L) \otimes 1$. Par conséquent, grâce au lemme 1.10, les applications $g(f) \circ d_{W(L)}$ et $d_E \circ g(f)$ sont égales sur $A(L) \otimes 1$ et la formule 15.12 est généralisée à $A(L) \otimes 1$. D'autre part calculons sur $A^1(L) \otimes 1$ l'application $g(f) \circ d_{W(L)} \circ h_{W(L)} - d_E \circ g(f) \circ h_{W(L)}$. Elle y est égale à $-g(f) \circ h_{W(L)} \circ d_{A(L)} + d_E \circ g(f) \circ d_{A(L)}$ d'après les égalités 15.9 et 15.12 ou encorc à 0 en vertu de la formule 15.12 généralisée. Par conséquent $g(f) \circ d_{W(L)}$ et $d_E \circ g(f)$ sont égaux sur $A^1(L) \otimes 1$ et sur $1 \otimes S^2(L)$, ils le sont encore sur $W(L)$ d'après le lemme 1.10. La démonstration est donc achevée.

16. Premier exemple d'opération. Un espace *fibré principal* F est une variété indéfiniment différentiable, où opère un groupe de Lie avec les propriétés suivantes :

16.1. *le groupe G est connexe,*

16.2. *l'application $(P, s) \longrightarrow Ps$ du produit de F et de G dans F est indéfiniment différentiable,*

16.3. *les points $(Ps)t$ et $P(st)$ sont identiques,*

16.4. *le groupe G est simplement transitif dans chaque classe d'équivalence,* 16.5. *l'espace de base est indéfiniment différentiable,*

16.6. *chaque point de la base possède un voisinage ouvert V tel que l'image réciproque de V dans F soit pour la structure induite de variété indéfiniment différentiable isomorphe au produit des variétés V et G, la transformation définie par un élément s de G étant la suivante*: $(v,g)s = (v, gs)$.

Appelons E l'algèbre extérieure graduée anticommutative des formes différentielles à coefficients indéfiniment différentiables de l'espace fibré F. Comme pour toute variété indéfiniment différentiable, on sait faire opérer sur E l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à coefficients indéfiniment différentiables de F. La différentielle est alors la différentiation extérieure.

On peut plonger l'algèbre de Lie L de G (champs de vecteurs tangents de G invariants à gauche) dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents de F. Cette injection permet de faire opérer L sur E. L'injection mentionnée ci-dessus se fait de la manière suivante: on le fait en premier lieu sur les images réciproques des ouverts V rencontrés sous le chiffre 16.6 en utilisant l'isomorphisme de celles-ci avec les produits $V \times G$. Puis il faut vérifier que si U et V sont deux ouverts dont l'intersection n'est pas vide, les résultats concordent sur l'image réciproque de l'intersection de U et de V. Cette image réciproque est isomorphe à $(U \cap V) \times G$ de deux manières une fois par l'intermédiaire de U, une autre fois par l'intermédiaire de V. L'isomorphisme de $(U \cap V) \times G$ sur lui-même étant compatible avec l'opération du groupe G est alors de la forme suivante: $(v, g) \longrightarrow (v, ag)$, a étant un élément de G ne dépendant que de v. Puisque les champs de vecteurs tangents de L sont invariants à gauche, un isomorphisme de cette espèce laisse invariante l'injection de L dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents de $(U \cap V) \times G$.

Les éléments de I_E sont les éléments de E invariants par G et les éléments de B_E correspondent aux formes différentielles de la base. On le vérifie grâce à la condition 16.6 sur des morceaux isomorphes à $V \times G$, qui ramènent le problème au cas où F est égal à G. La supposition G connexe est indispensable. Notons le théorème suivant:

THÉORÈME 16.7. *L'opération $(E, d_E/t_E, i_E)$ d'un espace fibré principal possède au moins une connexion.*

Voir la conférence d'Ehresmann au colloque de topologie algèbrique de Bruxelles en 1950.

Cet exemple sera désigné dorénavant par: l'exemple des fibrés principaux.

17. Deuxième exemple d'opération. Soit L une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie L'. Pour distinguer L' de L, on utilisera le signe$'$ pour désigner ce qui se rapporte à L': représentations, représentations différentielles, opérations. Remarquons que si $(E, d_E/t'_E, i'_E)$ est une opération de L', alors $(E, d_E/t_E, i_E)$, où t_E et i_E sont les restrictions à L de t'_E et de i'_E, est une opération de L. On a un résultat analogue pour les représentations différentielles ou non. L'opération constituant ce deuxième exemple est $(A(L'), d_{A(L')}/t_{A(L')}, i_{A(L')})$ de l'algèbre de Lie L.

THÉORÈME 17.1. *L'opération $(A(L'), d_{A(L')}/t_{A(L')}, i_{A(L')})$ posséde au moins une connexion si et seulement si l'espace vectoriel de L a un supplémentaire N dans L' tel que $[L, N]$ soit contenu dans N.*

En effet donner une connexion de cette opération est équivalent à donner un homomorphisme k de l'espace vectoriel de L' dans l'espace vectoriel de L tel que, si x est un élément de L et y, un élément de L', $k(x)$ soit égal à x et $[x, k(y)]$ à $k([x, y])$, autrement dit un supplémentaire N de L dans L' tel que $[L, N]$ soit contenu dans N.

Cet exemple sera désigné dorénavant par: l'exemple des sous-algèbres de Lie.

Chapître 4. Algèbres de Lie réductives.

18. Les deux problèmes fondamentaux. Soit une opération $(E, d_E/t_E, i_E)$ de l'algèbre de Lie L avec une unité et une connexion f; le *premier problème* consiste en la détermination de l'algèbre de cohomologie $H(E)$ à partir de l'algèbre B_E, de l'algèbre de Lie L et de la connexion f. Le *deuxième problème* consiste en la détermination de l'espace vectoriel de cohomologie $H(B_E)$ à partir de l'algèbre $H(E)$, de l'algèbre de Lie L et de quelquechose de plus qui ne sera pas explicité en général, sauf dans le deuxième exemple décrit ci-dessus.

En fait ce n'est pas l'algèbre $H(E)$ qui est utilisée, mais l'algèbre $H(I_E)$. Dans les exemples qui seront traités, ces deux algèbres seront isomorphes. De toute fa on, il nous faudra imposer à l'algèbre de Lie L des hypothèses de réductivité. La fin de ce chapître sera consacrée à cette notion. Remarquons encore que la solution des deux problèmes exige l'emploi de la théorie de Hirsch-Koszul. La théorie des X-algèbres U-graduées n'est utilisée que pour obtenir des résultats plus précis dans la solution du deuxième problème pour le deuxième exemple.

19. Représentations semi-simples. Rappelons quelques définitions classiques. Une représentation non nulle d'une algèbre de Lie est dite *simple*, si les seuls sous-espaces stables de l'espace vectoriel de la représentation sont 0 ou l'espace tout entier. Une représentation est dite *semi-simple*, si l'espace de représentation est somme directe de sous-espaces stables simples, par conséquent si chaque sous-espace stable de l'espace de la représentation a un supplémentaire stable. Si (E/t) est une représentation de L, posons $t(L)(E)$ égal à K_E. Voici un premier lemme que nous utiliserons souvent sans nous y reporter.

LEMME 19.1. *Soit (E/t) une représentation semi-simple d'une algèbre de Lie L. L'espace vectoriel E est somme directe des sous-espaces stables I_E et K_E. L'espace K_E est égal à $t(L)(K_E)$. Si F est un sous-espace stable de E, I_F est égal* *à l'intersection de F et de I_E et K_F à celle de F et de K_E et la représentation (F/t) est semi-simple. Enfin s'il s'agit d'une représentation différentielle $(E, d/t)$, I_E et K_E sont stables par d et $H(E)$ est somme directe de $H(I_E)$ et de $H(K_E)$.*

Puisque la représentation est semi-simple, l'espace vectoriel E est somme directe de sous-espaces stables simples E_i. Grâce à cette décomposition, on démontre tous les résultats, en particulier parce que l'intersection de F et de E_i étant stable est égale à 0 ou à E_i. Voici un autre lemme élémentaire.

LEMME 19.2. *Soient deux représentations (E/t_E) et (F/t_F). La représentation produit $(E \otimes F/t_E * t_F)$ jouit de la propriété suivante : l'injection de $I_E \otimes I_F$ dans $E \otimes F$ est un isomorphisme de $I_E \otimes I_F$ sur $I_{E \otimes F}$. Dans le cas d'une représentation différentielle $(E, d/t_E)$, il en découle pour la représentation différentielle produit $(E \otimes F, d \otimes 1/t_E * t_F)$ un isomorphisme de $H(I_E) \otimes I_F$ sur $H(I_{E \otimes F})$.*

Voici un autre lemme fondamental.

LEMME 19.3 *Soit $(E, d/t, i)$ une opération. Si la représentation (E/t) est semi-simple, on déduit de l'injection de I_E dans E un isomorphisme de $H(I_E)$ sur $H(E)$.*

Nous savons d'après le lemme 19.1 que $H(E)$ est somme directe de $H(I_E)$ et de $H(K_E)$; démontrons que $H(K_E)$ est nul. Appelons Z le sous-espace des cocycles de E. Il est stable en vertu de la formule 13.2. L'intersection de Z et de K_E est donc égale à K_Z, qui est contenu dans $(d \circ i(L))(Z)$ en vertu de la formule 13.4. Tout cocycle de K_E est donc un cobord de E. L'homomorphisme de $H(K_E)$ dans $H(E)$,qui est un monomorphisme est donc nul. L'espace $H(K_E)$ est donc nul, ce qu'il fallait démontrer.

Voici le théorème fondamental de ce paragraphe.

THÉORÈME 19.4. *Soient une représentation différentielle $(E, d/t_E)$ et une représentation semi-simple presque finie (F/t_F). On considère la représentation différentelle produit $(E \otimes F, d \otimes 1 t_E * t_F)$. Si l'homomorphisme canonique de $H(I_E)$ dans $H(E)$ est un épimorphisme et si celui de $H(I_{E \otimes F})$ dans $H(E \otimes F)$ est un monomorphisme, alors l'injection de $I_E \otimes I_F$ dans $I_{E \otimes F}$ définit un isomorphisme de $H(I_E) \otimes I_F$ sur $H(I_{E \otimes F})$.*

Puisque l'homomorphisme de $H(I_E) \otimes I_F$ dans $H(I_{E \otimes I_F})$ est un isomorphisme d'après le lemme 19.2 et que $H(I_{E \otimes F})$ est somme directe de $H(I_{E \otimes I_F})$ et de $H(I_{E \otimes K_F})$ d'après le lemme 19.1, démontrons simplement que $H(I_{E \otimes K_F})$ est nul. L'homomorphisme de $H(I_{E \otimes K_F})$ dans $H(E \otimes K_F)$ est un monomorphisme. Démontrons que cet homomorphisme est aussi nul, ce qui achèverait la démonstration.

Rempla,ons maintenant K_F par F en supposant I_F nul. D'autre part le calcul de $H^r(I_{E\otimes F})$ n'utilise qu'un nombre fini de sous-espaces F^p. Nous pouvons donc supposer sans autre que F a une dimension finie.

Soient $f_1, f_2,\cdots,f_m$ les éléments d'une base homogène de F et $x_1, x_2,\cdots,x_l$ les éléments d'une base de l'algèbre de Lie L. Utilisons ces bases pour écrire la loi t_F. Pour j compris entre 1 et l et h entre 1 et m:

19.5. $t_F(x_j)(f_h) = \sum_{1\leq k\leq m} a^h{}_{kj} f_k.$

Considérons la matrice $(a^h{}_{kj})$, le premier indice étant h, le deuxième le couple (k,j). Puisque I_F est nul, cette matrice est de rang maximum m. Il existe donc une matrice (c^{kj}_h) dont le produit avec la matrice $(a^h{}_{kj})$ est la matrice unité.

Autrement dit $\sum_{1\leq k\leq m, 1\leq j\leq l} c^{kj}{}_g\cdot a^h{}_{kj} = 0$ si g et h sont différents

$= 1$ si g et h sont égaux.

Soit y un élément de $I_{E\otimes F}$. On peut l'écrire sous la forme suivante $\sum_{1\leq h\leq m} e_h \otimes f_h$. Puisque les $(t_E * t_F)(x_j)(y)$ sont nuls et que les f_k forment une base de F, on a les égalités suivantes pour tout j compris entre 1 et l et tout k compris entre 1 et m

19.6. $t_E(x_j)(e_k) + \sum_{1\leq h\leq m} a^h_{kj} e_h = 0$

d'où il découle

19.7. $e_h + \sum_{1\leq k\leq m; 1\leq j\leq l} c^{kj}_h t_E(x_j)(e_k) = 0.$

Si y est un cocycle de $E\otimes F$, les e_h sont des cocycles de E. Grâce à l'épimorphisme de $H(I_E)$, sur $H(E)$, on peut écrire e_h sous la forme suivante $p_h + d(q_h)$, p_h étant un élément de I_E et q_h de E; les égalités 19.7 prennent donc la forme suivante:

19.8. $e_h + d\Big(\sum_{1\leq k\leq m; 1\leq j\leq l} c^{kj}_k\, t_E(x_j)\,(q_k)\Big) = 0.$

Ainsi les e_h sont des cobords de E, par conséquent y est un cobord de $E\otimes F$. Puisque tout cocycle de $I_{E\otimes F}$ est un cobord de $E\otimes F$, l'homomorphisme de $H(I_{E\otimes F})$ dans $H(E\otimes F)$ est nul, ce qu'il fallait démontrer.

20. Algèbres de Lie réductives. Une algèbre de Lie est dite *semi-simple*, si toute représentation de cette algèbre dans un espace vectoriel de dimension finie est semi-simple, autrement dit si toute représentation de cette algèbre dans un espace vectoriel gradué presque fini est semi-simple. Une algèbre de Lie est dite *réductive*, si elle est somme directe d'une algèbre de Lie semi-simple et d'une algèbre de Lie abélienne — qui est le centre de l'algèbre de Lie réductive —.

Rappelons un résultat connu : une algèbre de Lie est réductive si et seulement si la représentation $(C(L)/t_{C(L)})$ est semi-simple.

Une représentation $(E/\,t)$ d'une algèbre de Lie est dite *décentrée*, si pour tout élément x du centre de L, les dérivations $t(x)$ sont nulles. Les représentations $(C(L)/\,t_{C(L)})$, $(A(L)/\,t_{A(L)})$ et $(W(L)/\,t_{W(L)})$ sont décentrées. Voici un lemme trivial.

LEMME 20.1. *Toute représentation presque finie décentrée d'une algèbre de Lie réductive est semi-simple.*

Dans toutes les applications sauf une, nous utiliserons le théorème 19.4 sous la forme suivante :

THÉORÈME 20.2. *Soient L une algèbre de Lie réductive, $(E,d/\,t_E, i)$ une opération presque finie de L et $(F/\,t_F)$ une représentation presque finie de L. Supposons en outre qu'une des deux représentations $(E/\,t_E)$ et $(F/\,t_F)$ est décentrée. Dans ce cas l'homomorphisme canonique de $H(I_E)\otimes I_F$ dans $H(I_{E\otimes F})$ est un isomorphisme.*

Soit M le centre de L. Si $(F/\,t_F)$ est décentrée, appelons E^* le sous-espace homogène de E des éléments annulés par tous les $t_E(x)$, x appartenant à M. L'espace E^* est stable pour d, t_E et i. Par restriction, on obtient une nouvelle opération $(E^*, d/\,t_E,\ i)$ qui est décentrée. D'une part I_E et I_{E^*} sont égaux, d'autre part $I_{E\otimes F}$ et $I_{E^*\otimes F}$ sont égaux. On le démontre à l'aide d'une base de F, la représentation $(F/\,t_F)$ étant décentrée. Il suffit donc de démontrer le théorème pour E^* et F. On peut faire une réduction analogue si $(F/\,t_F)$ n'est pas décentrée. Il nous reste donc à démontrer le théorème dans le cas où les deux représentations sont décentrées, autrement dit dans le cas où L est semi-simple.

Supposons donc L semi-simple. L'espace vectoriel gradué $E\otimes F$ est presque fini. Les représentations $(E/\,t_E)$ et $(E\otimes F/\,t_E{*}t_F)$ sont semi-simples par conséquent. Le lemme 19.3 démontre que l'homomorphisme canonique de $H(I_E)$ dans $H(E)$ est un épimorphisme et le lemme 19.1 que l'homomorphisme canonique de $H(I_{E\otimes F})$ dans $H(E\otimes F)$ est un monomorphisme. On conclut en appliquant le théorème 19.4. Remarquons que la démonstration se fait tout aussi facilement sans utiliser ce théorème.

Soit L une algèbre de Lie réductive. Considérons le quadruplet $(C(L),$ $d_{C(L)}/\,t_{C(L)}, i_{C(L)})$ et l'opération $(A(L),\ d_{A(L)}/\,t_{A(L)},\ i_{A(L)})$. Rappelons qu'on peut donner à l'espace vectoriel de $C(L)$ une autre graduation et une structure d'algèbre triviale de façon à obtenir une opération. Ces deux opérations sont décentrées, on peut donc appliquer le lemme 19.3. D'autre part la différentielle $d_{A(L)}$ est toujours nulle sur $I_{A(L)}$ (lemme 14.1). Par conséquent $d_{A(L)}$ applique $A(L)$ dans $K_{A(L)}$ qui est orthogonal à $I_{C(L)}$. Autrement dit $d_{C(L)}$ est nul sur $I_{C(L)}$. Nous avons donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 20.3. *Si L est une algèbre de Lie réductive, $d_{A(L)}$ est nul sur*

$I_{A(L)}$ et $d_{C(L)}$ est nul sur $I_{C(L)}$. L'homomorphisme canonique de $I_{A(L)}$ dans $H(A(L))$ est un isomorphisme d'algèbres graduées et l'homomorphisme canonique de $I_{C(L)}$ dans $H(C(L))$, un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués.

Un élément *primitif* est un élément de $I_{A(L)}$ orthogonal à $I^{+}_{C(L)} \wedge I^{+}_{C(L)}$ et à $I^{0}_{C(L)}$. La structure de $I_{C(L)}$ est connue (thèse de Koszul, page 29). Désignons par $P(L)$ le sous-espace des éléments primitifs de $I_{A(L)}$.

THÉORÈME 20.4. *Si L est une algèbre de Lie réductive, l'injection de l'espace vectoriel gradué impair des éléments primitifs de $I_{A(L)}$ noté $P(L)$ dans $I_{A(L)}$ peut être prolongée en un isomorphisme de l'algèbre extérieure graduée $C(P(L))$ sur $I_{A(L)}$.*

21. La réductivité dans les deux exemples. En ce qui concerne le premier exemple, celui des fibrés principaux, il faut indiquer les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 21.1. *L'algèbre de Lie d'un groupe compact est réductive.*

THÉORÈME 21.2. *Si G est un groupe de Lie compact, pour tout espace fibré principal où G opére, les algèbres graduées $H(I_E)$ et $H(E)$ sont isomorphes.*

Voir le théorème 2.3 de Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras de Chevalley-Eilenberg dans les Transactions of the American Mathematical Society 1948.

En ce qui concerne le deuxième exemple, celui des sous-algèbres de Lie, il faut introduire une nouvelle définition. Une sous-algèbre de Lie L d'une algèbre de Lie L' est dite *réductive dans L'*, si la représentation $(A(L')/\, t_{A(L')})$ est semi-simple ou autrement dit si la représentation $(C(L')/\, t_{C(L')})$ est semi-simple. Remarquons que l'algèbre de Lie L est alors réductive. On peut appliquer le théorème 17.1.

THÉORÉME 21.3. *Si L est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie L' qui y est réductive, l'opération de $L(A(L'),\, d_{A(L')}/\, t_{A(L')},\, i_{A(L')})$ possède au moins une connexion.*

D'autre part puisque la représentation $(A(L')/\, t_{A(L')})$ de L est semi-simple, on peut appliquer le lemme 19.3 :

THÉORÈME 21.4. *Si L est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie L', qui y est réductive, les algèbres graduées $H(I_{A(L')})$ et $H(A(L'))$ sont isomorphes.*

Il faut encore mentionner deux théorèmes qui donnent au deuxième exemple des applications topologiques.

THÉORÈME 21.5. *Toute sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact, y est réductive.*

Voir le théorème 9.1 de la thèse de Koszul.

THÉORÈME 21.6. *Soit G un sous-groupe fermé et connexe d'un groupe de Lie G' compact et connexe. Appelons L l'algèbre de Lie de G et L' celle* *de G'. Alors l'algèbre de cohomologie réelle de l'espace homogène G'/G est isomorphe à celle de l'algèbre des éléments basiques $B_{A(L')}$ de l'opération $(A(L'), d_{A(L')}/t_{A(L')}, i_{A(L')})$ de L.*

Voir le théorème 22.1 de l'article de Chevalley-Eilenberg mentionné ci-dessus.

Chapître 5. Le premier problème.

Il s'agit de calculer $H(I_E)$ pour une opération de L, $(E, d/t, i)$ avec unité, à partir de l'algèbre B_E, de l'algèbre de Lie L et d'une connexion f.

22. Un lemme fondamental. D'après la formule 13.8, il est possible de définir des applications i non seulement pour tout élément x de L, mais encore pour tout élément de $C(L)$: si c est l'élément $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$, on pose $i(c)$ égal à $i(x_1)\circ i(x_2)\circ\cdots\circ i(x_n)$. L'application $i(1)$ est égale à l'identité. Il nous faut généraliser la formule 13.4.

LEMME 22.1. *Soient $(E, d/t, i)$ une opération de L et un élément $c = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$ de l'algèbre $C(L)$. Alors les applications suivantes de E dans E sont égales*:

$$(-1)^n i(c)\circ d - d\circ i(c) - i(d_{C(L)}(c))$$

$$\sum_{1\leq l\leq n} (-1)^j t(x_j)\circ i(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n)$$

$$\sum_{1\leq l\leq n} (-1)^j i(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n)\circ t(x_j)$$

Démontrons, par exemple, l'égalité des deux premières applications, par induction sur le degré n de c. Pour n égal à 1, il s'agit simplement de l'égalité de $i(x)\circ d + d\circ i(x)$ et de $t(x)$. Faisons le passage de n à $n+1$, autrement dit passons de c à $c \wedge x_{n+1}$, l'application $\sum_{1\leq j\leq n+1} (-1)^j t(x_j)\circ i(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_{n+1})$ est égale à l'application

$$\sum_{1\leq j\leq n} (-1)^j t(x_j)\circ i(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n)\circ i(x_{n+1})$$
$$+(-1)^{n+1} t(x_{n+1}) i(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n).$$

D'après l'hypothèse inductive, cette application est égale à

$$(-1)^n i(c)\circ d\circ i(x_{n+1}) - d\circ i(c \wedge x_{n+1}) - i(d_{C(L)}(c) \wedge x_{n+1}) + (-1)^{n+1} t(x_{n+1})\circ i(c),$$

c'est-à-dire en vertu de la formule 13.4 à

$$(-1)^{n+1} i(c \wedge x_{n+1})\circ d - d\circ i(c \wedge x_{n+1}) - i(d_{C(L)}(c) \wedge x_{n+1})$$
$$+(-1)^{n+1} t(x_{n+1})\circ i(c) + (-1)^n i(c)\circ t(x_{n+1})$$

Il reste donc à démontrer que l'application

$$-i(d_{C(L)}(c) \wedge x_{n+1}) + (-1)^{n+1} t(x_{n+1})\circ i(c) + (-1)^n i(c)\circ t(x_{n+1})$$

est égale à l'application $-i(d_{C(L)}(c \wedge x_{n+1}))$. Autrement dit il faut démontrer que les applications suivantes sont égales :

$$\sum_{1 \leq j \leq n} i(x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge [x_{n+1}, x_j] \wedge \cdots \wedge x_n) \text{ et } -i(c)\circ t(x_{n+1}) + t(x_{n+1})\circ i(c).$$

Il nous faut donc démontrer le lemme suivant pour achever la démonstration :

LEMME 22.2. *Soient une opération $(E, d/t, i)$ de L, un élément c de $C(L)$ et un élément x de L. Alors les applications suivantes de E dans E sont égales.* $t(x)\circ i(c) - i(c)\circ t(x)$ *et* $i(t_{C(L)}(x)(c))$.

La démonstration se fait à nouveau pour des éléments c égaux à $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$ par induction sur n. Pour $n = 0$, le résultat est trivial. Faisons le passage de n à $n+1$, autrement dit passons de c à $c \wedge x_{n+1}$. L'application $i(t_{C(L)}(x)(c \wedge x_{n+1}))$ est égale à l'application $i(t_{C(L)}(x)(c))\circ i(x_{n+1}) + i(c)\circ i(t_{C(L)}(x)(x_{n+1}))$. D'après l'hypothèse inductive, cette application est égale à $t(x)\circ i(c \wedge x_{n+1}) - i(c)\circ t(x)\circ i(x_{n+1}) + i(c)\circ i([x, x_{n+1}])$, c'est-à-dire en vertu de la formule 13.6 à $t(x)\circ i(c \wedge x_{n+1}) - i(c \wedge x_{n+1})\circ t(x)$ ce qu'il fallait démontrer.

LEMME 22.3. *Soient $(E, d_E/t_E, i_E)$ une opération de l'algèbre de Lie L, f une connexion de cette opération et c un élément de $C^n(L)$. Alors les applications suivantes sont égales* : $(-1)^n i_E(c)\circ(d_E\circ f - f\circ d_{A(L)})$ *et* $(d_E\circ f - f\circ d_{A(L)})\circ i_{A(L)}(c)$.

C'est une conséquence immédiate du lemme 22.1 appliqué aux deux opérations $(E, d_E/t_E, i_E)$ et $(A(L), d_{A(L)}/t_{A(L)}, i_{A(L)})$

23. Filtration de l'algèbre graduée I_E. Soit une opération $(E, d/t, i)$ de l'algèbre de Lie L. Appelons R_p le sous-espace homogène de I_E défini de la manière suivante: si q est strictement inférieur à p, l'intersection R_p^q de R_p et de I_E^q est nulle et si q est supérieur ou égal à p, cette intersection est égale au sous-espace de I_E des éléments de degré q appartenant aux noyaux de tous les homomorphismes $i(c)$, où c est un élément de $C^{q-p+1}(L)$. Appelons $\mathfrak{R}$ la suite décroissante de sous-espaces de $I_E : R_0 \supset R_1 \supset \cdots \supset R_n \supset \cdots$.

THÉORÈME 23.1. *Le triplet $(I_E, d, \mathfrak{R})$ est une algèbre différentielle filtrée, dont l'algèbre B est égale à- B_E.*

Reportons-nous au paragraphe 2. Puisque I_E^{-1} est nul, l'espace R_0 est égal à E. D'autre part, il est immédiat que le produit $R_p \cdot R_q$ est contenu dans R_{p+q}. Enfin la différentielle d applique R_p dans R_p. En effet soient e un élément de R_p^q et c un élément de $C^{q-p+2}(L)$. Il faut démontrer que $i(c)(d(e))$ est nul. Le lemme 22.1 en donne la preuve, puisque $d_{C(L)}(c)$ est un élément de $C^{q-p+1}(L)$.

Par ailleurs, pour tout p, l'espace R_p^p est égal à B_E^p, que la différentielle applique dans B_E^{p+1} donc dans R_{p+1}. Par conséquent les espaces B^p et B_E^p sont égaux, ce qui achève la démonstration du théorème.

Supposons qu'il existe une connexion f de l'opération et que l'algèbre de Lie L est réductive. Une connexion est toujours un monomorphisme ; la connexion f induit donc un monomorphisme de $I_{A(L)}$ dans I_E. L'application $d \circ f$ applique $I_{A(L)}$ dans R_1. En effet si x est un élément de $I^q_{A(L)}$ et c, un élément de $C^{q+1}(L)$, il faut démontrer que $i(c)(d_0 f(x))$ est nul. Cela découle du lemme 22.3 : en effet $i_{A(L)}(c)(x)$ est nul et $d_{A(L)}(x)$ est nul (lemme 14.1). Autrement dit, la connexion f applique $I_{A(L)}$ dans Z_0. On peut prolonger cet homomorphisme par l'application a_0. On obtient un homomorphisme de $I_{A(L)}$ dans K_0. D'autre part on connaît un homomorphisme naturel de B égal à B_E dans K. Il en découle un homomorphime de l'algèbre graduée anticommutative $I_{A(L)} \otimes B_E$ dans l'algèbre graduée anticommutative K c'est *l'homomorphisme fondamental du premier problème.*

THÉORÈME 23.2. *L'homomorphisme fondamental du premier problème est indépendant de la connexion choisie.*

Il suffit de démontrer que, si f et f' sont deux connexions, l'homomorphisme $f - f'$ applique $I_{A(L)}$ dans R_1. Soit c un élément de $C^n(L)$, il faut donc démontrer que $i(c)(f - f')$ applique $I^n_{A(L)}$ sur 0, autrement dit que $(f - f')\ i_{A(L)}(c)$ applique $I^n_{A(L)}$ sur 0 ou encore que $(f - f')$ applique $I^0_{A(L)}$ sur 0, ce qui est bien le cas.

THÉORÈME 23.3. *L'homomorphisme fondamental du premier problème est un monomorphisme.*

Appelons $\bar{f}$ l'homomorphisme de $A(L) \otimes B_E$ dans E du à l'homomorphisme f de $A(L)$ dans E et à l'injection de B_E dans E. Les applications $\bar{f} \circ (i_{A(L)}(c) \otimes 1)$ et $i(c) \circ \bar{f}$ sont égales pour tout élément c de $C(L)$. L'homomorphisme fondamental est un monomorphisme si et seulement si pour tout p et tout n l'intersection de l'image inverse par $\bar{f}$ de D^{p+n}_n et de $I^n_{A(L)} \otimes B^p_E$ est nulle. Soit x un élément de cette intersection. Cet élément est nul si et seulement si $(i_{A(L)}(c) \otimes 1)(x)$ est nul pour tout c de $C^n(L)$ ou encore puisque l'homomorphisme de B_E dans E est un monomorphisme, si et seulement si $\bar{f} \circ (i_{A(L)}(c) \otimes 1)\ (x)$ est nul, c'est-à-dire si et seulement si $i(c) \circ \bar{f}(x)$ est nul. Puisque l'algèbre de Lie L est réductive, les espaces $I^n_{A(L)}$ et $I^n_{C(L)}$ sont en dualité. On peut donc supposer que c appartient à $I^n_{C(L)}$. D'autre part $\bar{f}(x)$ appartient à D^{p+n}_p. Pour achever la démonstration, il suffit donc de démontrer le résultat suivant : si y est un élément de degré $p + n$ de dR_p ou de R_{p+1} et si c est un élément de degré n de $I_{C(L)}$, alors $i(c)(y)$ est nul. Si y appartient à R_{p+1} c'est immédiat et si y appartient à dR_p, il faut faire usage du lemme 22.1 : $y = d(z)$. En vertu du théorème 20.3, $d_{C(L)}(c)$ est nul ; d'autre part z est un élément de I_E ; par conséquent $i(c)(d(z))$ est égal à $(-1)^{p+n}\ d(i(c)(z))$. Mais l'élément $i(c)(z)$ est nul, d'où le résultat.

Utilisons la structure de $I_{A(L)}$ donnée par le théorème 20.4. Nous voulons démontrer que les éléments de $f(P(L))$ de I_E sont transgressifs. Il faut faire usage des propriétés d'opération universelle de l'opération $(W(L),\ d_{W(L)}/\ t_{W(L)},\ i_{W(L)})$ décrites au début du paragraphe 15 ou dans le théorème 15.11. L'homomorphisme $g(f)$ respecte les filtrations $\mathfrak{N}_{W(L)}$ et $\mathfrak{N}_E$ et applique $B_{W(L)}$ isomorphe à $I_{S(L)}$ dans B_E. Par conséquent, il suffit de démontrer que les éléments de $f_0(P(L))$ égal à $P(L)\otimes 1$ de $I_{W(L)}$ sont transgressifs. Par ce procédé on obtient une transgression de $P(L)$ dans B_E qui est égal au composé d'une transgression de $P(L)$ dans $B_{W(L)}$ et de l'homomorphisme de $B_{W(L)}$ dans B_E dû à $g(f)$. La démonstration de transgression de l'algèbre différentielle filtrée $(I_{W(L)}, d_{W(L)}, \mathfrak{N}_{W(L)})$ sera donnée dans le paragraphe 25.

THÉORÈME 23.4. *Si l'homomorphisme fondamental du premier problème pour l'opération unitaire $(E, d/t, i)$ d'une algèbre de Lie réductive, avec une connexion f est un épimorphisme, alors l'algèbre différentielle filtrée $(I_E, d, \mathfrak{N})$ est une algèbre de Chevalley. L'algèbre graduée de cohomologie $H(I_E)$ est isomorphe à l'algèbre graduée de cohomologie $H(I_{A(L)}\otimes B_E, d_K)$, la différentielle d_K est égale à $1\otimes d$ sur $1\otimes B_E$ et est égale sur $P(L)\otimes 1$ à l'homomorphisme composé de la projection de $P(L)\otimes 1$ sur $P(L)$, d'une transgression de $P(L)$ dans $I_{S(L)}$ de l'algèbre de Weil, de l'homomorphisme de $I_{S(L)}$ dans B_E dû à la connexion f et de l'injection de B_E dans $I_{A(L)}\otimes B_E$.*

24. Application aux deux exemples. Nous allons démontrer la propriété d'épimorphisme de l'homomorphisme fondamental du premier problème pour les deux exemples décrits ci-dessus (paragraphes 16 et 17).

THÉORÈME 24.1. *Dans l'exemple des fibrés principaux à groupe compact, l'homomorphisme fondamental du premier problème est toujours un épimorphisme.*

Après un rapide coup d'oeil aux théorèmes 16.7 et 21.1, voici la démonstration. Soit donc F un espace fibré principal. Si U est un ouvert de la base de F, l'ouvert de F au-dessus de U a une structure induite de fibré principal: $F(U)$. Par restriction, une connexion de F donne une connexion de $F(U)$. D'autre part si U est un ouvert contenu dans un ouvert U' de la base, on obtient un homomorphisme naturel de $K(U')$ dans $K(U)$. En utilisant la connexion f de F et ses restrictions $f(U)$, on voit immédiatement que les homomorphismes fondamentaux définissent un homomorphisme du préfaisceau $I_{A(L)}\otimes B_E(U)$ dans le préfaisceau $K(U)$. D'aprés le théorème 23.3, il s'agit d'un monomorphisme de préfaisceaux. D'autre part le préfaisceau $I_{A(L)}\otimes B_E(U)$ est un faisceau. Enfin cet homomorphisme de préfaisceaux détermine un homomorphisme du faisceau $I_{A(L}\otimes B_E(U)$ dans le faisceau du préfaisceau $K(U)$. Puisque l'homomorphisme fondamental est indépendant de la connexion choisie et que l'espace fibré est localement trivial, cet homomorphisme de faisceaux est un isomorphisme. Un monomorphisme de préfaisceaux d'un faisceau dans un préfaisceau, qui induit un isomorphisme de faisceaux est toujours un isomorphisme de préfaisceaux. Par conséquent les homomorphismes fondamentaux de $I_{A(L)}\otimes B_E(U)$ dans $K(U)$ sont des isomorphismes; en particulier, l'homomorphisme fondamental de $I_{A(L)}\otimes B_E$ dans K est un isomorphisme.

Avant de passer au deuxième exemple, je vais démontrer quelques lemmes et théorèmes généraux. Soit $(E, d/t, i)$ une opération de l'algèbre de Lie L avec une connexion et soient $x_1, x_2, \cdots, x_l$ les éléments d'une base de L et $x'_1, x'_2, \cdots, x'_l$ les éléments de la base duale de l'espace vectoriel dual de L. Voici un lemme, dont la démonstration est immédiate :

LEMME 24.2. *L'homomorphisme* $d - \sum_{1 \leq j \leq l} e(f(x'_j)) \circ t(x_j)$ *applique* X_E *dans* X_E.

La connexion f et l'injection de X_E dans E déterminent un homomorphisme $s(f)$ de $A(L) \otimes X_E$ dans E. On démontre immédiatement le lemme suivant :

LEMME 24.3. *L'homomorphisme* $s(f)$ *est un homomorphisme de la représentation* $(A(L) \otimes X_E / t_{A(L)} \ast t)$ *dans la représentation* (E/t). *Les applications* $i(c) \circ s(f)$ *et* $s(f) \circ (i_{A(L)}(c) \otimes 1)$ *sont toujours égales. Par conséquent,* $s(f)$ *est un monomorphisme qui applique, pour tout* p, $I_{A(L)} \otimes X_E^p$ *dans* R_p.

Enfin voici un dernier lemme :

LEMME 24.4. *Pour tout* p, *l'homomorphisme* $s(f) \circ (d_{A(L)} \otimes 1) + d \circ s(f)$ *applique* $I_{A(L)} \otimes X_E^p$ *dans* R_{p+1}.

En vertu du lemme 24.2 on peut remplacer d par $\sum_{1 \leq l \leq l} e(f(x'_j)) \circ t(x_j)$. La conclusion est alors immédiate (voir le lemme 15.10).

Nous pouvons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 24.5. *Soit une opération* $(E, d/t, i)$ *d'une algèbre de Lie réductive* L *avec une connexion. Si l'algèbre graduée* E *est presque finie et si la série de Poincaré de* E *est égale au produit des séries de Poincaré de* $A(L)$ *et de* X_E, *alors l'homomorphisme fondamental du premier problème est un épimorphisme.*

Puisque l'homomorphisme $s(f)$ est un monomorphisme et que la série de Poincaré de E est égale au produit de celles de $A(L)$ et de X_E, l'homorphisme $s(f)$ est un isomorphisme. L'image réciproque de R_p est alors l'idéal $\sum_{q \geq p} I_{A(L)} \otimes X_E^q$. L'algèbre T (avec la graduation supérieure) est isomorphe à l'algèbre graduée $I_{A(L) \otimes X_E}$. D'après le lemme 24.4, la différentielle d_T de T correspond à la différentielle $- d_{A(L)} \otimes 1$ de $I_{A(L) \otimes X_E}$. L'algèbre graduée K (avec la graduation supérieure) est isomorphe à l'algèbre graduée $H(I_{A(L) \otimes X_E}, d_{A(L)} \otimes 1)$. Appliquons le théorème 20.2, en remarquant d'une part que la différentielle $d_{A(L)}$ est nulle sur $I_{A(L)}$, d'autre part que les éléments invariants de X_E sont les éléments basiques de E. Puisque l'algèbre de Lie L est réductive, l'algèbre $H(I_{A(L) \otimes X_E}, d_{A(L)} \otimes 1)$ est isomorphe à l'algèbre $I_{A(L)} \otimes B_E$.

Les séries de Poincaré de K et de $I_{A(L)} \otimes B_E$ sont égales et l'homomorphisme fondamental est un monomorphisme. Par conséquent, cet homomorphisme est aussi un épimorphisme, ce que nous voulions démontrer.

Après un rapide coup d'oeil au théorème 21.3, nous allons pouvoir démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 24.6. *Dans l'exemple des sous-algèbres de Lie, si la sous-algèbre L est réductive dans l'algèbre de Lie L', l'homomorphisme fondamental du premier problème est toujours un épimorphisme.*

D'après le théorème 24.5, il suffit de démontrer que la dimension de $A(L')$ est la somme de celles de $A(L)$ et de $X_{A(L')}$. En prenant un supplémentaire N du sous-espace vectoriel L de L', on constate immédiatement que l'algèbre $X_{A(L')}$ est isomorphe à l'algèbre extérieure $C(N)$. Soient l' et l les dimensions de L' et de L. Les dimensions de $A(L')$, de $A(L)$ et de $X_{A(L')}$ sont alors respectivement $2^{l'}$, 2^{l} et $2^{l'-l}$, ce qui démontre le théorème.

Pour pouvoir appliquer la théorie des X-algèbres U-graduées il faut que la différentielle $d_{A(L')}$ soit nulle sur $B_{A(L')}$. Voici une réponse à cette question.

THÉORÈME 24.7. *Dans l'exemple des sous-algèbres de Lie, la différentielle $d_{A(L')}$ est nulle sur $B_{A(L')}$, si l'espace vectoriel de L possède dans l'espace vectoriel de L' supplémentaire N tel que [N,N] soit contenu dans L.*

En effet, l'espace $B_{A(L')}$ est orthogonal à l'espace somme de l'idéal engendré par L dans $C(L')$ et de l'espace $t_{C(L')}(L)(C(L'))$. Il suffit donc de démontrer que la différentielle $d_{C(L')}$ applique $C(L')$ dans ce sous-espace de $C(L')$. Mais l'espace vectoriel $C(L')$ est la somme de l'idéal de $C(L')$ engendré par L et de la sous-algèbre de $C(L')$ engendrée par N. Dans tous les cas, la différentielle $d_{C(L')}$ envoie cet idéal dans l'espace somme de cet idéal et de $t_{C(L')}(L)(C(L'))$. Il suffit donc de démontrer que la différentielle $d_{C(L')}$ applique la sous-algèbre de $C(L')$ engendrée par N dans l'idéal de $C(L')$ engendré par L. Ceci a lieu si et seulement si l'espace vectoriel $[N,N]$ est contenu dans L. Le théorème est donc démontré.

A ce propos, il est peut-être bon de rappeler un théorème concernant les applications topologiques du théorème 24.7.

THÉORÈME 24.8. *Soient G' un groupe de Lie et G un sous-groupe fermè de G'. Appelons L' et L les algèbres de Lie des groupes G' et G. Si l'espace homogène G' / G est symétrique, alors l'espace vectoriel de L posséde dans l'espace vectoriel de L un supplémentaire N tel que [N, N] soit contenu dans L.*

Pour la définition d'espace homogène symétrique et pour la démonstration, voir l'article de E. Cartan dans les Annales de la Société Polonaise de Mathématique, volume 8, 1929: sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos.

Indiquons pour terminer une autre application du théorème 24.5.

LEMME 24.9. *L'homomorphisme fondamental du premier problème pour* *l'opération de Weil* $(W(L), d_{W(L)}/t_{W(L)}, i_{W(L)})$ *d'une algèbre de Lie réductive* L *est un épimorphisme.*

En effet l'algèbre $W(L)$ est égale à l'algèbre $A(L) \otimes S(L)$ et l'algèbre $X_{W(L)}$ est égale à la sous-algèbre $1 \otimes S(L)$. Par conséquent la condition du théorème 24.5 est bien satisfaite, ce qui démontre le lemme.

25. Algèbre de Weil et transgression. Il s'agit de démontrer le résultat utilisé dans la démonstration du théorème 23.4. Soit L une algèbre de Lie réductive. Considérons l'opération $(W(L), d_{W(L)}/t_{W(L)}, i_{W(L)})$ avec la connexion égale à l'injection de $A(L)$ dans $A(L) \otimes S(L)$. On déduit de cette opération une algèbre différentielle filtrée $(I_{W(L)}, d_{W(L)}/\mathfrak{R}_{W(L)})$ et il faut montrer que les éléments de $P(L) \otimes 1$ sont transgressifs pour cette structure. Dorénavant, on dira transgressif sans préciser que cela se rapporte à la structure d'algèbre différentielle filtrée indiquée ci-dessus.

En premier lieu, voici deux lemmes concernant la théorie de Hirsch-Koszul.

LEMME 25.1. *Soit* $(E, d/\mathfrak{R})$ *une algèbre différentielle filtrée. Si l'homomorphisme naturel de* B *dans* K *est un isomorphisme, alors pour tout cocycle* x *de* R_j *de degré* p *et pour tout* q *inférieur ou égal à* p, *il existe un élément* y *de* R_j *de degré* $p-1$, *tel que l'élément* $x-d(y)$ *appartienne à* R_q.

Il suffit de démontrer le lemme dans les cas où $q-j$ est égal à 1. L'élément x est un élément de Z_j de degré p. Par suite, en vertu de l'isomorphisme supposé, il appartient à l'espace engendré par D_j^p et B_j^p. Puisque j est strictement inférieur à p, l'espace B_j^p est nul. Il existe donc un élément y de R_j de degré $p-1$ tel que $x-d(y)$ soit un élément de R_{j+1}, ce qu'il fallait démontrer.

LEMME 25.2. *Soit* $(E, d, \mathfrak{R})$ *une algèbre différentielle filtrée. Si l'homomorphisme naturel de* B *dans* K *est un isomorphisme, alors pour tout cocycle* x *de* R_j, *il existe un élément* y *de* R_j, *tel que l'élément* $x-d(y)$ *appartienne à* B.

Utilisons le lemme 25.1 dans le cas où q et p sont egaux. L'élément $x-d(y)$ est un elément de R_p de degré p que la différentielle envoie sur 0. Par suite, c'est un élément de Z_p de degré p, autrement dit de B, ce qu'il fallait démontrer.

Soit $(E, d/t, i)$ une opération avec une connexion f. Appelons Y_E la sous-algèbre de E des éléments de E invariants et appartenant à tous les noyaux des homomorphismes $i(c)$, où c est un élément de $I^+_{G(L)}$. Si l'algèbre de Lie L est réductive, la différentielle $d_{G(L)}$ est nulle sur $I_{G(L)}$. Par suite d'après le lemme 22.1, la différentielle d envoie Y_E dans Y_E. Enfin la filtration $\mathfrak{R}$ de I_E induit une filtration $\mathfrak{R}'$ de Y_E.

LEMME 25.3. *Soit* $(E, d/t, i)$ *une opération d'une algèbre de Lie réductive. Le triplet* $(Y_E, d, \mathfrak{R}')$ *est une algèbre différentielle filtrée.*

Par une démonstration tout-à-fait analogue à celle du théorème 24.5, on démontre le lemme suivant.

LEMME 25.4. *Soit $(E, d/t, i)$ une opération d'une algèbre de Lie réductive L avec une connexion. Si l'algèbre graduée E est presque finie et si la série de Poincaré de E est égale au produit des séries de Poincaré de $A(L)$ et X_E, alors l'homomorphisme de B dans l'algèbre K de l'algèbre différentielle filtrée $(Y_E, d, \mathfrak{R}')$ est un isomorphisme.*

Remarquons que l'algèbre B est égale à l'algèbre B_E. Nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 25.5. *Soit $(E,d/t,i)$ une opération d'une algèbre de Lie réductive L avec une connexion. Supposons l'algèbre graduée E presque finie et la série de Poincaré de E égale au produit des séries de Poincaré de $A(L)$ et de X_E. Considérons l'algèbre différentielle filtrée $(I_E, d, \mathfrak{R})$. Tout élément p dont le cobord appartient à R_1 et aux noyaux des homomorphismes $i(c)$ de E, où c est un élément quelconque de $I^+_{C(L)}$, est transgressif.*

Appelons x l'élément $d(p)$. Le lemme 25,4 et le lemme 25.2 appliqué à l'algèbre différentielle filtrée $(Y_E, d, \mathfrak{R}')$ démontrent immédiatement qu'il existe un élément y de R_1, tel que $d(p-y)$ appartienne à B. Autrement dit p est transgressif.

THÉORÈME 25.6. *Dans l'opération $(W(L), d_{W(L)}/ t_{W(L)}, i_{W(L)})$ d'une algèbre de Lie réductive L, les éléments primitifs sont transgressifs.*

D'après le théoreme 25.5, il suffit donc de démontrer que si c est un élément de $I^+_{C(L)}$, alors l'application $i_{W(L)}(c)\circ d_{W(L)}$ envoie $P(L)\otimes 1$ sur 0. D'aprés le lemme 22.1, il suffit donc de démontrer que l'application $d_{W(L)}\circ i_{W(L)}(c)$ envoie $P(L)\otimes 1$ sur 0 ou que l'application $i_{W(L)}(c)$ envoie $P(L)\otimes 1$ dans $W^0(L)$ ou encore que l'application $i_{A(L)}(c)$ envoie $P(L)$ dans $A^0(L)$. Puisque les espaces $I_{A(L)}$ et $I_{C(L)}$ sont en dualité, il suffit de démontrer que si p est un élément primitif, $i_{A(L)}(c)(p)$ est nul sur $I^+_{C(L)}$, autrement dit que p est nul sur $i_{C(L)}(C)(I^+_{C(L)})$, autrement dit que p est nul sur $I^+_{C(L)} \wedge I^+_{C(L)}$, ce qui est la définition même de p primitif.

Chapître 6. Le deuxième problème.

Il s'agit de calculer $H(B_E)$ pour une opération $(E, d/t, i)$ de L avec une unité et une connexion, à partir de l'algèbre $H(I_E)$, de l'algèbre de Lie L et de quelquechose de plus qui ne sera pas explicité en général, sauf dans l'exemple des sous-algèbres de Lie.

Avant de pouvoir appliquer la théorie de Hirsch-Koszul, il nous faut démontrer deux isomorphismes naturels.

26. Le premier isomorphisme. Il s'agit de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 26.1. *Soit $(E, d/t, i)$ une opération de l'algèbre de Lie L.*

S'il existe une connexion, l'injection de B_E dans $B_{E\otimes W(L)}$ détermine un isomorphisme de $H(B_E, d)$ sur $H(B_{E\otimes W(L)}, d_* d_{W(L)})$.

Définissons quelques endomorphismes de l'espace vectoriel $E \otimes W(L)$ en utilisant le lemme 1.11. Soit f une connexion de l'opération $(E, d/t, i)$. Soit r la dérivation valant $(p + 1/2q)$ fois l'identité sur $E \otimes A^p(L) \otimes S^q(L)$. Puis soit c l'unique antidérivation nulle sur $E \otimes A(L) \otimes 1$, qui applique $1 \otimes 1 \otimes x'$ sur $1 \otimes x' \otimes 1 - f(x') \otimes 1 \otimes 1$, x' étant un élément de L^*. Enfin soit s l'unique dérivation définie de la manière suivante : on définit en premier lieu une dérivation s de $E \otimes A(L) \otimes 1$ nulle sur $E \otimes 1 \otimes 1$, qui applique $1 \otimes x' \otimes 1$ sur $f(x') \otimes 1 \otimes 1$. Puis on prolonge s à $E \otimes A(L) \otimes S(L)$ par la definition suivante : s applique $1 \otimes 1 \otimes x'$ sur la somme suivante $-s(1 \otimes d_{A(L)}(x') \otimes 1) + 1 \otimes d_{A(L)}(x') \otimes 1 + (d \circ f)(x') \otimes 1 \otimes 1$. Nous allons démontrer trois lemmes concernant ces applications. Posons $\bar{d} = d_* d_{W(L)}$.

LEMME 26.2. *Les applications $\bar{d} \circ (s - r) - (s - r) \circ \bar{d}$ et $c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c + (s - r)$ sont nulles.*

Nous utiliserons les lemmes 1.9 et 1.10 sans nous y référer. L'antidérivation $\bar{d}_\circ (s - r) - (s - r) \circ \bar{d}$ est nulle sur $E \otimes A(L) \otimes 1$, puisqu' elle est nulle sur $E \otimes 1 \otimes 1$ et sur $1 \otimes A^1(L) \otimes 1$. En effet $\bar{d} \circ (s - r)$ applique $1 \otimes x' \otimes 1$ sur $(d \circ f)(x') \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes d_{A(L)}(x') \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes x'$ et $(s - r) \circ \bar{d}$ applique $1 \otimes x' \otimes 1$ sur $s(1 \otimes d_{A(L)}(x') \otimes 1 - 1) \otimes 2 d_{A(L)}(x') \otimes 1 - s(1 \otimes d_{A(L)}(x') \otimes 1) + 1 \otimes d_{A(L)}(x') \otimes 1 + (d \circ f)(x') \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes x'$, comme on le voit à partir des définitions. Démontrons que l'antidérivation est aussi nulle sur $1 \otimes 1 \otimes S^2(L)$, ce qui permettrait de conclure. En effet sur

$$1 \otimes A^1(L) \otimes 1, \; (d \circ (s - r) - \overline{(s - r)} \circ d) \circ (1 \otimes h_{W(L)})$$

est égal à $-(\bar{d} \circ (s - r) - (s - r) \circ \bar{d}) \circ (1 \otimes \circ \bar{d}_{A(L)}) - \bar{d} \circ (\bar{d} \circ (s - r) - (s - r) \circ \bar{d})$, puisque $\bar{d}^2$ est nul et que $\bar{d}$ et $1 \otimes h_{W(L)} + 1 \otimes d_{A(L)}$ sont égaux sur $1 \otimes A(L) \otimes 1$; et cette somme est nulle en vertu du résultat dèja démontré sur $E \otimes \mathrm{A}(L) \otimes 1$.

A partir des définitions on voit immédiatement que $c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c + (s - r)$ est une dérivation nulle sur $E \otimes 1 \otimes 1$ et sur $1 \otimes A^1(L) \otimes 1$, donc sur $E \otimes A(L) \otimes 1$. Elle est également nulle sur $1 \otimes 1 \otimes S^2(L)$. En effet sur $1 \otimes A^1(L) \otimes 1$, $(c \circ \bar{d} + \bar{d}_\circ c + s - r)\,(1 \otimes h_{W(L)})$ est égal à $-(c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c + s - r)(1 \otimes d_{A(L)}) + \bar{d} \circ (c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c + s - r) - (\bar{d} \circ (s - r) - (s - r) \circ \bar{d})$, qui est nul d'après la première partie du lemme et le résultat partiel sur $E \otimes A(L) \otimes 1$. On peut donc conclure. Remarquons que la première égalité du lemme est une conséquence de la seconde.

Appelons $N^{p,q}$ l'espace vectoriel $E \otimes A^p(L) \otimes S^q(L)$.

LEMME 26.3. *La dérivation $c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c - r$* applique *$N^{p,q}$ dans la somme*

$\sum_{0 \leqq k < q,\, j \geqq 0 \text{ ou } k = q,\, 0 \leqq j < p} N^{j,k}$. *La dérivation* $c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c$ *applique* $N^{p,q}$ *dans la somme*

$\sum_{0 \leqq k < q,\, j \geqq 0 \text{ ou } k = q,\, 0 \leqq j \leqq p} N^{j,k}$.

La deuxième partie du lemme découle de la première, puisque r applique $N^{p,q}$ dans $N^{p,q}$. Démontrons la première partie. Puisque $c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c - r$ est une dérivation et que le produit $N^{p,q} \cdot N^{a,b}$ est contenu dans $N^{p+a,q+b}$, il suffit de démontrer le lemme pour les éléments de $E \otimes 1 \otimes 1$, de $1 \otimes A^1(L) \otimes 1$ et de $1 \otimes 1 \otimes S^2(L)$. Puisque la dérivation est égale à $-s$, ces espaces sont appliqués respectivement dans les espaces 0, $E \otimes 1 \otimes 1$ et $E \otimes 1 \otimes 1 + E \otimes A^1(L) \otimes 1 + E \otimes A^2(L) \otimes 1$, ce qui achève la démonstration.

LEMME 26.4. *Les applications suivantes sont nulles*:

$c \circ i_{E \otimes W(L)}(x) + i_{E \otimes W(L)}(x) \circ c$

$c \circ t_{E \otimes W(L)}(x) - t_{E \otimes W(L)}(x) \circ c$

$(c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c) \circ i_{E \otimes W(L)}(x) - i_{E \otimes W(L)}(x)(c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c)$

$(c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c) \circ t_{E \otimes W(L)}(x) - t_{E \otimes W(L)}(x) \circ (c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c)$

Une démonstration analogue à celle des lemmes 26.2 et 26.3 le démontre pour les deux premières applications. Il en découle le résultat pour les deux dernières applications.

Nous allons démontrer le théorème 26.1. Soit x un élément non nul de $E \otimes W(L)$. On peut l'écrire sous la forme $\sum x^{j,k}$,$x^{j,k}$ étant un élément de $N^{j,k}$. Appelons $b(x)$ le maximum des k pour lesquels il existe un j avec $x^{j,k}$ non nul et appelons $a(x)$ le maximum des j pour lesquels $x^{j,b(x)}$ n'est pas nul. Si $a(x)$ et $b(x)$ sont nuls, x est un élément de $E \otimes 1 \otimes 1$ et réciproquement. Si x n'appartient pas à $E \otimes 1 \otimes 1$, on peut définir l'élément $y(x)$ égal à $x - (a(x) + \frac{1}{2} b(x))^{-1}(c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c)(x)$. Ecrivons x sous la forme $x^{a(x),b(x)} + (x - x^{a(x),b(x)})$. Ainsi $y(x)$ est égal à $(a(x) + \frac{1}{2}\ b(x)^{-1}(r - c \circ \bar{d} - \bar{d} \circ c)\,(x^{a(x),b(x)}) + (x - x^{a(x),b(x)}) - (a(x) + \frac{1}{2}\, b(x)^{-1})\,(c \circ \bar{d} + \bar{d} \circ c)\,(x - x^{a(x),b(x)})$. Par conséquent d'après le lemme 26.3, si $y(x)$ n'est pas nul ou bien $b(y(x))$ est égal à $b(x)$ et $a(y(x))$ est strictement inférieur à $a(x)$ ou bien $b(y(x))$ est strictement inférieur à $b(x)$.

Si x est homogène de degré n, $y(x)$ est aussi homogène de degré n et si x appartient à $B_{E \otimes W(L)}$, il en est de même pour $y(x)$ et $c(x)$ en vertu du lemme 26.4. En particulier si x est un élément de $B_{E \otimes W(L)}$ dont le cobord appartient à $B_E \otimes 1$, les éléments x et $y(x)$ sont cohomologues dans $B_{E \otimes W(L)}$, puisque c est nul sur $E \otimes 1$. En vertu de l'alinéa ci-dessus en répétant l'opération un nombre fini de fois, on doit aboutir à un élément de $E \otimes 1$. En résumé tout élément de $B_{E \otimes W(L)}$ dont le cobord appartient à $B_E \otimes 1$ est cohomologue dans $B_{E \otimes W(L)}$ à un élément de $B_E \otimes 1$. Le lemme 4.2 permet de conclure.

27. Le deuxième isomorphisme. Il s'agit de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 27.1. *Soit $(E, d/t, i)$ une opération de l'algèbre de Lie L. La projection de $W(L)$ sur $S(L)$ induit un isomorphisme de $B_{E \otimes W(L)}$ sur $I_{E \otimes S(L)}$.*

Appelons M la sous-algèbre $X_{E \otimes A(L)}$ de l'algèbre $E \otimes A(L)$ de l'opération produit de $(E, d/t, i)$ et de $(A(L), d_{A(L)}/t_{A(L)}, i_{A(L)})$.

Puisque la projection de $W(L)$ sur $S(L)$ détermine un morphisme de représentations de $(E \otimes W(L)/t_* t_{W(L)})$ sur $(E \otimes S(L)/t_* t_{S(L)})$, il suffit de démontrer que cette projection induit un isomorphisme de $X_{E \otimes W(L)}$ sur $E \otimes S(L)$, autrement dit que la projection de $E \otimes A(L)$ sur E induit un isomorphisme de $X_{E \otimes A(L)}$ sur E, c'est-à-dire de M sur E.

LEMME 27.2. *La projection de $E \otimes A(L)$ sur E induit un isomorphisme de M sur E.*

Appelons p l'homomorphisme de M dans E dû à la projection de $E \otimes A(L)$ sur E et q l'homomorphisme de E dans M défini de la manière suivante. Soient $x_1, x_2, \cdots, x_l$ les éléments d'une base de L et $x'_1, x'_2, \cdots, x'_l$ les éléments duaux de la base duale. Posons, pour un élément x de E^m,

$$q(x) = \sum_{0 \leq n \leq l; 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq l} c^n_m i(x_{j_1}) \circ i(x_{j_2}) \circ \cdots \circ i(x_{j_n})(x) \otimes x'_{j_1} \wedge x'_{j_2} \wedge \cdots \wedge x'_{j_n},$$

avec c^n_m égal à $(-1)^{nm + 1 \cdot 2n(n-1)}$. On prolonge par linéarité q à E. Il faut encore démontrer que q applique E dans M. Il suffit de vérifier que l'application $i * i_{A(L)}(x_1) \circ q$ est nulle, puisque les éléments de la base jouent un rôle symétrique. Puisque $i_{A(L)}(x_1)(x'_j)$ est nul si j est différent de 1, $i_{A(L)}(x_1)(x'_{k_1})$ est nul si k_1 est différent de 1. Aussi avons-nous l'égalité suivante:

$$i * i_{A(L)}(x_1)(q(x)) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq l} (-1)^{m-n} c^n_m i(x_{j_1}) \circ i(x_{j_2}) \circ \cdots \circ i(x_{j_n})(x) \otimes$$

$$i_{A(L)}(x_1)(x'_{j_1}) \cdot x'_{j_2} \wedge \cdots \wedge x'_{j_n} + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq l} c^n_m i(x_1) \circ i(x_{j_1}) \circ i(x_{j_2}) \circ \cdots \circ i(x_{j_n})(x) \otimes$$

$x'_{j_1} \wedge x'_{j_2} \wedge \cdots \wedge x'_{j_n}$.

Puisque $i(x_1) \circ i(x_1)$ est nul, dans la deuxième somme les termes avec j_1 égal à 1 sont nuls; dans la première, ceux avec j_1 différent de 1 sont nuls. On peut donc écrire: $i * i_{A(L)}(x_1)(q(x)) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq l} (c^n_m + (-1)^{m-n-1} c^{n+1}_m)\ i(x_{j_1}) \circ \cdots \circ i(x_{j_n})(x) \otimes x'_{j_1} \wedge \cdots \wedge x'_{j_n}$, qui est nul car $c^n_m + (-1)^{m-n-1} c^{n+1}_m$ est nul.

Puisque c^0_m est égal à 1, l'application $p \circ q$ est égale à l'application identique de E. Démontrons, pour pouvoir conclure, que $q \circ p$ est égal à l'application identique de M. Soit z un élément de M de degré m, que nous pouvons écrire

sous la forme suivante : $z = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq l} b_{j_1 j_2 \ldots j_n} \otimes x'_{j_1} \wedge x'_{j_2} \wedge \cdots\cdots \wedge x'_{j_n}$.
Soient n nombres $k_1, k_2, \cdots\cdots, k_n$ croissants et compris entre 1 et l. D'une part $i{*}i_{A(L)}(y_{k_1})(z)$ est nul, d'autre part c'est un élément de la forme $\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq l} c_{j_1 j_2 \ldots j_n} \otimes x'_{j_1} \wedge x'_{j_2} \wedge \cdots\cdots \wedge x'_{j_n}$. Le calcul de $c_{k_2 k_3 \ldots k_n}$ qui est nul donne l'équation suivante : $i(x_{k_1})(b_{k_2 k_3 \ldots k_n}) + (-1)^{m-n} b_{k_1 k_2 \ldots k_n} = 0$. Par induction sur n, on démontre que $b_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ est égal à $c^n_m i(x_{k_1})\, i(x_{k_2}) \cdots\cdots i(x_{k_n})(b)$. Puisque b est égal à $p(z)$ le résultat est démontré.

THEOREME 27.3. *Soit $(E, d/t, i)$ une opération de l'algèbre de Lie L. L'isomorphisme de $B_{E \otimes W(L)}$ sur $I_{E \otimes S(L)}$ et la différentielle $d{*}d_{W(L)}$ munissent d'une manière naturelle l'algèbre $I_{E \otimes S(L)}$ d'une différentielle D_E. Il s'agit de l'homomorphisme $d \otimes 1 - \sum_{1 \leq k \leq l} (i(x_k) \otimes 1) \circ e(1 \otimes x'_k)$.*

Nous devons démontrer que D_E est égal à $(p \otimes 1)(d{*}d_{W(L)})(q \otimes 1)$. Démontrons l'égalité pour un élément $x \otimes z$ de $E^m \otimes S(L)$. En effet $(d{*}d_{W(L)})(q \otimes 1)$ applique $x \otimes z$ sur $\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq l} c^n_m [d \circ i(x_{j_1}) \circ i(x_{j_2}) \circ \cdots\cdots \circ i(x_{j_n})(x) \otimes x'_{j_1} \wedge x'_{j_2} \wedge \cdots\cdots \wedge x'_{j_n} \otimes z + (-1)^{m-n} i(x_{j_1}) \circ i(x_{j_2}) \circ \cdots\cdots \circ i(x_{j_n})(x) \otimes d_{W(L)}(x'_{j_1} \wedge x'_{j_2} \wedge \cdots\cdots \wedge x'_{j_n} \otimes z)]$. Puisque $d_{A(L)}$ et $d_{S(L)}$ appliquent $A^j(L) \otimes S(L)$ dans $A^{j+1}(L) \otimes S(L)$ et que $h_{W(L)}$ applique $A^j(L) \otimes S(L)$ dans $A^{j-1}(L) \otimes S(L)$, l'application $(p \otimes 1) \circ (d{*}d_{W(L)}) \circ (q \otimes 1)$ envoie $x \otimes z$ sur $d(x) \otimes z + \sum_{1 \leq j \leq l} c^1_m (-1)^{m-1} i(x_j)(x) \otimes x'_j \cdot z$ qui est égal à $D_E(x \otimes z)$.

28. Deux corollaires. Avant de donner la solution du deuxième probléme je vais indiquer deux corollaires des théorèmes 26.1, 27.1 et 27.3.

Rappelons que l'algèbre $B_{W(L)}$ de l'opération $(W(L), d_{W(L)}/t_{W(L)}, i_{W(L)})$ est égale à $1 \otimes I_{S(L)}$ et que la différentielle $d_{W(L)}$ y est nulle.

THÉORÈME 28.1. *Soit $(E, d/t, i)$ une opération d'une algèbre de Lie possédant une connexion. L'homomorphisme de $I_{S(L)}$ dans $H(B_E)$ dû à une connexion est indépendant de la connexion choisie.*

D'aprés le théorème 26.1, c'est une conséquence immédiate du théorème suivant.

THÉORÈME 28.2. *Soit $(E, d/t, i)$ une opération d'une algèbre de Lie L avec une connexion f. L'homomorphisme $g(f)$ induit un homomorphisme de $I_{S(L)}$ dans B_E, d'où un homomorphise de $I_{S(L)}$ dans $E_{E \otimes W(L)}$. L'injection de $W(L)$ dans $E \otimes W(L)$ induit un homomorphisme de $I_{S(L)}$ dans $B_{E \otimes W(L)}$. Ces deux homomorphismes de $I_{S(L)}$ dans $B_{E \otimes W(L)}$ déterminent le même homomorphisme* *de $I_{S(L)}$ dans $H(B_{E\otimes W(L)})$.*

L'application de $E\otimes W(L)$ dans E, qui envoie $x\otimes y$ sur $x\cdot g(f)(y)$ est un morphisme de l'opération $(E\otimes W(L), d*d_{W(L)} / t*t_{W(L)}, i*i_{W(L)})$ dans l'opération $(E, d/t, i)$. Ce morphisme induit un homomorphisme a_1 de $B_{E\otimes W(L)}$ dans B_E. Appelons a_2 l'injection de B_E dans $B_{E\otimes W(L)}$ et b_1 et b_2 les deux homomorphismes de $I_{S(L)}$ dans $B_{E\otimes W(L)}$. Notons par a_1^*, a_2^*, b_1^* et b_2^* les homomorphismes correspondants en cohomologie.

Les homomorphismes $a_1\circ b_1$ et $a_1\circ b_2$ sont égaux et l'homomorphisme $a_1\circ a_2$ est égal à l'identité. Par conséquent les homomorphismes $a_1^*\circ b_1^*$ et $a_1^*\circ b_2^*$ sont égaux et l'homomorphisme $a_1^*\circ a_2^*$ est égal à l'identité. D'après le théorème 26.1, l'homomorphisme a_2^* est un isomorphisme, par conséquent a_1^* est aussi un isomorphisme et les homomorphismes b_1^* et b_2^* sont égaux, ce qu'il fallait démontrer.

Voici le second corollaire des trois théorèmes.

THÉORÈME 28.3. *Tous les espaces vectoriels $H^p(I_{W(L)})$ sont nuls, sauf $H^0(I_{W(L)})$ dont la dimension est égale à 1.*

Appliquons le théorème 27.3 à l'opération $(A(L), d_{A(L)} / t_{A(L)}, i_{A(L)})$. En vertu du lemme 15.10, les différentielles $d_{W(L)}$ et $D_{A(L)}$ de $I_{A(L)\otimes S(L)}$ sont égales. D'après le théorème 27.1, les algèbres graduées $H(I_{W(L)})$ et $H(B_{A(L)})$ sont isomorphes, par conséquent. Tous les espaces vectoriels $B^p_{A(L)}$ sont nuls, sauf $B^0_{A(L)}$ dont la dimension est égale à 1, ce qui démontre le théorème.

Voici une conséquence de ce théorème.

THÉORÈME 28.4. *Soient L une algèbre de Lie reductive et w une transgression de l'algèbre de Weil de L. Cet homomorphisme de degré $+1$ de $P(L)$ dans $I_{S(L)}$ se prolonge en un isomorphisme de l'algèbre graduée $X(P(L))$ sur l'algèbre graduée $I_{S(L)}$.*

Rappelons que selon nos conventions, les éléments de $P(L)$ dans $X(P(L))$ ont leurs degrés majorés de 1. Utilisons le lemme 24.9 et le théorème 23.4 et remarquons que la différentielle est nulle sur $I_{S(L)}$ égal à $B_{W(L)}$. Ainsi l'algèbre graduée $H(I_{W(L)})$ est isomorphe à l'algèbre graduée $H(I_{A(L)}\otimes I_{S(L)}, d_K)$: la différentielle d_K est nulle sur $1\otimes I_{S(L)}$ et est égale sur $P(L)\otimes 1$ au composé de la projection de $P(L)\otimes 1$ sur $P(L)$, de la transgression w de $P(L)$ dans $I_{S(L)}$ et de l'injection de $I_{S(L)}$ dans $I_{A(L)}\otimes I_{S(L)}$. Autrement dit, si on prolonge w en un homomorphisme de $X(P(L))$ dans $I_{S(L)}$, la cohomologie de cette $X(P(L))$-algèbre U-graduée $I_{S(L)}$ est isomorphe à l'algèbre de cohomologie de $I_{W(L)}$, qui est triviale. Le théorème 10.2 démontre que l'homomorphisme de $X(P(L))$ dans $I_{S(L)}$ est un isomorphisme.

29. Solution du deuxième problème. Soit $(E,d/t,i)$ une opération d'une algèbre de Lie L avec une connexion. D'après les théorèmes 26.1 et 27.1, on peut remplacer l'algèbre B_E par l'algèbre $I_{E\otimes S(L)}$ avec la différentielle D_E, pour résoudre le deuxième, problème par la théorie de Hirsch-Koszul.

Reportons-nous au paragraphe 7 et posons $(I_{E\otimes S(L)})_p$ égal à $I_{E\otimes S^p(L)}$. D'après le théorème 27.3, la différentielle corrigée de $I_{E\otimes S(L)}$ est égal à $d\otimes 1$. Par conséquent l'algèbre K est isomorphe à $H(I_{E\otimes S(L)}, d\otimes 1)$ et l'algèbre K_0, à $H(I_E)$. Si la dimension du sous-espace des cocycles de degré 0 de I_E est égale à 1, l'algèbre B est égale à $1\otimes I_{S(L)}$. D'autre part, l'espace $I_{E\otimes S^1(L)}$ est nul. Tout notre intérêt doit donc se porter sur *l'homomorphisme fondamental du deuxième problème*, celui de $H(I_E)\otimes I_{S(L)}$ dans $H(I_{E\otimes S(L)}, d\otimes 1)$, dû à l'injection de $I_E\otimes I_{S(L)}$ dans $I_{E\otimes S(L)}$. Nous avons démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 29.1. *Soit $(E, d/t, i)$ une opération d'une algèbre de Lie avec une connexion. Supposons la dimension de $H(I_E)$ finie et celle de $H^0(I_E)$ égale à* 1. *Si l'homomorphisme fondamental du deuxième problème est un isomorphisme, alors il existe une différentielle d_K de l'espace vectoriel gradué $H(I_E)\otimes I_{S(L)}$ telle que les espaces vectoriels gradués $H(B_E)$ et $H(H(I_E)\otimes I_{S(L)}, d_K)$ soient isomorphes. La différentielle d_K est nulle sur $1\otimes I_{S(L)}$.*

Nous pouvons compléter ce théorème par le suivant:

THÉORÈME 29.2. *Soit $(E, d/t, i)$ une opération d'une algèbre de Lie L avec une connexion. Supposons la dimension de $H(I_E)$ finie et celle de $H^0(I_E)$ égale à* 1. *L'homomorphisme fondamental du deuxième problème est supposé être un isomorphisme. Puisque la différentielle d_K est nulle sur $1\otimes I_{S(L)}$, l'injection de $I_{S(L)}$ dans $H(I_E)\otimes I_{S(L)}$ détermine un homomorphisme de $I_{S(L)}$ dans $H(H(I_E)\otimes I_{S(L)}, d_K)$ qui est égal au composé de l'homomorphisme de $I_{S(L)}$ dans $H(B_E)$ dû à une connexion et de l'isomorphisme de $H(B_E)$ sur $H(H(I_E)\otimes I_{S(L)})$. Puisque la différentielle d_K envoie $H(I_E)\otimes I_{S(L)}$ dans $H(I_E)\otimes I^+_{S(L)}$, la projection de $H(I_E)\otimes I_{S(L)}$ sur $H(I_E)$ détermine un homomorphisme de $H(H(I_E)\otimes I_{S(L)})$ dans $H(I_E)$ qui est égal au composé de l'inverse de l'isomorphisme de $H(B_E)$ sur $H(H(I_E)\otimes I_{S(L)}, d_K)$ et de l'homomorphisme de $H(B_E)$ dans $H(I_E)$ dû à l'injection de B_E dans I_E.*

Les théorèmes 3.1 et 4.4 de la théorie de Hirsch-Koszul permettent de remplacer les deux homomorphismes concernant $H(H(I_E)\otimes I_{S(L)}, d_K)$ par deux homomorphismes concernant $H(I_{E\otimes S(L)}, D_E)$. Le premier est celui de $I_{S(L)}$ dans $H(I_{E\otimes S(L)}, D_E)$ dû à l'injection de $I_{S(L)}$ dans $I_{E\otimes S(L)}$. Le second est celui de $H(I_{E\otimes S(L)}, D_E)$ dans $H(I_E)$ dû à la projection de $I_{E\otimes S(L)}$ sur I_E. Le composé de l'injection de B_E dans $I_{E\otimes S(L)}$ et de la projection de $I_{E\otimes S(L)}$ sur I_E est égal à l'injection de B_E dans I_E. Cette remarque et le théorème 28.2 terminent la démonstration.

Le théorème 20.2 appliqué à l'opération $(E, d/t, i)$ et à la représentation $(S(L)/t_{S(L)})$ démontre immédiatement le résultat suivant.

THÉORÈME 29.3. *Soit $(E, d/t, i)$ une opération d'une algébre de Lie. Si l'algèbre de Lie est réductive et si l'algèbre graduée E est presque finie,* *l'homomorphisme on damental du deuxième problème est un isomorphisme.*

30. Application aux deux exemples. Dans l'exemple des espaces fibrés principaux connexes, la dimension de $H(I_E)$ est finie et celle de $H^0(I_E)$ égale à 1. D'autre part nous pouvons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 30.1. *Dans l'exemple des espaces fibrés principaux, l'homomorphisme fondamental du deuxième problème est un isomorphisme, si le groupe est compact.*

Il nous faut appliquer le théorème 19.4. Nous savons que l'homomorphisme canonique de $H(I_E)$ dans $H(E)$ est un isomorphisme (théorème 21.2). Il suffit donc de démontrer que l'homomorphisme canonique de $H(I_{E\otimes S(L)},\ d\otimes 1)$ dans $H(E\otimes S(L),\ d\otimes 1)$ est un monomorphisme.

En voici la démonstration, sans entrer dans les détails. On fait opérer le groupe G sur son algèbre de Lie L, puis on fait opérer G sur $S(L)$. Alors$E\otimes S^n(L)$ est isomorphe à l'espace vectoriel des formes différentielles de l'espace fibré à valeurs dans l'espace vectoriel $S^n(L)$et $I_{E\otimes S^n(L)}$ est isomorphe au sous-espace des formes équivariantes (voir le paragraphe 2 de l'article de Chevalley-Eilenberg déja mentionné). Le théorème 2.1 de cet article nous permet d'affirmer que l'homomorphisme de $H(I_{E\otimes S(L)},\ d\otimes 1)$ dans $H(E\otimes S(L),\ d\otimes 1)$ est un monomorphisme.

Dans l'exemple des sous-algèbres de Lie, d'après le théoréme 29.3, on peut appliquer la théorie si l'algèbre de Lie L est réductive dans l'algèbre L'. D'autre part, voici un lemme qui va nous permettre d'utiliser d'une manière beaucoup plus complète la théorie de Hirsch-Koszul.

Si les algèbres L et L' sont égales, l'algèbre $I_{E\otimes S(L)}$ est égale à $I'_{A(L')\otimes S(L')}$, la différentielle D_E est égale à $-d_{W(L')}$ et la filtration de l'algèbre $I'_{A(L')\otimes S(L')}$ est la même que celle de $I'_{W(L')}$ utilisée dans la solution du premier problème. Par conséquent, si l'algèbre de Lie L' est réductive, les éléments de $P(L')\otimes 1$ de $I'_{A(L')\otimes S(L')}$ sont transgressifs pour la filtration du deuxième problème et si w est une transgression de l'algèbre de Weil, $-w$ est une transgression pour le deuxième problème dans le cas qui nous occupe.

Si les algèbres L et L' sont différentes, on a un homomorphisme canonique de l'algèbre différentielle $(I'_{A(L')\otimes S(L')},\ D_{A(L')})$ filtrée pour le deuxième problème, dans l'algèbre différentielle $(I_{A(L')\otimes S(L)},\ D_{A(L')})$ filtrée pour le deuxième problème. Le lemme suivant est alors évident.

LEMME 30.2. *Soit L une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie L' réductive. Les éléments de $P(L')\otimes 1$ de l'algèbre différentielle $(I_{A(L')\otimes S(L)},\ D_{A(L')})$ filtrée pour le deuxième problème sont transgressifs. L'homomorphisme canonique de $I'_{W(L')}$ dans $I_{A(L')\otimes S(L)}$ composé avec une transgression de l'algèbre de Weil $W(L')$ est égal au signe près à une transgression de l'algèbre différentielle filtrée en question.*

D'aprés les théorèmes 20.4 et 21.4, l'injection de $P(L')$ dans $H(I_{A(L')})$ se prolonge en un isomorphisme de $C(P(L'))$ sur $H(I_{A(L')})$, si l'algèbre de Lie L' est réductive et si l'algèbre de Lie L est réductive dans L'. L'algèbre différentielle $(I_{A(L')\otimes S(L)}, D_{A(L')})$ filtrée pour le deuxième problème a alors une structure d'algèbre de Chevalley. La différentielle $D_{A(L')}$ est nulle sur $1 \otimes I_{S(L)}$. Il nous est donc possible d'appliquer le théorème 10.1, de la théorie des X-algèbres U-graduées.

THÉORÈME 30.3. *Soient L une sous-algèbre de Lie réductive dans l'algèbre de Lie réductive L' et w, une transgression de l'algèbre de Weil $W(L')$, qui envoie $P(L')$ dans $I'_{S(L')}$. Appelons q l'homomorphisme canonique de $I'_{S(L')}$ dans $I_{S(L)}$. L'homomorphisme $q\circ w$ se prolonge en un homomorphisme de $X(P(L'))$ dans $I_{S(L)}$, qui donne à $I_{S(L)}$ une structure de $X(P(L'))$-algèbre U-graduée, dont l'algèbre de cohomologie est isomorphe à l'algèbre $H(B_{A(L')})$.*

D'après le théorème 28.4, nous connaissons la struture de $I_{S(L)}$. Nous pouvons donc utiliser les résultats du paragraphe 12. Transcrivons les résultats des théorèmes 10.4, 11.3 et 12.5 au cas particulier qui nous intéresse.

THÉORÈME 30.4. *Soient L' une algèbre de Lie réductive et L une sous-algèbre de Lie de L' reductive dans L' Considérons l'opération $(A(L'), d_{A(L)} / t_{A(L')}, i_{A(L)})$ et appelons M l'image de $H(B_{A(L')}$ dans $H(A(L'))$ par l'homomorphisme dû à l'injection de $B_{A(L')}$ dans $A(L')$, N le sous-espace de M des classes de cohomologie primitives de $H(A(L'))$ appartenant à M, $r(L)$ et $r(L')$ les dimensions des espaces vectoriels des éléments primitifs de $A(L)$ et de $A(L')$. Alors l'injection de N dans M peut être prolongée en un isomorphisme de l'algèbre extérieure $C(N)$ sur M. La dimension n de N est inférieure ou égale à $r(L')-r(L)$. Le cas de l'égalité a lieu si et seulement si le noyau de l'homomorphisme de $H(B_{A(L')})$ dans $H(A(L'))$ est égal à l'idéal de $H(B_{A(L')})$ engendré par l'image de $I^+_{S(L)}$ par l'homomorphisme de $I_{S(L)}$ dans $H(B_{A(L)})$ dû à une connexion de l'opération. En outre dans le cas de l'égalité le polynôme de Poincaré de $H(B_{A(L')})$ est donné par la formule suivante: soient $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_{r'}$ les degrés des éléments d'une base homogène de l'espace des éléments primitifs de $A(L')$, $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r$ les degrés des éléments d'une base homogène de l'espace des éléments primitifs de $A(L)$ et $c_1, c_2 \cdots\cdots, c_n$ les degrés des éléments d'une base homogène de N, alors le polynôme de Poincaré de $H(B_{A(L')})$ est égal à:*

$$\prod_{1\leq j\leq z} 1/(1-x^{a_i+1})\cdot \prod_{1\leq j\leq z'} (1-x^{b_j+1})\cdot \prod_{1\leq k\leq n} (1+x^{c_k})/(1-x^{c_k+1})$$

Voici un exemple pour lequel l'égalité a lieu.

THÉORÈME 30.5. *Soient L' une algèbre de Lie et L une sous-algèbre réductive dans L'. Considérons l'opération $(A(L'), d_{A(L')} / t_{A(L')}, i_{A(L')})$. Si la différentielle $d_{A(L')}$ est nulle sur $B_{A(L')}$, alors le noyau de l'homomorphisme canonique de $H(B_{A(L')})$dans $H(A(L'))$ est égal à l'idéal de $H(B_{A(L')})$ engendré par l'image de $I^+_{S(L)}$ par l'homomorphisme canonique de $I_{S(L)}$ dans $H(B_{A(L')})$.*

D'après le théorème 24.6, nous pouvons appliquer le théorème 23.4. Le noyau de l'homomorphisme de $H(B_{A(L')})$ égal à $B_{A(L')}$ est égal à $d_E(P(L)\otimes B_{A(L')})$, c'est-à-dire à $I_{S(L)}^{L}\cdot B_{A(L')}$, ce qu'il fallait démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CARTAN, Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, Ann. Soc. pol. Math., 8 (1929), 181-225.
[2] H. CARTAN, Notions d'algèbre différentielle, application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie, Colloques de topologie algèbrique de Bruxelles, 1(1952), 15-27.
[3] H. CARTAN, Transgression dans un groupe de Lie, et dans un espace fibré principal, Colloque de toprlogie algèbrique de Bruxelles, 1(1951), 57-71.
[4] H. CARTAN-S. EILENBERG, Homological algebra.
[5] C. CHEVALLEY-S. EILENBERG, Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 63(1948), 85-124.
[6] C. EHRESMANN, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de topologie algèbrique de Bruxelles, (1951), 29-55.
[7] J. L. KOSZUL, Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, Bull. Soc. Math. France, 78 (1950), 65-127.
[8] J. L. KOSZUL, Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression, Colloque de topologie algèbrique de Bruxelles, 1(1951), 73-81.
[9] VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra.

INSTITUTE BATTELLE, CAROCUGE GENÈVE