ÜBER SÄTZE VOM BOHR-HARDY'SCHEN TYP

W. JURKAT UND A. PEYERIMHOFF

(Received November 17, 1964)

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit Verallgemeinerungen eines Satzes von Bohr und Hardy (vgl. [6] S. 128 und die auf S. 146 genannte Literatur) und seiner Erweiterung durch Andersen [1] und Bosanquet [3]. Dieser Satz bezieht sich auf Cesàroverfahren und es ist bekannt (vgl. [8]), dass ein entsprechendes Ergebnis auch für allgemeine Matrixtransformationen gilt, die einen gewissen Mittelwertsatz erfüllen. Im Fall der Cesàroverfahren ist dieser Mittelwertsatz dann erfüllt, wenn der Index zwischen 0 und 1 liegt. Diese Situation legt natürlich die Frage nahe, ob ein allgemeiner Satz gefunden werden kann, der alle Cesàroverfahren enthält. Zur Untersuchung dieser Frage stellen wir Bedingungen auf, unter denen aus der Gültigkeit eines Bohr-Hardy'schen Satzes für eine Matrix B auch auf die Gültigkeit für BP geschlossen werden kann, wo P ein bewichtetes arithmetisches Mittel ist (Sätze 1 und 2). Durch Iteration dieses Ergebnisses ist es im Spezialfall der Cesàroverfahren sofort möglich (indem für B ein Cesàroverfahren mit einem Index zwischen 0 und 1 eingesetzt wird), den Bohr-Hardy'schen Satz für alle Cesàroverfahren zu erhalten. Eine Iteration dieser Art ist auch im allgemeinen Fall möglich und liefert ein Analogon zum Satz von Bohr-Hardy bei Matrizen der Form BP^k (Sätze 3 und 4), wobei für B ein derartiger Satz schon gelte (was sicher dann zutrifft, wenn B einen Mittelwertsatz erfüllt). Die Sätze 5 und 6 dienen der weiteren Untersuchung der in den Sätzen 1 und 2 gemachten Voraussetzungen; im Satz 5 wird das unstetige Riesz'sche Verfahren $R^*(n, 2)$, im Satz 6 das Quadrat eines bewichteten arithmetischen Mittels untersucht.

Mit den in dieser Arbeit verwendeten Methoden hat H. Fiedler [4] den speziellen Fall der Riesz'schen Verfahren (R, n, κ) behandelt.

1. Bezeichnungen und Hilfsmittel. Wir betrachten im folgenden Dreiecksmatrizen $A = (a_{n\nu})$, $n, \nu = 0, 1, \cdots$ $(a_{n\nu} = 0$ für $\nu > n)$. Die Matrix A heisst normal, wenn $a_{nn} \neq 0$ ist. Für eine Folge $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ schreiben wir

$$(1) \qquad \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu} \bar{a}_{n\nu} a_\nu \quad \left(\bar{a}_{n\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{\infty} a_{n\mu}\right), \quad \bar{A} = (\bar{a}_{n\nu})$$

und

$$(2)\qquad \sigma_n-\sigma_{n-1}=\sum_{\nu=0}^{n}\hat{a}_{n\nu}a_\nu, \widehat{A}=(\hat{a}_{n\nu})\quad (\sigma_{-1}=0).$$

Für die inversen Matrizen sei $A^{-1}=(a'_{n\nu})$, $\overline{A}^{-1}=(\overline{a}'_{n\nu})$, $\widehat{A}^{-1}=(\hat{a}'_{n\nu})$ (falls A normal ist).

Eine Folge $\{s_n\}$ (Reihe $\sum a_n$) heisst A-limitierbar (A-summierbar) zum Wert s, wenn gilt $\sigma_n\to s$. Ist eine Folge $\{\lambda_n\}$ so beschaffen, dass $\{\lambda_n s_n\}$ (bzw. $\sum\lambda_n a_n$) A-limitierbar (bzw. A-summierbar) ist für jede A-limitierbare Folge $\{s_n\}$ (bzw. jede A-summierbare Reihe $\sum a_n$), so schreiben wir $\lambda_n\in A_f$ (bzw. $\lambda_n\in A_r$). Sind A und B so beschaffen, dass jede B-limitierbare Folge auch A-limitierbar ist, so schreiben wir $B\subseteqq A$. Ist noch $A\subseteqq B$, so schreiben wir $A\approx B$.

Mit E bezeichnen wir die Einheitsmatrix und mit $P=(p_{n\nu})$ bewichtete arithmetische Mittel, $p_{n\nu}=\dfrac{p_\nu}{P_n}$ $(\nu\leqq n)$, $p_{n\nu}=0$ $(\nu>n)$, $p_n\neq 0$, $P_n=p_0+\cdots+p_n\neq 0$, $n=0,1,\cdots$.

Von besonderer Bedeutung sind Matrizen A, für die eine Abschätzung

$$(3)\qquad \left|\sum_{\nu=0}^{m}a_{n\nu}s_\nu\right|\leqq K\left|\sum_{\nu=0}^{n'}a_{n'\nu}s_\nu\right|\quad (0\leqq n'\leqq m\leqq n)$$

gilt (vgl. [8]). Hinreichend für (3) mit $K=1$ sind z.B. die Bedingungen

$$(4)\quad a_{n\nu}>0\ (\nu\leqq n), \sum_{\nu=0}^{n}a_{n\nu}=1,\ \frac{a_{n+1,0}}{a_{n0}}\geqq\frac{a_{n+1,1}}{a_{n1}}\geqq\cdots\geqq\frac{a_{n+1,n}}{a_{nn}}\ (n=0,1,\cdots)$$

(vgl. [9] S. 153-155, wo in diesem Fall die Bedingung $0\leqq\dfrac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}}\leqq K$ $(0\leqq\nu\leqq n\leqq m)$ nicht benötigt wird). Aus (4) (auch ohne $\sum_{\nu=0}^{n}a_{n\nu}=1$) folgt, dass

$$(5)\qquad a'_{n\nu}\leqq 0\ (\nu<n,\ n=1,2,\cdots)$$

ist (vgl. [7], [14] theorem 5).

Bekannt sind die folgenden Sätze.

SATZ I. *Es sei A normal, dreieckig, permanent und erfülle* (3). *Genau dann ist $\varepsilon_\nu\in A_r$, wenn gilt*

$$(6)\qquad \varepsilon_\nu-c=\varepsilon_\nu(\overline{A},\alpha)=\sum_{n=\nu}^{\infty}\alpha_n\overline{a}_{n\nu}\quad (\textstyle\sum|\alpha_n|<\infty,\ c\ \textit{konstant}).$$

Vgl. hierzu [8], Satz 11. (Die in (6) eingeführte Bezeichnung – mit $\alpha = \{\alpha_\nu\}$ – wird im folgenden stets verwendet werden. Über $\bar{A}$ wird dann nur vorausgesetzt, dass die Spalten beschränkt sind.)

SATZ II. *Es sei A normal, dreieckig, permanent und erfülle* (3).
Behauptung. Es ist $\varepsilon_{n+1}(\bar{A}, \alpha) \in A_f$.

Für einen Beweis vgl. [8], Satz 11 (dort wird $s_n\varepsilon_n(\bar{A}, \alpha)$ behandelt; der Beweis im vorliegenden Fall verläuft genau so).

Wir geben zunächst einen neuen Beweis für den hinreichenden Teil von Satz I unter den etwas spezielleren Annahmen (4) über A. Dazu beweisen wir den

HILFSSATZ 1. *Es sei A normal und dreieckig und für $\nu = 0, 1, \cdots$ existiere der* $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{a}_{n\nu}$.

Behauptung. Genau dann ist $\sum a_n\varepsilon_n(\bar{A}, \alpha)$ A-summierbar für alle A-summierbaren Reihen $\sum a_n$ und alle $\alpha = \{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < \infty$, *wenn ein $M > 0$ existiert, so dass gilt*

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \left| \sum_{\nu=\lambda}^{n} \bar{a}_{n\nu} \bar{a}_{\mu\nu} \bar{a}'_{\nu\lambda} \right| \leqq M \text{ für alle } \mu,\ n \text{ mit } \mu \geqq n. \tag{7}$$

BEWEIS. Zunächst ist mit (6) (und $c=0$)

$$\sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_{n\nu} a_\nu \varepsilon_\nu(\bar{A}, \alpha) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_\mu \sum_{\lambda=0}^{m(n,\mu)} \sigma_\lambda \sum_{\nu=\lambda}^{m(n,\mu)} \bar{a}_{n\nu} \bar{a}_{\mu\nu} \bar{a}'_{\nu\lambda} \tag{8}$$

($m(n, \mu) = \mathrm{Min}(n, \mu)$). Aus der Konvergenz von (8) für $n \to \infty$ und alle $\sum |\alpha_\mu| < \infty$ folgt in bekannter Weise (vgl. [2], S. 67, 80 und 86)

$$\left| \sum_{\lambda=0}^{m(n,\mu)} \sigma_\lambda \sum_{\nu=\lambda}^{m(n,\mu)} \bar{a}_{n\nu} \bar{a}_{\mu\nu} \bar{a}'_{\nu\lambda} \right| \leqq C\ (\{\sigma_\nu\}) \tag{9}$$

für alle n, μ. Umgekehrt ist (9) für die Konvergenz von (8) (für $n \to \infty$) wieder hinreichend, da

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\lambda=0}^{m(n,\mu)} \sigma_\lambda \sum_{\nu=\lambda}^{m(n,\mu)} \bar{a}_{n\nu} \bar{a}_{\mu\nu} \bar{a}'_{\nu\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{\mu} \sigma_\lambda \sum_{\nu=\lambda}^{\mu} \bar{a}_{\mu\nu} \bar{a}'_{\nu\lambda} \lim_{n\to\infty} \bar{a}_{n\nu}$$

ist. Wie beim Satz von Teoplitz schliesst man, dass (9) gleichwertig ist mit (7) (aus Symmetriegründen darf $\mu \geqq n$ angenommen werden).

Um den hinreichenden Teil von Satz I aus (4) abzuleiten, zeigen wir zunächst, dass gilt

$$\sum_{\nu=\lambda}^{n} \bar{a}_{n\nu} \bar{a}_{\mu\nu} \bar{a}'_{\nu\lambda} \geqq 0 \quad (\mu \geqq n). \tag{10}$$

Gilt nämlich (10), so ist mit (1) und (4)

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \left| \sum_{\nu=\lambda}^{n} \bar{a}_{n\nu} \bar{a}_{\mu\nu} \bar{a}'_{\nu\lambda} \right| = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_{n\nu} \bar{a}_{\mu\nu} \sum_{\lambda=0}^{\nu} \bar{a}'_{\nu\lambda} = \bar{a}_{n0} \bar{a}_{\mu 0} = 1 .$$

Um (10) nachzuweisen, formen wir die linke Seite von (10) mit (1) und der Beziehung $\bar{a}'_{n\nu} = a'_{n\nu} - a'_{n-1,\nu}$ in folgender Weise um

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=\lambda}^{n} \bar{a}_{n\nu} \bar{a}_{\mu\nu} \bar{a}'_{\nu\lambda} &= \sum_{\nu=\lambda}^{n} (\bar{a}_{\mu\nu} (\bar{a}_{n\nu} - \bar{a}_{n,\nu+1}) + \bar{a}_{n,\nu+1} (\bar{a}_{\mu\nu} - \bar{a}_{\mu,\nu+1}))\, a'_{\nu\lambda} \\ &= \sum_{\nu=\lambda}^{n} (\bar{a}_{\mu\nu} a_{n\nu} + \bar{a}_{n,\nu+1} a_{\mu\nu})\, a'_{\nu\lambda} . \end{aligned} \tag{11}$$

Wegen (5) und $a_{n\nu} \geqq 0$ ist nun

$$\sum_{\nu=\lambda}^{n} \bar{a}_{\mu\nu} a_{n\nu} a'_{\nu\lambda} \geqq \bar{a}_{\mu\lambda} \sum_{\nu=\lambda}^{n} a_{n\nu} a'_{\nu\lambda} \geqq 0$$

und

$$\sum_{\nu=\lambda}^{n} \bar{a}_{n,\nu+1} a_{\mu\nu} a'_{\nu\lambda} \geqq \bar{a}_{n,\lambda+1} \sum_{\nu=\lambda}^{n} a_{\mu\nu} a'_{\nu\lambda} \geqq \bar{a}_{n,\lambda+1} \sum_{\nu=\lambda}^{\mu} a_{\mu\nu} a'_{\nu\lambda} \geqq 0 ,$$

und daraus folgt (10).

Ist A eine dreieckige Matrix und besitzt $\bar{A}$ beschränkte Spalten, so gilt dies wegen (1) auch für A und es ist

$$\varepsilon_n(\bar{A}, \alpha) - \varepsilon_{n+1}(\bar{A}, \alpha) = \varepsilon_n(A, \alpha) . \tag{12}$$

Ist B eine dreieckige Matrix und $A = BP$, so gilt, falls die Spalten von $\bar{A}$ und $\bar{B}$ beschränkt sind

$$(13)\quad [\varepsilon_{n+1}(\bar{A},\alpha)-\varepsilon_n(\bar{A},\alpha)]\frac{P_{n-1}}{p_n}=\varepsilon_n(\bar{A},\alpha)-\varepsilon_n(\bar{B},\alpha)\ (n=0,1,\cdots,\ P_{-1}=0)\,.$$

Zum Beweis bemerken wir, dass $B=AP^{-1}$, also $\bar{B}=\bar{A}\widehat{P}^{-1}$ ist. Es ist $\varepsilon_n(\bar{A},\alpha)$ $-\varepsilon_n(\bar{B},\alpha)=\varepsilon_n(\bar{A}(E-\widehat{P}^{-1}),\alpha)$ und mit $\hat{p}'_{nn}=\frac{P_n}{p_n}$, $\hat{p}'_{n,n-1}=-\frac{P_{n-2}}{p_{n-1}}$, $\hat{p}'_{n\nu}=0$ $\nu\leqq n-2$ ist $\sum_{\mu=\nu}^{n}\bar{a}_{n\mu}(E-\widehat{P}^{-1})_{\mu\nu}=\frac{P_{\nu-1}}{p_\nu}(\bar{a}_{n,\nu+1}-\bar{a}_{n\nu})$ was unmittelbar (13) nach sich zieht.

Sind A und B normale und dreieckige Matrizen und $B\subseteqq A$, so gibt es zu jedem $\alpha=\{\alpha_\nu\}$, $\sum|\alpha_\nu|<\infty$ ein $\beta=\{\beta_\nu\}$ mit $\sum|\beta_\nu|<\infty$, so dass gilt

$$(14)\qquad \varepsilon_n(\bar{A},\alpha)=\varepsilon_n(\bar{B},\beta)\,,$$

falls die Spalten von $\bar{A}$ und $\bar{B}$ beschränkt sind. Dies ergibt sich sofort mit $\beta=\alpha(AB^{-1})$; vgl. [10], Satz 6.

Schliesslich notieren wir noch zwei leicht nachzurechnende Identitäten, die später benötigt werden. Es sei B dreieckig und $A=BP$. Für beliebige $\{\lambda_n\}$ gilt

$$(15)\quad \sum_{\nu=0}^{n}a_{n\nu}\lambda_\nu s_\nu=\sum_{\nu=0}^{n}b_{n\nu}\frac{\lambda_\nu}{P_\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}p_\mu s_\mu-\sum_{\nu=1}^{n}a_{n\nu}\frac{P_{\nu-1}}{p_\nu}(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})\frac{1}{P_{\nu-1}}\sum_{\rho=0}^{\nu-1}p_\rho s_\rho$$

und

$$(16)\quad \sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\lambda_\nu=a_0\lambda_0+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\lambda_\nu}{P_{\nu-1}}P_{\nu-1}a_\nu$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu\widehat{P}_\nu(a_k)-\sum_{\nu=1}^{n}(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)\frac{P_{\nu-1}}{p_\nu}\widehat{P}_\nu(a_k)+\lambda_{n+1}s_n-\frac{\lambda_{n+1}}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu s_\nu\,,$$

wo $\widehat{P}_n(a_k)=\sum_{k=0}^{n}\hat{p}_{nk}a_k$ sei.

2. Der Schluss von B auf BP.

HILFSSATZ 2. *Es sei B eine dreieckige Matrix und $A=BP$. Ist $\{\lambda_n\}$ eine Folge mit $\lambda_n\in B_f$ und ist $t_n=(\lambda_n-\lambda_{n-1})\frac{P_{n-1}}{p_n}s_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots,\ t_0=0)$ stets A-limitierbar für jede B-limitierbare Folge $\{s_n\}$, so ist $\lambda_n\in A_f$.*

BEWEIS. Dies folgt sofort aus (15).

HILFSSATZ 3. *Es sei B eine dreieckige Matrix und $A = BP$*[1]. *Ist* $\lambda_n = \varepsilon_{n+1}(\bar{A}, \alpha) \in B_f$ *und ist* $t_n = (\varepsilon_n(\bar{A}, \alpha) - \varepsilon_n(\bar{B}, \alpha))\, s_{n-1}$ $(n=1, 2, \cdots, t_0=0)$ *stets A-limitierbar für jede B-limitierbare Folge* $\{s_n\}$, *so ist* $\varepsilon_{n+1}(\bar{A}, \alpha) \in A_f$.

BEWEIS. Dies folgt wegen (13) mit $\lambda_n = \varepsilon_{n+1}(\bar{A}, \alpha)$ sofort aus Hilfssatz 2.

Die Hilfssätze 2 und 3 stellen einen Zusammenhang her zwischen Folgen in B_f und A_f. In den folgenden Sätzen 1 und 2 wird eine Beziehung zwischen B_r und A_r hinzugefügt.

SATZ 1. *Es sei B eine dreieckige Matrix und $A = BP$. Ferner gelte*

$$(17) \qquad \begin{cases} B \subseteqq A;\ \textit{ist } \{s_n\}\ B\textit{-limitierbar, so ist } t_n = s_{n-1}\ (n=1, 2, \cdots, t_0 = 0) \\ A\textit{-limitierbar,} \end{cases}$$

und für jedes $\alpha = \{\alpha_n\}$, $\sum |\alpha_n| < \infty$ *gelte*

$$(18) \qquad \varepsilon_{n+1}(\bar{A}, \alpha) \in B_f, \quad \varepsilon_n(\bar{A}, \alpha) \in B_r,$$

$$(19) \qquad \begin{cases} \textit{ist } \{s_n\}\ B\textit{-limitierbar, so ist } t_n = \varepsilon_n(\bar{B}, \alpha)\, s_{n-1}\ (n=1, 2, \cdots, t_0 = 0) \\ A\textit{-limitierbar,} \\ \textit{ist } \sum a_n\ B\textit{-summierbar, so ist } \sum \varepsilon_n(\bar{B}, \alpha) a_n\ A\textit{-summierbar.} \end{cases}$$

Behauptung. Es gilt

$$(20) \qquad \varepsilon_{n+1}(\bar{A}, \alpha) \in A_f, \quad \varepsilon_n(\bar{A}, \alpha) \in A_r$$

für jedes $\alpha = \{\alpha_n\}$, $\sum |\alpha_n| < \infty$.

BEWEIS. Die erste Behauptung in (20) folgt aus Hilfssatz 3 wegen (18), (19) und (17). Zum Beweis der zweiten Behauptung (20) verwenden wir (16) mit $\lambda_n = \varepsilon_n(\bar{A}, \alpha)$. Ist $\{s_n\}$ A-limitierbar, so ist $\sum \hat{P}_\nu(a_k)$ eine B-summierbare Reihe. Wegen (18) ist dann $\sum \lambda_\nu \hat{P}_\nu(a_k)$ auch B-summierbar und wegen (17) auch A-summierbar. Mit (13), (18), (19) und (17) folgt, dass auch $\sum (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) \frac{P_{\nu-1}}{p_\nu} \hat{P}_\nu(a_k)$

1) Hier und in den folgenden Sätzen dieses Paragraphen werde stets angenommen, dass die auftretenden Matrizen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ beschränkte Spalten besitzen. Dies gilt sicher, wenn $\bar{A}$ und $\bar{B}$ permanent sind.

eine A-summierbare Reihe ist. Wegen $\varepsilon_{n+1}(\bar{A},\alpha)\in A_f$ ist $\{\lambda_{n+1}s_n\}$ eine A-summierbare Folge. Ist $\{s_n\}$ A-limitierbar, so ist $\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu$ B-limitierbar und aus (18) und (17) folgt, dass $\frac{\lambda_{n+1}}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu$ A-limitierbar ist.

BEMERKUNGEN. 1. Ist $B\subseteqq A$, so gilt (17), wenn A oder B Indexverschiebung nach links besitzt[2]. Man rechnet leicht nach, dass Indexverschiebung nach links bei jedem permanenten Nörlundverfahren vorhanden ist; sie gilt für ein P mit $|P_n|\to\infty$ genau dann, wenn gilt (Anwendung des Satzes von Toeplitz, vgl. [5])

$$\frac{1}{|P_n|}\sum_{\nu=1}^{n-1}|P_{\nu-1}|\left|\frac{p_\nu}{p_{\nu-1}}-\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu}\right|+\left|\frac{p_nP_{n-1}}{p_{n-1}P_n}\right|=O(1)\ (n\to\infty).$$

Ist P permanent und positiv (d. h. $p_\nu>0$ für $\nu=0,1,\cdots$), so vereinfacht sich diese Bedingung zu

$$\frac{1}{|P_n|}\sum_{\nu=1}^{n-1}P_{\nu-1}\left|\frac{p_\nu}{p_{\nu-1}}-\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu}\right|=O(1)\ (n\to\infty). \tag{21}$$

2. Ist (17) erfüllt und B normal, so folgt die erste Voraussetzung in (18) und (19) (mit (14)) bereits aus

$$\varepsilon_{n+1}(\bar{B},\alpha)\in B_f\ (\text{für jedes } \alpha=\{\alpha_n\},\ \textstyle\sum|\alpha_n|<\infty); \tag{22}$$

in ähnlicher Weise folgt die zweite Voraussetzung in (18) und (19) bereits aus

$$\varepsilon_n(\bar{B},\alpha)\in B_r\ (\text{für jedes } \alpha=\{\alpha_n\},\ \textstyle\sum|\alpha_n|<\infty). \tag{23}$$

Aus diesen Bemerkungen folgt in Verbindung mit Satz 1 der

SATZ 2. *Es sei B eine dreieckige, normale Matrix, $A=BP$ und* (17) *sei erfüllt.*

Gilt $\varepsilon_{n+1}(\bar{B},\alpha)\in B_f$, $\varepsilon_n(\bar{B},\alpha)\in B_r$ *für jedes* $\alpha=\{\alpha_n\}$, $\sum|\alpha_n|<\infty$, so *gilt auch*

$$\varepsilon_{n+1}(\bar{A},\alpha)\in A_f,\ \varepsilon_n(\bar{A},\alpha)\in A_r\quad \textit{für jedes } \alpha.$$

2) Eine Dreiecksmatrix $(c_{n\nu})$ besitzt Indexverschiebung nach links, wenn die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu}s_\nu$ die von $\sum_{\nu=1}^{n} c_{n\nu}s_{\nu-1}$ $(n\to\infty)$ nach sich zieht.

Dieser Satz lässt erkennen, wie Folgen für die Matrix B auch Folgen für die Matrix A erzeugen. Es liegt nahe, diesen Schluss zu iterieren, um so mit Hilfe der Sätze I und II zu Aussagen über Matrizen der Form BP^k zu gelangen. Dies soll im folgenden durchgeführt werden. Zuvor weisen wir noch darauf hin, dass sich aus den Sätzen I und II und aus Satz 2 bereits unmittelbar der Satz von Bohr-Hardy (vgl. [3]) für alle Cesàroverfahren ergibt. Für $0 \leqq \delta \leqq 1$ ist nach Satz I und II

$$\varepsilon_{n+1}(\overline{C}_\delta, \alpha) \in (C_\delta)_f\,, \quad \varepsilon_n(\overline{C}_\delta, \alpha) \in (C_\delta)_r\,.$$

Wir wenden nun Satz 2 sukzessive an auf die Matrizen

$$B = C_\delta,\ A = C_\delta C_1\,;\ B = C_\delta C_1\,,\ A = C_\delta C_1^2\,;\ \cdots;\ B = C_\delta C_1^{n-1}\,,\ A = C_\delta C_1^n\,;\cdots.$$

Wegen $C_\delta C_1^n \approx C_{\delta+n}$ ist nach bekannten Sätzen (17) stets erfüllt ($C_{\delta+n}$ ist ein Nörlundverfahren). Für jedes $\gamma \geqq 0$ folgt dann (mit (14)) $\varepsilon_n(\overline{C}_\gamma, \alpha) \in (C_\gamma)_r$, was die wesentliche Aussage des Bohr-Hardy'schen Satzes darstellt (für die Umrechnung auf die bekannte Form $\sum (n+1)^\gamma |\Delta^{\gamma+1}\varepsilon_n| < \infty$ vgl. [13]).

3. Der Schluss von B auf BP^k. Wir beschäftigen uns zunächst mit der Bedingung (17).

HILFSSATZ 4. *Es sei B eine dreieckige Matrix, $A = BP$ und $A \supseteqq B$. Ferner sei*

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \in B_f\,,\ \frac{p_{n+1}}{P_n} \in B_f\,.$$

Behauptung. Ist $\{s_n\}$ B-limitierbar, so ist $t_n = s_{n-1}$ ($n = 1, 2, \cdots$, $t_0 = 0$) A-limitierbar.

BEWEIS. Wir gehen aus von der Beziehung

$$\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu s_{\nu-1} = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} s_\nu - \frac{p_{n+1}}{P_n} s_n\,. \tag{24}$$

Ist $\{s_n\}$ B-limitierbar, so gilt das auch für das zweite Glied auf der rechten Seite von (24); die B-Limitierbarkeit des ersten Gliedes ergibt sich, wenn man noch beachtet, dass $B \subseteqq BP$ ist.

BEMERKUNG. Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 4 gilt mit der zusätzlichen Annahme $\frac{p_{n+1}}{p_n} \in A_f$ noch: *Besitzt B Indexverschiebung nach links, so gilt dies auch für A.* Dies folgt aus (24) in folgender Weise. Ist $\{s_n\}$ A-limitierbar, so ist das erste Glied rechts in (24) jedenfalls B-limitierbar. Ferner ist

$$\frac{p_{n+1}}{P_n} s_n = \frac{p_{n+1}}{p_n} \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu - \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} - \frac{p_{n+1}}{P_n} \right) \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu s_\nu$$

und daraus ist zu ersehen, dass $\left\{ \frac{p_{n+1}}{P_n} s_n \right\}$ auch B-limitierbar ist. Im folgenden sei zur Abkürzung

$$\left(\frac{P_n}{p_{n+1}} \Delta \right)^s \lambda_n = \frac{P_n}{p_{n+1}} \left(\left(\frac{P_n}{p_{n+1}} \Delta \right)^{s-1} \lambda_n - \left(\frac{P_{n+1}}{p_{n+2}} \Delta \right)^{s-1} \lambda_{n+1} \right), \quad s=1,2,\cdots,$$

$$\left(\frac{P_n}{p_{n+1}} \Delta \right)^0 \lambda_n = \lambda_n \text{ gesetzt}.$$

HILFSSATZ 5. *Es sei B eine dreieckige Matrix; k sei eine natürliche Zahl.*

Behauptung. Ist $\frac{p_{n+1}}{P_{n+s}} \in B_f$, $\left(\frac{P_n}{p_{n+1}} \Delta \right)^s \frac{p_{n+1}}{p_n} \in B_f$ *für* $s = 0, 1, \cdots, k$,

so ist $\frac{p_{n+\nu+1}}{P_{n+\nu}} \in B_f$, $\frac{p_{n+\nu+1}}{p_{n+\nu}} \in B_f$ *für* $\nu = 1, 2, \cdots, k$.

BEWEIS. Wir beweisen zunächst durch Induktion nach $i = 1, 2, \cdots$:

Ist $\left(\frac{P_n}{p_{n+1}} \Delta \right)^s \frac{p_{n+1}}{p_n} \in B_f$, $s=0, 1, \cdots, k$ und $\frac{p_{n+1}}{P_n} \in B_f$, $\frac{p_{n+2}}{P_{n+1}} \in B_f$, $\cdots$, $\frac{p_{n+i+1}}{P_{n+i}} \in B_f$ für ein i mit $0 \leqq i \leqq k-1$, so gilt

$$\left(\frac{P_{n+i+1}}{p_{n+i+2}} \Delta \right)^s \frac{p_{n+i+2}}{p_{n+i+1}} \in B_f, \; s = 0, 1, \cdots, k - i - 1.$$

Für $i = 0$ ist dies richtig wegen $(s = 0, 1, \cdots, k-1)$

$$\left(\frac{P_{n+1}}{p_{n+2}} \Delta \right)^s \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} = \left(\frac{P_n}{p_{n+1}} \Delta \right)^s \frac{p_{n+1}}{p_n} - \frac{p_{n+1}}{P_n} \left(\frac{P_n}{p_{n+1}} \Delta \right)^{s+1} \frac{p_{n+1}}{p_n}.$$

Allgemein schliessen wir von der Richtigkeit für i auf die von $i+1$ durch

$$\left(\frac{P_{n+i+2}}{p_{n+i+3}}\Delta\right)^s \frac{p_{n+i+3}}{p_{n+i+2}} = \left(\frac{P_{n+i+1}}{p_{n+i+2}}\Delta\right)^s \frac{p_{n+i+2}}{p_{n+i+1}} - \frac{p_{n+i+2}}{P_{n+i+1}}\left(\frac{P_{n+i+1}}{p_{n+i+2}}\Delta\right)^{s+1} \frac{p_{n+i+2}}{p_{n+i+1}}$$

($s=0, 1, \cdots, k-i-2$). Die damit bewiesene Behauptung zeigt speziell, dass aus $\left(\frac{P_n}{p_{n+1}}\Delta\right)^s \frac{p_{n+1}}{p_n} \in B_f$, $s=0, 1, \cdots, k$ und $\frac{p_{n+j+1}}{P_{n+j}} \in B_f$ $0 \leqq j \leqq i$ auch ($s=0$!) $\frac{p_{n+j+2}}{p_{n+j+1}} \in B_f$ folgt; dies zieht wegen $\frac{p_{n+1}}{P_{n+s}} \in B_f$ ($s=0, 1, \cdots, k$) auch $\frac{p_{n+i+2}}{P_{n+i+1}} = \frac{p_{n+i+2}}{p_{n+i+1}} \frac{p_{n+i+1}}{p_{n+i}} \cdots \frac{p_{n+1}}{P_{n+i+1}} \in B_f$ nach sich. Dieser Schluss, angewandt auf $i=0$, $1, \cdots, k-1$, ergibt aber gerade die Behauptung des Hilfssatzes.

HILFSSATZ 6. *Es sei B eine dreieckige Matrix, $A = BP$ und $A \supseteqq B$. Behauptung. Gilt für eine natürliche Zahl k*

$$\frac{p_{n+1}}{P_{n+s}} \in B_f, \quad \left(\frac{P_n}{p_{n+1}}\Delta\right)^s \frac{p_{n+1}}{p_n} \in B_f, \quad s=0, 1, \cdots, k \tag{25}$$

so ist

$$\frac{p_{n+1}}{P_{n+s}} \in A_f, \quad \left(\frac{P_n}{p_{n+1}}\Delta\right)^s \frac{p_{n+1}}{p_n} \in A_f, \quad s=0, 1, \cdots, k-1. \tag{26}$$

BEWEIS. Wir benutzen zum Beweis den folgenden Spezialfall des Hilfssatzes 2: Ist $\lambda_n \in B_f$, $(\lambda_n - \lambda_{n+1}) \frac{P_n}{p_{n+1}} \in B_f$ und gilt (17), so ist $\lambda_n \in A_f$. Es folgt, dass (26) richtig ist, falls für $s=0, 1, \cdots, k-1$ gilt ((17) ist nach Hilfssatz 4 erfüllt)

$$\frac{p_{n+1}}{P_{n+s}} \in B_f, \tag{27}$$

$$\left(\frac{P_n}{p_{n+1}}\Delta\right)^s \frac{p_{n+1}}{p_n} \in B_f, \tag{28}$$

$$\frac{P_n}{p_{n+1}}\left(\frac{p_{n+2}}{P_{n+s+1}} - \frac{p_{n+1}}{P_{n+s}}\right) \in B_f, \tag{29}$$

$$\left(\frac{P_n}{p_{n+1}}\Delta\right)^{s+1} \frac{p_{n+1}}{p_n} \in B_f. \tag{30}$$

Die Bedingungen (27), (28) und (30) folgen sofort aus (25). Mit Hilfssatz 5 folgt (29) aus (25) wegen

$$\frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} \frac{P_n}{P_{n+s+1}} = \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}}\left(1 - \frac{p_{n+1}}{P_{n+s+1}} - \cdots - \frac{p_{n+s+1}}{P_{n+s+1}}\right)$$

und

$$\frac{P_n}{P_{n+s}} = 1 - \frac{p_{n+1}}{P_{n+s}} - \cdots - \frac{p_{n+s}}{P_{n+s}}\,.$$

Wir sind nun in der Lage, die im Anschluss an Satz 2 angedeutete Iteration dieses Satzes durchzuführen.

SATZ 3. *Es sei B eine dreieckige, normale Matrix, $BP \supseteqq B$, $k \geqq 0$ eine ganze Zahl und* (25) *sei erfüllt.*

Behauptung. Ist $\varepsilon_{n+1}(\overline{B}, \alpha) \in B_f$, $\varepsilon_n(\overline{B}, \alpha) \in B_r$ für jedes $\alpha = \{\alpha_n\}$, $\sum |\alpha_n| < \infty$, so gilt auch $\varepsilon_{n+1}(\overline{BP^{k+1}}, \alpha) \in (BP^{k+1})_f$, $\varepsilon_n(\overline{BP^{k+1}}, \alpha) \in (BP^{k+1})_r$.

BEWEIS. Es ist $B \subseteqq BP \subseteqq BP^2 \subseteqq \cdots \subseteqq BP^{k+1}$ und aus Hilfssatz 6 folgt, dass $\frac{p_{n+1}}{P_{n+s}} \in (BP^\mu)_f$, $\left(\frac{P_n}{p_{n+1}}\Delta\right)^s \frac{p_{n+1}}{p_n} \in (BP^\mu)_f$, $\mu = 0, 1, \cdots, k$, $s = 0, 1, \cdots, k-\mu$. Insbesondere ist $\frac{p_{n+1}}{P_n} \in (BP^\mu)_f$, $\frac{p_{n+1}}{p_n} \in (BP^\mu)_f$, $\mu = 0, 1, \cdots, k$, woraus wegen Hilfssatz 4 die Behauptung aus Satz 2 folgt.

BEMERKUNG. Sind die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt und besitzt B Indexverschiebung nach links, so gilt dies auch für $BP, \cdots, BP^k$. Dies folgt aus der Bemerkung zu Hilfssatz 4 und den im Beweis von Satz 3 nachgewiesenen Beziehungen $\frac{p_{n+1}}{P_n} \in (BP^\mu)_f$, $\frac{p_{n+1}}{p_n} \in (BP^\mu)_f$, $\mu = 0, 1, \cdots, k$.

Durch die Verwendung der Sätze I und II ergibt sich

SATZ 4. *Es sei B eine dreieckige, normale Matrix und P sei positiv. Beide Verfahren seien permanent und es gelte* (4) *für B. Ferner sei $\frac{p_\nu}{b_{n\nu}} \geqq \frac{p_{\nu+1}}{b_{n,\nu+1}}$ $\nu = 0, 1, \cdots, n-1$, $n = 1, 2, \cdots$ und für eine ganze Zahl $k \geqq 0$ sei*

$$(31)\quad \sum_0^\infty \left| \Delta \frac{p_{n+1}}{P_{n+s}} \right| < \infty\,, \quad \sum_0^\infty \left| \Delta \left(\frac{P_n}{p_{n+1}}\Delta\right)^s \frac{p_{n+1}}{p_n} \right| < \infty \quad \textit{für } s = 0, 1, \cdots, k\,.$$

Behauptung. Es ist $\varepsilon_{n+1}(\overline{BP}^{k+1}, \alpha) \in (BP^{k+1})_f$, $\varepsilon_n(\overline{BP}^{k+1}, \alpha) \in (BP^{k+1})_r$.

BEWEIS. Der Quotient $(BP)_{n\nu}/b_{n\nu} = \dfrac{p_\nu}{b_{n\nu}} \sum\limits_{\mu=\nu}^{n} \dfrac{b_{n\mu}}{P_\mu}$ fällt (bei festem n) für wachsendes ν und daraus folgt nach [9] Satz 6, dass $BP \supseteqq B$ ist. Ferner folgt (25) aus (31) nach [9], Bemerkung zu Satz 5. Damit ergibt sich die Behauptung aus Satz I, Satz II und Satz 3.

Man erkennt, dass die Voraussetzungen von Satz 4 für $B = C_\delta$, $0 \leqq \delta \leqq 1$ $P = C_1$ erfüllt sind, so dass sich aus Satz 4 wieder der Satz von Bohr-Hardy für alle Cesàroverfahren ergibt.

4. Das unstetige Riesz'sche Verfahren $\boldsymbol{R^*(n, 2)}$. Als Anwendung der Ergebnisse des §2 untersuchen wir das Verfahren $R^*(n, 2)$. Dieses Beispiel lässt die Bedeutung der Voraussetzungen in Satz 1 gut erkennen; zur Behandlung reicht hier der Satz 2 nicht aus.

Das Verfahren $R^*(n, 2)$ wird gegeben durch die Matrix $R_2^* = (a_{n\nu})$ mit $\bar{a}_{n\nu} = \dfrac{(n+1-\nu)^2}{(n+1)^2}$, $\nu = 0, 1, \cdots, n$, $\bar{a}_{n\nu} = 0$, $\nu > n$. Man rechnet leicht nach, dass $R_2^* \approx C_2 - DC_1$ (C_1, C_2 Cesàroverfahren) mit $d_{nn} = \dfrac{1}{n+2}$, $d_{n\nu} = 0$ sonst ist[3]. Es ist $C_2 = PC_1$, wo $p_n = (n+1)$, und P auch Hausdorffverfahren ist. Es ergibt sich $R_2^* \approx (E - DP^{-1})\, PC_1 = BPC_1 = BC_1P$ mit $b_{nn} = \dfrac{1}{2}$, $b_{n,n-1} = \dfrac{n}{2(n+2)}$, $b_{n\nu} = 0$, $\nu \leqq n-2$. Nun ist B äquivalent mit $B^* = (b^*_{n\nu})$, $b^*_{00} = 1$, $b^*_{nn} = b^*_{n,n-1} = \dfrac{1}{2}$ $(n \geqq 1)$, $b^*_{n\nu} = 0$ sonst $\left(b'_{n\nu} = 2\dfrac{\binom{\nu+2}{\nu}}{\binom{n+2}{n}}(-1)^{n-\nu},\ \nu \leqq n,\ b^{*\prime}_{n\nu} = 2(-1)^{n-\nu},\ \nu \leqq n,\ n \geqq 1\right)$ und R_2^* ist äquivalent mit $R = B^*C_1P$.

SATZ 5. *Genau dann ist* $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ *stets* $R^*(n, 2)$*-summierbar für jede* $R^*(n, 2)$*-summierbare Reihe* $\sum a_\nu$, *wenn gilt*

$$\varepsilon_\nu = c + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{n+1-\nu}{n+1} \right)^2, \quad (c \ \textit{konstant}, \sum |\alpha_n| < \infty). \tag{32}$$

BEWEIS. Dass (32) notwendig ist, ist bekannt (vgl. [12], [8]). Beim Beweis, dass (32) hinreicht, dürfen wir uns wegen (14) auf die Untersuchung der

3) Für eine ähnliche Darstellung vgl. [15].

Zahlen $\varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu(\overline{R}, \alpha)$ beschränken.

Wir beweisen zunächst einige Vergleichsaussagen:

$$B^* \subseteqq C_1 \subseteqq B^*C_1\,,\; B^* \subseteqq P \subseteqq B^*P\,,\; B^*C_1 \subseteqq B^*C_1P\,. \tag{33}$$

Die erste Relation in (33) folgt sofort mit $b_{n\nu}^{*\prime} = 2(-1)^{n-\nu}$ $(\nu \leqq n, n \geqq 1)$. Ferner ist $C_1 \approx P$ (vgl. etwa [6], theorem 14), so dass auch die zweite Aussage gilt. Die dritte Relation folgt wegen $B^*C_1PC_1^{-1}B^{*-1} = B^*PB^{*-1}$ aus der zweiten. Wir wenden nun Satz 1 an auf $B = B^*$, $A = B^*C_1$. Die Bedingung (17) folgt aus (33) und der Tatsache, dass B^* ein Nörlundverfahren ist (vgl. die Bemerkung 1 zu Satz 1). Zum Nachweis von (18) und (19) genügt es wegen (14) und (33), wenn wir zeigen, dass gilt

$$\varepsilon_{n+1}(\overline{C}_1, \alpha) \in B_f^*, \quad \varepsilon_n(\overline{C}_1, \alpha) \in B_r^*\,, \tag{34}$$

(35) $\begin{cases} \text{ist } \{s_n\}\ B^*\text{-limitierbar, so ist } t_n = \varepsilon_n(\overline{B}^*, \alpha)\, s_{n-1}\ (n = 1, 2, \cdots, t_0 = 0) \\ C_1\text{-limitierbar,} \\ \text{ist } \sum a_n\ B^*\text{-summierbar, so ist } \sum a_n \varepsilon_n(\overline{B}^*, \alpha) \text{ stets } C_1\text{-summierbar.} \end{cases}$

Wir bemerken zunächst, dass gilt $\varepsilon_n(\overline{C}_1, \alpha) = o(1)$ und $\varepsilon_n(C_1, \alpha) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$; ferner ist $\varepsilon_n(\overline{B}^*, \alpha) = o(1)$ $(n \to \infty)$ und $\varepsilon_n(B^*, \alpha) = \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n+1})$ $(n \geqq 1)$. Zum Nachweis von (34) und (35) betrachten wir ein B^*-limitierbares $\{s_n\}$. Die erste Beziehung in (34) folgt mit (12) aus

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_{n+1}(\overline{C}_1, \alpha)\, s_n + \varepsilon_n(\overline{C}_1, \alpha) s_{n-1}) = \frac{1}{2}(s_n + s_{n-1})\varepsilon_{n+1}(\overline{C}_1, \alpha) + \frac{1}{2}\varepsilon_n(C_1, \alpha)\, s_{n-1}$$
$$= o(1) \text{ (wegen (33) ist } s_n = o(n))\,.$$

Mit $\bar{b}_{nn}^* = \frac{1}{2}$, $\bar{b}_{n\nu}^* = 1$ $(\nu < n)$, $n \geqq 1$ folgt die zweite Beziehung in (34) aus $\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \varepsilon_\nu(\overline{C}_1, \alpha) + \frac{1}{2} a_n \varepsilon_n(\overline{C}_1, \alpha) = \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \varepsilon_\nu(C_1, \alpha) + \varepsilon_n(\overline{C}_1, \alpha)\, \frac{1}{2}(s_n + s_{n-1})$ $= \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \varepsilon_\nu(C_1, \alpha) + o(1)$. Die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu(C_1, \alpha)$ (zum Wert $\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\alpha_\mu}{\mu+1} \sum_{\nu=0}^{\mu} s_\nu$, beachte (33)) folgt sofort durch einfaches Nachrechnen (oder aus bekannten Sätzen, vgl. z.B. [11]).

Die erste Beziehung in (35) folgt mit $S_n = s_0 + \cdots + s_n$ wegen (33) aus

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n-1}\varepsilon_{\nu+1}(\bar{B}^*,\alpha)s_\nu = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n-1}\varepsilon_{\nu+1}(B^*,\alpha)S_\nu + \varepsilon_{n+1}(\bar{B}^*,\alpha)\frac{S_{n-1}}{n+1} = o(1)\ (n\to\infty).$$

Die zweite Beziehung in (35) folgt aus

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\varepsilon_\nu(\bar{B}^*,\alpha) = s_n\varepsilon_{n+1}(\bar{B}^*,\alpha) + \frac{1}{2}s_n\alpha_{n+1} + \left(\alpha_0 s_0 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(s_\nu + s_{\nu-1})\alpha_\nu\right).$$

Genau wie beim vorhergehenden Schritt ergibt sich, dass der erste Summand rechts C_1-limitierbar ist. Wegen $\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu\alpha_{\nu+1} = o(1)$ (beachte (33)) ist der zweite Summand ebenfalls C_1-limitierbar. Der Ausdruck in der Klammer ist schliesslich konvergent.

Aus Satz 1 folgt nun, dass $\varepsilon_{n+1}(\overline{B^*C_1},\alpha) \in (B^*C_1)_f$, $\varepsilon_n(\overline{B^*C_1},\alpha) \in (B^*C_1)_r$ ist. Wir wenden als nächstes den Satz 2 an auf $B = B^*C_1, A = B^*C_1P = R$. Für die Anwendung dieses Satzes ist nur noch (17) nachzuweisen, was aus (33) und der Indexverschiebung von B^*C_1 nach links folgt. Die letztere Tatsache ergibt sich sofort aus der Bemerkung zu Hilfssatz 4, da $\frac{1}{n+1} \in B_f^*$ ist.

BEMERKUNG. Im Beweis des Satzes 5 hätte nicht der Satz 2 anstelle von Satz 1 verwendet werden können. Es gilt nicht $\varepsilon_{n+1}(\bar{B}^*,\alpha) \in B_f^*$, wie für B-limitierbares $\{s_n\}$ aus

$$\frac{1}{2}(s_n\varepsilon_{n+1}(\bar{B}^*,\alpha) + s_{n-1}\varepsilon_n(\bar{B}^*,\alpha)) = \frac{1}{2}(s_n + s_{n-1})\left(\frac{\alpha_{n+1}}{2} + \sum_{\nu=n+2}^{\infty}\alpha_\nu\right) + \frac{s_{n-1}}{4}(\alpha_n + \alpha_{n+1})$$

sofort zu ersehen ist. In ähnlicher Weise erkennt man, dass auch nicht $\varepsilon_n(\bar{B}^*,\alpha) \in B_r^*$ gilt.

5. Das Verfahren P^2. Wir untersuchen die Verfahren P^2 um zu zeigen, welche Rolle die Voraussetzung der Indexverschiebung in (17) bei Satz 2 spielt. Hier gilt

SATZ 6. *Es sei P ein positives und permanentes bewichtetes arithmetisches Mittel mit* $\limsup p_n/P_n < 1$. *Genau dann ist $\varepsilon_n(P^2,\alpha) \in P_r^2$, wenn P Indexverschiebung nach links besitzt.*

BEWEIS. Nach den Sätzen I, II und 2 ist nur die Notwendigkeit der Indexverschiebung nachzuweisen (beachte die Bemerkung 1 im Anschluss an Satz 1). Für diesen Nachweis ziehen wir die Bedingung (7) und Hilfssatz 1 für $\mu=n$ heran. Mit $\bar{a}'_{n\nu}=a'_{n\nu}-a'_{n-1,\nu}$ und (1) ist für $\lambda+1\leqq n$ $(P^2=(a_{n\nu}),\ a'_{n\nu}=0$ für $\nu=0,1,\cdots,n-3)$

$$\sum_{\nu=\lambda}^{n}(\bar{a}_{n\nu})^2\bar{a}'_{\nu\lambda}=\sum_{\nu=\lambda}^{n}(\bar{a}_{n\nu}+\bar{a}_{n,\nu+1})a_{n\nu}a'_{\nu\lambda}=\sum_{\nu=\lambda}^{n}(\bar{a}_{n\nu}-\bar{a}_{n,\lambda+1}+\bar{a}_{n,\nu+1}-\bar{a}_{n,\lambda+2})a_{n\nu}a'_{\nu\lambda}$$

$$=(a^2_{n\lambda}a'_{\lambda\lambda}-a_{n,\lambda+1}a_{n,\lambda+2}a'_{\lambda+2,\lambda})+(a_{n\lambda}a_{n,\lambda+1}a'_{\lambda\lambda}-a^2_{n,\lambda+2}a'_{\lambda+2,\lambda})=I+II\,.$$

Es ist $$a_{n\nu}=\frac{p_\nu}{P_n}\sum_{\rho=\nu}^{n}\frac{p_\rho}{P_\rho}\,,\quad a'_{nn}=\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^2,\quad a'_{n,n-2}=\frac{P_{n-1}P_{n-2}}{p_n p_{n-1}}$$

und damit

$$I=-\frac{P_\lambda p_{\lambda+1}}{P_n^2}\sum_{\rho=\lambda+1}^{n}\frac{p_\rho}{P_\rho}\sum_{\sigma=\lambda+2}^{n}\frac{p_\sigma}{P_\sigma}+\left(\frac{P_\lambda}{P_n}\right)^2\left(2\frac{p_\lambda}{P_\lambda}+\frac{p_{\lambda+1}}{P_{\lambda+1}}\right)\sum_{\rho=\lambda+2}^{n}\frac{p_\rho}{P_\rho}$$
$$+\left(\frac{P_\lambda}{P_n}\right)^2\left(\frac{p_\lambda}{P_\lambda}+\frac{p_{\lambda+1}}{P_{\lambda+1}}\right)^2,$$

$$II=\left(\frac{P_\lambda}{P_n}\right)^2\left(\frac{p_{\lambda+1}}{p_\lambda}-\frac{p_{\lambda+2}}{p_{\lambda+1}}\right)\left(\sum_{\rho=\lambda+1}^{n}\frac{p_\rho}{P_\rho}\right)^2+\left(\frac{P_\lambda}{P_n}\right)^2\left(\frac{p_{\lambda+1}}{P_\lambda}+2\frac{p_{\lambda+2}}{P_{\lambda+1}}\right)\sum_{\rho=\lambda+1}^{n}\frac{p_\rho}{P_\rho}$$
$$-\left(\frac{P_\lambda}{P_n}\right)^2\frac{p_{\lambda+1}p_{\lambda+2}}{P^2_{\lambda+1}}-\frac{p_{\lambda+2}P_\lambda}{P_n^2}\left(\sum_{\rho=\lambda+2}^{n}\frac{p_\rho}{P_\rho}\right)^2.$$

Mit $\sum_{\rho=\lambda+1}^{n}\frac{p_\rho}{P_\rho}\leqq\frac{P_n}{P_\lambda}$, $p_\nu\leqq P_n$ für $\nu\leqq n$ folgt nun für $\lambda+1\leqq n$

$$|I|\leqq\frac{p_{\lambda+1}}{P_n}\sum_{\rho=\lambda+1}^{n}\frac{p_\rho}{P_\rho}+4\frac{p_\lambda+p_{\lambda+1}}{P_n}\,,$$

$$II'=\left|II-\left(\frac{P_\lambda}{P_n}\right)^2\left(\frac{p_{\lambda+1}}{p_\lambda}-\frac{p_{\lambda+2}}{p_{\lambda+1}}\right)\left(\sum_{\rho=\lambda+1}^{n}\frac{p_\rho}{P_\rho}\right)^2\right|$$
$$\leqq\frac{3}{P_n}(p_{\lambda+1}+p_{\lambda+2})+\frac{p_{\lambda+2}}{P_n}\sum_{\rho=\lambda+2}^{n}\frac{p_\rho}{P_\rho}\,.$$

Aus diesen Abschätzungen-und mit der Bezeichnung $\eta_\lambda=\frac{p_\lambda}{p_{\lambda-1}}-\frac{p_{\lambda+1}}{p_\lambda}$ ergibt sich, dass im vorliegenden Fall eine notwendige Bedingung für (7) gegeben wird durch

$$\text{(36)}\qquad \frac{1}{P_n^2}\sum_{\lambda=0}^{n-2}P_\lambda^2\left(\sum_{\rho=\lambda+1}^{n}\frac{p_\rho}{P_\rho}\right)^2|\eta_{\lambda+1}|=O(1)\quad(n\to\infty)$$

(denn es ist $\sum_{\lambda=0}^{n-2} |I| = O(1)$, $\sum_{\lambda=0}^{n-2} II' = O(1)$).

Ist $\frac{p_n}{P_n} \leqq \alpha < 1$, $n = 1, 2, \cdots$, so ist $p_{n+1} \leqq \frac{\alpha}{1-\alpha} P_n$. Sei nun $n \geqq 0$ und $\frac{P_m}{P_n} \leqq 2$ für ein $m \geqq n$, dann ist $\frac{P_{m+1}}{P_n} = \frac{P_m}{P_n} + \frac{p_{m+1} P_m}{P_m P_n} \leqq 2\left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$. Zu jedem $n \geqq 0$ wählen wir ein $m = m(n)$ mit $2 \leqq \frac{P_m}{P_n} \leqq 2\left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$. Es ist dann wegen $\sum_{\rho=\lambda}^{m} \frac{p_\rho}{P_\rho} \geqq \left(1 - \frac{P_\lambda}{P_m}\right)$

$$\frac{1}{P_m^2} \sum_{\lambda=1}^{m-1} P_{\lambda-1}^2 \left(\sum_{\rho=\lambda}^{m} \frac{p_\rho}{P_\rho}\right)^2 |\eta_\lambda| \geqq \frac{1}{4P_m^2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} P_{\lambda-1}^2 |\eta_\lambda| \geqq \frac{1}{\left[4\left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right]^2} \frac{1}{P_n^2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} P_{\lambda-1}^2 |\eta_\lambda| ,$$

also ist wegen (36)

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1} P_{\lambda-1}^2 |\eta_\lambda| = O(P_n^2) .$$

Sei nun für vorgegebenes n $\frac{1}{2^{k+1}} \leqq \frac{P_\lambda}{P_n} < \frac{1}{2^k}$ falls $n_{k+1} \leqq \lambda < n_k$, ($n_0 = n \geqq n_1 \geqq n_2 \geqq \cdots$, $k = 0, 1, 2, \cdots$). Es ist dann

$$\frac{1}{P_n} \sum_{\lambda=1}^{n-1} P_{\lambda-1} |\eta_\lambda| \leqq K \sum_k \frac{P_{n_k}}{P_n} \sum_{n_{k+1} \leqq \lambda < n_k} \frac{P_{\lambda-1}^2}{P_{n_k}^2} |\eta_\lambda| = O(1) \sum_k \frac{P_{n_k}}{P_n} = O(1) \sum_k \frac{1}{2^k} = O(1)$$

und dies bedeutet, dass die Bedingung (21) erfüllt ist.

LITERATUR

[1] A. F. ANDERSEN, Studier over Cesàro's summabilitetsmetode, Copenhagen 1921.

[2] S. BANACH, Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932.

[3] L. S. BOSANQUET, Note on the Bohr-Hardy theorem, Journ. Lond. Math. Soc., 17 (1942), 166–173.

[4] H. FIEDLER, Über Bohr-Hardy'sche Faktoren bei Riesz'schen Mitteln, Mitt. Math. Sem. Giessen. Heft 60 (1963), 43 pp.

[5] H. L. GARABEDIAN AND W. C. RANDELS, Theorems on Riesz means, Duke Math. Journ. 4 (1938), 529–533.

[6] G. H. HARDY, Divergent series, Oxford 1949.

[7] W. JURKAT, Vorzeichenverteilung in Matrizen, Proc. Internat. Congress of Math. Amsterdam 1954, vol. II, 126.

[8] W. JURKAT UND A. PEYERIMHOFF, Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen, Math. Zeitschr. 55 (1951), 92–108.

[9] W. JURKAT UND A. PEYERIMHOFF, Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen, Math. Zeitschr. 56 (1952), 152–178.

[10] W. JURKAT UND A. PEYERIMHOFF, Summierbarkeitsfaktoren, Math. Zeitschr., 58 (1953), 186–203.

[11] G. G. LORENTZ, Eine Bemerkung über Limitierungsverfahren, die nicht schwächer als ein Cesàroverfahren sind, Math. Zeitschr. 51 (1949), 85–91.

[12] A. PEYERIMHOFF, Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren, Math. Zeitschr., 55 (1951), 23–54.

[13] A. PEYERIMHOFF, Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren, Publ. Inst. Math. Beograd, 8 (1955), 139–156.

[14] A. PEYERIMHOFF, On discontinuous Riesz means, Indian Journ. of Math. vol. 6, Im Druck.

[15] O. SZASZ, On the Cesàro and Riesz means of Fourier series, Compositio Math., 7 (1939), 112–122.

SYRACUSE UNIVERSITY,
UNIVERSITY OF UTAH.