ZUR CHARAKTERISIERUNG VON SATURATIONSKLASSEN IN DER THEORIE DER FOURIERREIHEN

P. L. BUTZER und E. GÖRLICH

(Received December 20, 1964)

1. Bezeichnungen und Hauptsatz. In der Theorie der trigonometrischen Approximation periodischer Funktionen erhält man bei der Bestimmung von Saturationsklassen[1] in den Räumen $C_{2\pi}$ und $L^p_{2\pi}$ $(1 \leqq p < \infty)$ als Ergebnis häufig eine der im folgenden unter (1. 3) definierten Klassen W^ρ_X. Da die Definition (1. 3) die Eigenschaften einer Funktion $f(x) \in W^\rho_X$ nur indirekt mit Hilfe ihrer Fourierreihe beschreibt, stellt sich das Problem, diese Klassen durch äquivalente Eigenschaften der Funktionen $f(x)$ selbst zu charakterisieren. Für ganzzahlige Werte von ρ sind verschiedene äquivalente Charakterisierungen bekannt; sie werden im Abschnitt 3 zusammengestellt und noch einmal ausführlich bewiesen, da die Beweise in den angegebenen Arbeiten oft nur skizziert sind. Für den Fall, dass $\rho > 0$ keine ganze Zahl ist, existieren bisher nur im Intervall $0 < \rho \leqq 1$ und für den Raum $C_{2\pi}$ Charakterisierungen von G. Sunouchi [9], S. 130 und S. Aljančić [1], S. 682. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine für die Räume $C_{2\pi}$ und $L^p_{2\pi}$ $(1 \leqq p < \infty)$ und *alle* $\rho > 0$ gültige Charakterisierung aufzustellen. Das Hauptergebnis ist der folgende Satz (1. 4). Vor der Formulierung dieses Satzes sind zunächst einige Bezeichnungen zu erklären. Unter $C_{2\pi}$, $L^p_{2\pi}$ $(1 \leqq p < \infty)$, $L^\infty_{2\pi}$, $BV_{2\pi}$ werden die Räume derjenigen 2π-periodischen Funktionen verstanden, die stetig, bzw. zur p-ten Potenz Lebesgue-integrierbar, bzw. wesentlich beschränkt, bzw. von beschränkter Variation sind.

Die Fourierreihe einer Funktion $f(x) \in L^1_{2\pi}$ ist definiert durch

$$S[f] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)$$

mit

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{-iku}\, du\,,\ A_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx\,,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku\, du\,,\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku\, du\,.$$

1) Zur Definition dieses Begriffes, der von J. Favard eingeführt wurde, vgl. z. B. G. Sunouchi u. C. Watari [10], II, S. 480.

Als Fourier-Stieltjes-Reihe einer Funktion $F(x) \in BV_{2\pi}$ bezeichnet man die Reihe

$$S[dF] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \check{F}(k)\, e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)$$

mit

$$\check{F}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iku}\, dF(u)\,, \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ku\, dF(u)\,,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin ku\, dF(u)\,.$$

Die Reihe

$$\widetilde{S}[f] = -i\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sign} k)\hat{f}(k)\, e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

(mit $\operatorname{sign} 0 = 0$) ist die zu $S[f]$ konjugierte Reihe.

Die zu einer Funktion $f(x) \in L^1_{2\pi}$ konjugierte Funktion $\tilde{f}(x)$ ist durch

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\,\text{P.V.}\int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \cot\frac{t}{2}\, dt \tag{1. 1}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \cot\frac{t}{2}\, dt$$

definiert.

Die folgende Schreibweise ist in der Saturationstheorie zweckmässig[2]:

Für $\rho = 0, 1, 2, \cdots$ ist

$$f^{\{\rho\}}(x) = \begin{cases} f^{(\rho)}(x) & \text{falls } \rho \text{ gerade} \\ (\tilde{f})^{(\rho)}(x) & \text{falls } \rho \text{ ungerade} \end{cases}\,; \quad f^{\{0\}}(x) = f(x)\,. \tag{1. 2}$$

Entsprechend ist $S^{\{\rho\}}[f]$ definiert.

(1. 3) DEFINITION. *Sei X einer der Räume $C_{2\pi}$, $L^p_{2\pi}$ $(1 \leqq p < \infty)$. Die Menge W^ρ_X ist für $\rho > 0$ und $X = C_{2\pi}$ definiert durch*

$$W^\rho_C = \{f(x) : f(x) \in C_{2\pi}\,,\ |k|^\rho \hat{f}(k) = \hat{g}(k),\ g(x) \in L^\infty_{2\pi}\}\,,$$

2) Vgl. P. L. Butzer und G. Sunouchi [3], S. 318.

für $X = L_{2\pi}^p$ $(1 < p < \infty)$ *durch*

$$W_p^\rho = \{f(x) : f(x) \in L_{2\pi}^p,\ |k|^\rho \widehat{f}(k) = \widehat{g}(k) : g(x) \in L_{2\pi}^p\},$$

und für $X = L_{2\pi}^1$ *durch*

$$W_1^\rho = \{f(x) : f(x) \in L_{2\pi}^1,\ |k|^\rho \widehat{f}(k) = \check{g}(k) : g(x) \in BV_{2\pi}\}.$$

Also ist zum Beispiel W_1^ρ die Klasse der Funktionen $f(x)$, für die die trigonometrische Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^\rho \widehat{f}(k) e^{ikx}$ die Fourier-Stieltjes Reihe einer Funktion $g(x) \in BV_{2\pi}$ ist.

Die Bezeichnung W_X^ρ wurde in Anlehnung an S. B. Stečkin [8] gewählt. (Vgl. auch S. Aljančić [1], S. 681.) Die Klasse $W^\rho(0)$ von S. B. Stečkin und die entsprechende Klasse W_C^ρ sind jedoch nicht identisch. Vielmehr ergibt sich nach einer einfachen Umformung der Definition von Stečkin

$$W^\rho(0) = \{f(x) : f(x) \in C_{2\pi},\ |k|^\rho \widehat{f}(k) = \widehat{g}(k),\ \|g(x)\|_\infty \leqq M\}.$$

Damit kann der Hauptsatz der vorliegenden Arbeit formuliert werden:

(1. 4) SATZ. *Sei* $f(x) \in X$, *wobei* X *einer der Ränme* $C_{2\pi}$ *oder* $L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$ *ist, dann sind für* $\rho > 0$ *die folgenden beiden Bedingungen äquivalent*:

1) $f(x) \in W_X^\rho$;

2) *falls* ρ *nicht ganz ist, gilt*[3] $f^{\{[\rho]\}}(x) \in X$ *und*

$$\left\| \int_u^\infty \frac{f^{\{[\rho]\}}(x+t) + f^{\{[\rho]\}}(x-t) - 2f^{\{[\rho]\}}(x)}{t^{1+\rho-[\rho]}}\, dt \right\|_X = O(1) \quad (u \downarrow 0);$$

falls ρ *ganz ist, gilt* $f^{\{\rho-1\}}(x) \in X$ *und*

$$\left\| \int_u^\infty \frac{f^{\{\rho-1\}}(x+t) + f^{\{\rho-1\}}(x-t) - 2f^{\{\rho-1\}}(x)}{t^2}\, dt \right\|_X = O(1) \quad (u \downarrow 0).$$

Hier und im folgenden ist die X-Norm immer bezüglich x zu nehmen. Zur Formulierung der Bedingung 2) ist zu bemerken, dass die Unterscheidung der zwei Fälle lediglich durch die Definition des Symbols $[\rho]$ bedingt ist. Würde man (ρ) als die grösste ganze Zahl definieren, die echt kleiner als ρ ist und $[\rho]$ durch (ρ) ersetzen, so ergäbe sich eine einheitliche Schreibweise, d.h. die

3) Hier bedeutet $[\rho]$ die grösste ganze Zahl, die $\leqq \rho$ ist. Zur Definition der Aussage $f^{\{[\rho]\}}(x) \in X$ vgl. Bemerkung (2. 6).

beiden Aussagen der Bedingung 2) liessen sich in der Gestalt der ersteren der zweiten Bedingung zusammenfassen.

Für den Fall, dass ρ ganz ist, sind die Bedingungen des Satzes (1. 4) *damit äquivalent, dass die Funktion*

$$\left\{\begin{array}{ll} f^{(\rho-1)}(x), & \textit{falls } \rho \textit{ gerade} \\ \widetilde{f}^{(\rho-1)}(x), & \textit{falls } \rho \textit{ ungerade} \end{array}\right\}$$

in Lip 1 *ist für* $X=C_{2\pi}$, *bzw. in* Lip (1, p) *für* $X=L^p_{2\pi}$ $(1<p<\infty)$, *bzw. fast überall gleich einer Funktion aus* $BV_{2\pi}$ *ist im Falle* $X=L^1_{2\pi}$.

Der Beweis dieses Satzes folgt im Abschnitt 4 der Arbeit. Dazu werden zunächst die Verallgemeinerung des genannten Satzes von G. Sunouchi [9] auf die Räume $L^p_{2\pi}$, die entsprechende Verallgemeinerung eines Ergebnisses von M. Zamansky [12], S. 37 und einige Ergebnisse über Multiplikatorenklassen von Fourierreihen bewiesen. Ausserdem benutzt der Beweis des Satzes (1. 4) Ergebnisse aus Abschnitt 3.

2. Lemmata Zunächst werden einige Lemmata ins Gedächtnis gerufen, die wir in den folgenden Beweisen benötigen.

(2. 1) LEMMA. *Die Bedingung* $\|\sigma_n(T\,;x)\|_p = O(1)$ $(n\to\infty)$, $(1<p\leqq\infty)$, (*wobei* $\sigma_n(T\,;x)$ *das n-te* (*C*, 1)-*oder Fejér-Mittel der trigonometrischen Reihe T ist*) *ist notwendig und hinreichend dafür, dass T die Fourierreihe einer Funktion* $L^p_{2\pi}$ *ist.*[4]

(2. 2) LEMMA. *Die Bedingung* $\|\sigma_n(T\,;x)\|_1 = O(1)$ $(n\to\infty)$, *ist notwendig und hinreichend dafür, dass die trigonometrische Reihe T die Fourier-Stieltjes-Reihe einer Funktion von beschränkter Variation ist.*[5]

(2. 3) LEMMA.[6] a) *Ist* $f(x)\in L^p_{2\pi}$ $(1<p<\infty)$, *so existiert* $\widetilde{f}(x)$ *fast überall und gehört zu* $L^p_{2\pi}$. *Weiterhin gilt* $\widetilde{S}[f]=S[\widetilde{f}]$, *d.h.*

$$-i\,(\operatorname{sign} k)\,\widehat{f}(k) = \widehat{\widetilde{f}}(k)\,.$$

b) *Sind* $f(x)$ *und* $\widetilde{f}(x)$ *in* $L^1_{2\pi}$, *so gilt ebenfalls* $\widetilde{S}[f]=S[\widetilde{f}]$.

4) Vgl. z. B. Zygmund [13], S. 136 und S. 145.
5) Vgl. z. B. Zygmund [13], S. 137.
6) M. Riesz [6], S. 225–227 bzw. Zygmund [13], S. 253 und S. 263.

(2. 4) LEMMA. *Ist* $f(x) \in L_{2\pi}^p$ $(1 < p \leqq \infty)$, *so gilt für fast alle* x

$$f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\pi}^{\pi}[\tilde{f}(x+t)] - \tilde{f}(x-t)]\cot\frac{t}{2}\,dt$$

$$= -\tilde{\tilde{f}}(x).$$

Angesichts einer Aussage wie $(\tilde{f})'(x) \in L_{2\pi}^p$ erhebt sich die Frage, ob dann auch die Funktion $(\widetilde{f'})(x)$ existiert und ob die beiden Funktionen identisch sind. Hier gilt das folgende, in der angegebenen Literatur stillschweigend als richtig angenommene, aber nicht in allen Fällen triviale Resultat[7]:

(2. 5) LEMMA. *Sei* X *einer der Räume* $L_{2\pi}^p$ $(1 < p \leqq \infty)$ *oder* $C_{2\pi}$. *Ferner wird* $f(x) \in L_{2\pi}^1$ *vorausgesetzt, falls* $X = L_{2\pi}^p$ *ist und* $f(x) \in C_{2\pi}$, *falls* $X = C_{2\pi}$ *ist. Dann sind für* $\rho = 1, 2, \cdots$ *die folgenden beiden Aussagen äquivalent*:

a) $f(x)$, $f'(x), \cdots, f^{(\rho-1)}(x)$ *sind absolut stetig und* 2π*-periodisch und* $(\widetilde{f^{(\rho)}})(x) \in X$;

b) $f(x)$, $(\tilde{f})'(x), \cdots, (\tilde{f})^{(\rho-1)}(x)$ *sind absolut stetig und* 2π*-periodisch und* $(\tilde{f})^{(\rho)}(x) \in X$.

Wenn a) *oder* b) *erfüllt ist, folgt ausserdem* $(\widetilde{f^{(\rho)}})(x) = (\tilde{f})^{(\rho)}(x)$, *wobei die Gleichung für* $X = L_{2\pi}^p$ *fast überall und im Falle* $X = C_{2\pi}$ *für alle* x *gültig ist.*

(2. 6) BEMERKUNG. Wenn in den Sätzen von Abschnitt 3 und in Satz (1.4) Aussagen wie z.B. $f^{(\rho)}(x) \in C_{2\pi}$ für eine ungerade Zahl ρ vorkommen, so ist dies immer im Sinne der Aussagen a) oder b) von Lemma (2. 5) zu verstehen. Entsprechend ist mit $f^{(\rho)}(x) \in L_{2\pi}^p$ gemeint, dass $f(x)$, $f'(x), \cdots, f^{(\rho-1)}(x)$ absolut stetig sind und $f^{(\rho)}(x) \in L_{2\pi}^p$ ist.

Weiterhin werden die folgenden Lemmata von G. H. Hardy und J. E. Littlewood benutzt[8].

(2. 7) LEMMA. *Es gilt* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(1, 1)$ *genau dann, wenn* $f(x)$ *fast überall gleich einer Funktion aus* $BV_{2\pi}$ *ist.*

(2. 8) LEMMA. *Es gilt* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(1, p)$ $(1 < p < \infty)$ *genan danu, wenn* $f(x)$ *fast überall gleich dem Integral einer Funktion aus* $L_{2\pi}^p$ *ist.*

---

7) Der Beweis des Lemmas erfolgt in einer späteren Arbeit.

8) Vgl. z. B. Zygmund [13], S. 180, Nr. 8 und 9.

Das folgende Lemma ist ein Teil des Saturationssatzes für die Riesz-Mittel oder sog. typischen Mittel einer Fourierreihe[9].

(2. 9) LEMMA. *Sei $f(x) \in X$, wobei X einer der Räume $C_{2\pi}$, $L^p_{2\pi}$ $(1 \leqq p < \infty)$ ist, dann folgt für jedes $\rho > 0$ aus der Bedingung*

$$\left\| \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) |k|^\rho \hat{f}(k)\, e^{ikx} \right\|_X = O(1) \quad (n \to \infty)$$

die Approximation

$$\left\| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \left\{1 - \left(\frac{|k|}{n+1}\right)^\rho\right\} \hat{f}(k)\, e^{ikx} \right\|_X = O(n^{-\rho}) \quad (n \to \infty).$$

Aus der Theorie der Multiplikatorenklassen[10] verwenden wir schliesslich das folgende für den Beweis des Hauptsatzes wichtige Ergebnis, dessen erster Teil in der Literatur nicht formuliert ist:

(2. 10) LEMMA. *Sei $0 < \beta \leqq 1$. Dann gilt für die Folge $\{k^{-\beta}, k=1, 2, \cdots\}$:*

$$\{k^{-\beta}\} \in (S, L^r_{2\pi}), \quad \textit{wobei} \quad r = r(\beta) > 1 \quad \textit{ist},$$

$$\{k^{-\beta}\} \in (L^p_{2\pi}, L^p_{2\pi}), \quad (1 < p < \infty)$$

$$\{k^{-\beta}\} \in (L^\infty_{2\pi}, C_{2\pi}).$$

BEWEIS. Aus der Tatsache, dass $\{k^{-\beta/2}\}$ eine konvexe Nullfolge ist, ergibt sich, dass $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\beta/2} \cos kx$ die Fourierreihe einer Funktion aus $L^1_{2\pi}$ ist,[11] und dies ist äquivalent mit der Eigenschaft $\{k^{-\beta/2}\} \in (S, L^1_{2\pi})$.[12]

Andererseits gilt[13] für $0 < x \leqq \pi$ und $0 < \alpha < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \cos kx = \Gamma(1-\alpha)\, x^{\alpha-1} \sin\frac{\pi\alpha}{2} + O(1),$$

wobei $\Gamma(x)$ die Euler'sche Gamma-Funktion ist. Wählt man nun zu jedem

9) Diese Aussage ist z. B. in den Ergebnissen von G. Sunouchi und C. Watari [10], II, S. 483–485 enthalten.

10) Der Begriff der Multiplikatorenklasse wird hier im Sinne der Definition in Zygmund [13], Kap. IV, § 11 verstanden. Insbesondere bedeutet S in diesem Zusammenhang die Klasse der Fourier-Stieltjes-Reihen von Funktionen aus $BV_{2\pi}$.

11) Zygmund [13], S. 183, Satz (1. 5).

12) Zygmund [13], S. 177, Satz (11. 10) (i).

13) Zygmund [13], S. 70, (13. 11).

$\beta=2\alpha$ eine Zahl $r=r(\beta)$ mit $1<r<\left(1-\frac{\beta}{2}\right)^{-1}$, dann gilt

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\beta/2}\cos kx\right\|_r \leqq \left|\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\pi\beta}{4}\right|\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|x|^{r(\beta/2-1)}dx\right\}^{\frac{1}{r}}+O(1)$$
$$<+\infty\,.$$

Nun kann der folgende Satz von S. Kaczmarz[14] benutzt werden:

Die Folge $\{\mu_k;k=1,2,\cdots\}$ *gehört zur Multiplikatorenklasse* $(L^1_{2\pi},L^p_{2\pi})$ *genau dann, wenn* $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\cos kx\in L^p_{2\pi}$ *ist.*

Es folgt also für $0<\beta\leqq 1$, dass $\{k^{-\beta/2}\}\in(L^1_{2\pi},\ L^r_{2\pi})$ ist.

Wendet man die durch $\{k^{-\beta/2}\}$ erzeugte Faktorfolgen-Transformation zweimal an und benutzt man beim ersten Mal $\{k^{-\beta/2}\}\in(S,L^1_{2\pi})$ und beim zweiten Mal $\{k^{-\beta/2}\}\in(L^1_{2\pi},\ L^r_{2\pi})$, so folgt insgesamt

$$\{k^{-\beta}\}\in(S,L^r_{2\pi}),\qquad 1<r<\left(1-\frac{\beta}{2}\right)^{-1}.$$

Die zweite Aussage des Lemmas ergibt sich aus der Tatsache, dass $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\beta}\cos kx$ die Fourierreihe einer Funktion aus $L^1_{2\pi}$ ist, denn[15] dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\beta}\cos kx$ um so mehr die Fourier-Stieltjes-Reihe einer Funktion aus $BV_{2\pi}$ und dies[16] ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\{k^{-\beta}\}\in(L^p_{2\pi},L^p_{2\pi})$ $(1<p<\infty)$. Die dritte Aussage des Lemmas folgt ebenfalls daraus, dass $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\beta}\cos kx$ die Fourierreihe einer Funktion aus L^1_{2p} ist.[17]

3. Charakterisierung der Klassen W^{ρ}_X für ganzzahlige ρ. Die folgenden Sätze sind lediglich eine Zusammenstellung bekannter Ergebnisse u. a. von P. L. Butzer [2] und G. Sunouchi [3], G. H. Hardy und J. E. Littlewood und von M. Zamansky [12]. Die Beweise sind z.T. neu formuliert, da hier besonderer Wert auf die Behandlung derjenigen Aussagen gelegt wird, in denen die konjugierte Funktion auftritt und die in der Literatur durch den Hinweis auf

14) [4] S. 43, Satz 5.
15) Zygmund [13], S. 144, (5. 5) (i) und S. 137, (4. 3)
16) Zygmund [13], S. 177, (11. 11)
17) Zygmund [13], S. 177, (11. 10) (i)

die Analogie zu einfachen Fällen nur unvollständig bewiesen sind. Es werden die folgenden Bezeichnungen benutzt:

(3. 1) $$\Delta_h^\rho f(x) = \sum_{k=0}^{\rho} (-1)^k \binom{\rho}{k} f(x+h\,\{\rho/2-k\}), \quad \rho \text{ ganz};$$

(3. 2) $$\nabla_h^\rho f(x) = \rho!\left\{f(x+h) - \sum_{k=0}^{\rho-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x)\right\}.$$

(3. 3) SATZ.[18] *Sei $f(x) \in L_{2\pi}^p$ $(1< p <\infty)$ und $\rho=1, 2, \cdots$ Dann sind folgende sieben Aussagen äquivalent:*

a) $\| \sigma_n^{\{\rho\}}(f; x) \|_p \equiv \left\| \sum_{k=-n}^{n} \left(1-\frac{|k|}{n+1}\right) |k|^\rho \hat{f}(k)\, e^{ikx} \right\|_p = O(1)\ (n\to\infty);$

b) $S^{\{\rho\}}[f]$ *ist die Fourierreihe einer Funktion $g(x)$ aus $L_{2\pi}^p$, d.h.* $(-1)^{[\rho/2]} |k|^\rho \hat{f}(k) = g(k)$ *mit $g(x) \in L_{2\pi}^p$, also $f(x) \in W_p^\rho$;*

c) *die Funktion*

$$\left\{\begin{array}{ll} f^{(\rho-1)}(x), & \textit{falls } \rho \textit{ gerade} \\ (\tilde{f})^{(\rho-1)}(x), & \textit{falls } \rho \textit{ ungerade} \end{array}\right\}$$

ist absolut stetig und in Lip $(1, p)$;

d) $f^{\{\rho\}}(x) \in L_{2\pi}^p$;

e) $\left\{\begin{array}{l} \| \Delta_h^\rho f(x)\|_p = O(h^\rho) \quad (h\to 0), \textit{ falls } \rho \textit{ gerade,} \\ \| \Delta_h^\rho \tilde{f}(x)\|_p = O(h^\rho) \quad (h\to 0), \textit{ falls } \rho \textit{ ungerade} \end{array}\right\};$

f) *falls ρ gerade ist: $f(x), f'(x), \cdots, f^{(\rho-2)}(x)$ sind absolut stetig, $f^{(\rho-1)}(x) \in L_{2\pi}^p$ und $\| \nabla_h^\rho f(x)\|_p = O(h^\rho)$ $(h\to 0)$;*
falls ρ ungerade ist: $\tilde{f}(x), (\tilde{f})'(x), \cdots, (\tilde{f})^{(\rho-2)}(x)$ sind absolut stetig, $(\tilde{f})^{(\rho-1)}(x) \in L_{2\pi}^p$ und $\| \nabla_h^\rho \tilde{f}(x)\|_p = O(h^\rho)$ $(h\to 0)$;

g) $f^{\{\rho-1\}}(x) \in L_{2\pi}^p$ *und*

$$\left\| \int_u^\infty \frac{f^{\{\rho-1\}}(x+t) + f^{\{\rho-1\}}(x-t) - 2f^{\{\rho-1\}}(x)}{t^2}\, dt \right\|_p = O(1) \quad (u \downarrow 0).$$

Wenn eine dieser Aussagen erfüllt ist, folgt ausserdem

18) Zu den Aussagen d) und g) vgl. Bemerkung (2. 6) und zur Definition von $\sigma_n^{\{\rho\}}$ siehe (1. 2). Vgl. auch Fussnote 26.

$$S^{\{\rho\}}[f] = S[f^{\{\rho\}}]\,, \ d.h.\ (-1)^{[\rho/2]}|k|^\rho \hat{f}(k) = \widehat{f^{\{\rho\}}}(k)\,.$$

BEWEIS. Zunächst nehmen wir an, dass ρ gerade ist.

Die Äquivalenz von a) und b) ist Inhalt von Lemma (2. 1), und die Äquivalenz von c) und d) folgt aus Lemma (2. 8).

Die Äquivalenz der Aussagen b), d) und e) wird durch einen Ringschluss bewiesen. Wenn b) erfüllt ist, d.h. wenn $S^{(\rho)}[f] = S[g]$ ist für eine Funktion $g(x) \in L^p_{2\pi}$, dann folgt aus einem bekannten Satz über die gliedweise Integration von Fourierreihen und aus der Vollständigkeit des trigonometrischen Systems im Raum $L^p_{2\pi}$, dass $f(x)$ fast überall gleich der Summe des ρ-ten unbestimmten Integrals von $g(x)$ und eines algebraischen Polynoms $(\rho-1)$-ten Grades ist. Also ist $f(x)$ im Sinne der $L^p_{2\pi}$-Topologie identisch einer absolut stetigen Funktion, deren erste bis $(\rho-1)$-te Ableitungen ebenfalls absolut stetig sind und deren ρ-te Ableitung fast überall gleich $g(x)$ ist. Damit ist $f^{(\rho)}(x) \in L^p_{2\pi}$, d.h. d) ist erfüllt. Ausserdem ist damit die letzte Behauptung $S^{(\rho)}[f] = S[f^{(\rho)}]$ bewiesen.

Für den Beweis, dass aus d) nun e) folgt, genügt es, den Fall $h>0$ zu untersuchen.

Wenn d) erfüllt ist, bedeutet dies nach Bemerkung (2. 6), dass $f(x)$, $f'(x)$, $\cdots$, $f^{(\rho-1)}(x)$ absolut stetig sind und $f^{(\rho)}(x) \in L^p_{2\pi}$ ist. Ausgehend von

$$\begin{aligned}
\|\Delta^1_h f(x)\|_p &= \left\| f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right\|_p = \left\| \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f'(t)\,dt \right\|_p \\
&= \left\| \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f'(x+t)\,dt \right\|_p \leqq \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \|f'(x+t)\|_p\,dt = h\,\|f'(x)\|_p \\
&= O(h) \quad (h \downarrow 0)\,,
\end{aligned}$$

wobei die verallgemeinerte Minkowski-Ungleichung benutzt wurde, wird durch vollständige Induktion bewiesen, dass für $\rho=1, 2, \cdots$ aus $f^{(\rho)}(x) \in L^p_{2\pi}$ folgt: $\|\Delta^\rho_h f(x)\|_p = O(h^\rho)$. (Das Ergebnis ist in diesem Teil des Beweises natürlich nur für die geraden ρ-Werte von Interesse, wird aber beim Beweis des Satzes für ungerade ρ benutzt.) Es gilt $\Delta^\rho_h f(x) = \Delta^1_h (\Delta^{\rho-1}_h f(x))$, wenn also

$$\|\Delta^{\rho-1}_h f(x)\|_p \leqq h^{\rho-1} \cdot \|f^{(\rho-1)}(x)\|_p \quad \text{und} \quad f^{(\rho)}(x) \in L^p_{2\pi} \quad \text{ist, folgt}$$

$$\|\Delta^\rho_h f(x)\|_p = \|\Delta^1_h (\Delta^{\rho-1}_h f(x))\|_p = \left\| \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} \Delta^{\rho-1}_h f'(t)\,dt \right\|_p =$$

$$= \left\| \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta_h^{\rho-1} f'(x+t)\,dt \right\|_p \leqq \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \|\Delta_h^{\rho-1} f'(x+t)\|_p\,dt = h\,\|\Delta_h^{\rho-1} f'(x)\|_p$$

$$\leqq h^\rho\,\|f^{(\rho)}(x)\|_p = O(h^\rho) \quad (h \downarrow 0),$$

womit e) bewiesen ist.

Für den Schritt von e) nach b) wird der bekannte Satz über die schwache* Kompaktheit des zu einem separablen Banachraum adjungierten Raumes benutzt. Er besagt im vorliegenden Fall[19], dass aus der Beschränktheit der Folge $\{h_k^{-\rho}\,\|\Delta_{h_k}^\rho f(x)\|_p;\ k=1,2,\cdots\}$, wobei $\{h_k\}$ eine Nullfolge ist, die Existenz einer Funktion $l(x) \in L_{2\pi}^p$ und einer Teilfolge $\{h_\nu\}$ der Folge $\{h_k\}$ folgt, so dass für alle Funktionen $m(x) \in L_{2\pi}^q$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ gilt:

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} h_\nu^{-\rho}\,[\Delta_{h_\nu}^\rho f(x)]\,m(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} l(x)\,m(x)\,dx.$$

Insbesondere ergibt sich, wenn man für $m(x)$ die Funktionen e^{-ikx} $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ einsetzt und die komplexe Schreibweise der Fourierreihe mit $\mathfrak{F}_F[f(x)] = \widehat{f}(k)$ benutzt:

$$\lim_{\nu\to\infty} h_\nu^{-\rho}\,\mathfrak{F}_F[\Delta_{h_\nu}^\rho f(x)] = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{F}_F[h_\nu^{-\rho} \sum_{n=0}^{\rho} (-1)^n \binom{\rho}{n} f(x+h_\nu\{\rho/2-n\})]$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} h_\nu^{-\rho} \sum_{n=0}^{\rho} (-1)^n \binom{\rho}{n} e^{ikh_\nu(\rho/2-n)}\,\widehat{f}(k) = \widehat{l}(k).$$

Verwendet man nun noch die Identität

$$(3.\ 4) \qquad \lim_{h\to 0} h^{-\rho} \sum_{n=0}^{\rho} (-1)^n \binom{\rho}{n} e^{ikh(\rho/2-n)} = (ik)^\rho,$$

so folgt $(ik)^\rho \widehat{f}(k) = \widehat{l}(k)$ oder $S^{(\rho)}[f] = S[l]$ mit $l(x) \in L_{2\pi}^p$, d.h. b) ist erfüllt.

Es bleibt jetzt noch die Äquivalenz der Bedingung f) mit den anderen Bedingungen zu zeigen. Die geschieht unter Verwendung bekannter Ergebnisse am einfachsten, wenn man analog zu dem obigen Ringschluss einen Ringschluss zwischen b), d) und f) durchführt: Der Schritt d) $\to$ f) ergibt sich als trivale Folgerung aus einem schärferen Satz von P. L. Butzer [2], S. 286, Satz 3. 2 (i),

19) Vgl. z. B. Widder [11], S. 33.

und der Schritt f) $\to$ b) wurde ebenfalls von P. L. Butzer [2] S. 295, Satz 6. 2 bewiesen. Der letzte Schritt kann auch analog zu der oben beim Schritt e)$\to$b) verwendeten Methode bewiesen werden, wenn man statt (3. 4) die Beziehung

$$\lim_{h\to 0}\frac{\rho!}{h^\rho}\left\{e^{ikh}-\sum_{n=0}^{\rho-1}(ik)^n\frac{h^n}{n!}\right\}=(ik)^\rho$$

benutzt.

Damit ist die Äquivalenz der für gerade ρ in Satz (3. 3) gemachten Aussagen a) bis f) bewiesen.

Der vorangegangene Beweis ist nicht nur für gerade sondern auch für ungerade ρ gültig. Die Behauptung, die der Satz für ungerade ρ aufstellt, können deshalb aus diesen Ergebnissen gefolgert werden: Für ungerade ρ wird behauptet, dass die Aussagen gültig bleiben, wenn man überall $f(x)$ durch $\tilde{f}(x)$ und $S[f]$ durch $\tilde{S}[f]$ ersetzt mit einer Ausnahme: Die Voraussetzung $f(x)\in L^p_{2\pi}$ bleibt unverändert. Da aber dann nach Lemma (2. 3a) die Funktion $\tilde{f}(x)$ ebenfalls in $L^p_{2\pi}$ ist und ausserdem $S[\tilde{f}]=\tilde{S}[f]$ gilt, kann man auch die Voraussetzung $f(x)\in L^p_{2\pi}$ durch $\tilde{f}(x)\in L^p_{2\pi}$ ersetzen und statt $\tilde{S}[f]$ auch $S[\tilde{f}]$ schreiben, so dass schliesslich nur noch zu zeigen ist, dass der zuvor durchgeführte Beweis gültig bleibt, wenn man überall $f(x)$ durch $\tilde{f}(x)\in L^p_{2\pi}$ und die gerade Zahl ρ durch eine ungerade Zahl ersetzt, und dies ist trivial. Die auf diesem Wege erhaltenen Aussagen über $(\tilde{f})^{(\rho)}(x)$ können mit Lemma (2. 5) in Aussagen über $(f^{(\rho)})(x)$ umgewandelt werden.

Die Äquivalenz der Bedingung g) des Satzes mit den anderen Bedingungen wird im Zusammenhang mit Satz (1. 4) Abschnitt 4 bewiesen.

Der Satz (3. 3) lässt sich auf den Raum $L^1_{2\pi}$ nicht wörtlich übertragen, da die Theorie der Fourierreihen hier eine andere Formulierung der Aussagen b) und d) erfordert. Auch die Beweismethode ist hier etwas anders, da statt Lemma (2. 3 a) jetzt (2. 3 b) benutzt wird.

(3. 5) SATZ.[20] *Sei* $f(x)\in L^1_{2\pi}$ *und* $\rho=1,2,\cdots$ *Dann sind folgende Aussagen äquivalent*:

a) $\|\sigma_n^{\{\rho\}}(f;x)\|_1\equiv\left\|\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)|k|^\rho\hat{f}(k)e^{ikx}\right\|_1=O(1)\ (n\to\infty)$;

b) $S^{\{\rho\}}[f]$ *ist die Fourier-Stieltjes-Reihe einer Funktion* $g(x)$ *aus* $BV_{2\pi}$, *d. h.* $(-1)^{[\rho/2]}|k|^\rho\hat{f}(k)=\check{g}(k)$ *mit* $g(x)\in BV_{2\pi}$, *also* $f(x)\in W_1^\rho$;

20) Zu den Aussagen c), d) und g) vgl. Bemerkung (2. 6) und zur Definition von $\sigma_n^{\{\rho\}}$ siehe (1. 2).

c) $\widetilde{f}^{\{\rho-1\}}(x) \in \text{Lip}\,(1, 1)$;

d) $\widetilde{f}^{\{\rho-1\}}(x)$ *ist fast überall gleich einer Funktion* $g(x)$ *aus* $BV_{2\pi}$;

e) $$\left.\begin{cases} \|\Delta_h^\rho f(x)\|_1 = O(h^\rho) \quad (h \to 0), \text{ falls } \rho \text{ gerade} \\ \|\Delta_h^\rho \widetilde{f}(x)\|_1 = O(h^\rho) \quad (h \to 0), \text{ falls } \rho \text{ ungerade} \end{cases}\right\};$$

f) *falls* ρ *gerade ist*: $f(x), f'(x), \cdots, f^{(\rho-2)}(x)$ *sind absolut stetig und* $\|\nabla_h^\rho f(x)\|_1 = O(h^\rho)$ $(h \to 0)$;

falls ρ *ungerade ist*: $\widetilde{f}(x), (\widetilde{f})'(x), \cdots, (\widetilde{f})^{(\rho-2)}(x)$ *sind absolut stetig und* $\|\nabla_h^\rho \widetilde{f}(x)\|_1 = O(h^\rho)$ $(h \to 0)$;

g) $f^{\{\rho-1\}}(x) \in L_{2\pi}^1$ *und*

$$\left\| \int_u^\infty \frac{f^{\{\rho-1\}}(x+t) + f^{\{\rho-1\}}(x-t) - 2f^{\{\rho-1\}}(x)}{t^2}\, dt \right\|_1 = O(1) \quad (u \downarrow 0).$$

Aus jeder dieser Aussagen folgt ausserdem

$$S^{\{\rho\}}[f] = (-1)^{\rho+1} S'[\widetilde{f}^{\{\rho-1\}}] = S[dg].$$

BEWEIS. Wir beweisen den Satz nur für ungerade ρ. Für gerade ρ verläuft die Argumentation analog und auf einfachere Weise. Die Äquivalenzen zwischen a) und b) sowie zwischen c) und d) folgen aus Lemma (2. 2) bzw. Lemma (2. 7), und die Äquivalenz der drei Bedingungen b), d) und e) wird wieder mit einem Ringschluss bewiesen.

Wenn b) erfüllt ist, d.h. wenn $\widetilde{S}^{(\rho)}[f] = S[dg]$ ist für eine Funktion $g(x) \in BV_{2\pi}$, dann kann $S[dg]$, da das konstante Glied dieser Reihe verschwindet, als formal differenzierte Fourierreihe von $g(x)$ angefasst werden[21]: $\widetilde{S}^{(\rho)}[f] = S'[g]$, oder, wenn man gliedweise integriert, $\widetilde{S}^{(\rho-1)}[f] = S[g] + C$. Da auf der linken Seite wegen $\rho \geqq 1$ kein konstantes Glied auftritt, gilt $C = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\, du$. Da $g(x) \in BV_{2\pi} \subset L_{2\pi}^p$ ist, können die Lemmata (2. 3) und (2. 4) angewendet werden: $\widetilde{\widetilde{S}}^{(\rho-1)}[f] = C_1 - S^{(\rho-1)}[f] = S[\widetilde{g}]$, wobei $\widetilde{g}(x) \in L_{2\pi}^p$ ist für alle $p < \infty$. Integriert man diese Gleichung noch $(\rho-1)$-mal gliedweise, so folgt, dass $S[f]$ gleich der Fourierreihe von $I^{\rho-1}[-\widetilde{g}(x)] + P_{\rho-1}(x)$ ist, wobei $I^{\rho-1}$ das $(\rho-1)$-te unbestimmte Integral und $P_{\rho-1}$ ein algebraisches Polynom $(\rho-1)$-ten Grades bedeuten. Die Vollständigkeit des trigonometrischen Systems in $L_{2\pi}^1$ ergibt also, dass $f(x)$ im Sinne der $L_{2\pi}^1$-Norm identisch mit der absolut stetigen

21) Vgl. Zygmund [13], S. 41, (2. 4).

Funktion $I^{\rho-1}[-\widetilde{g}(x)]+P_{\rho-1}(x)$ ist, dass die Ableitung $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(\rho-2)}(x)$ absolut stetig sind und dass fast überall gilt $f^{(\rho-1)}(x)=C_1-\widetilde{g}(x) \in L^p_{2\pi}$ $(1<p<\infty)$. Bildet man auf beiden Seiten die konjugierte Funktion, so folgt mit Lemma (2.4) $\widetilde{f^{(\rho-1)}}(x) = g(x) + C$ fast überall, d.h. nach (2.5): $\widetilde{f^{(\rho-1)}}(x) = (\widetilde{f})^{(\rho-1)}(x)$ ist fast überall gleich einer Funktion aus $BV_{2\pi}$, und da man, wenn ρ ungerade ist, $\widetilde{f^{\{\rho-1\}}}(x) = \widetilde{f^{(\rho-1)}}(x)$ hat, gilt dasselbe für $\widetilde{f^{\{\rho-1\}}}(x)$. Damit ist Bedingung d) erfüllt. Ausserdem ist hiermit gezeigt, dass $S^{\{\rho\}}[f] = \widetilde{S}^{(\rho)}[f] = S'[g]$ $=S'[\widetilde{f^{(\rho-1)}}] = (-1)^{\rho+1} S'[\widetilde{f^{\{\rho-1\}}}] = S[dg]$ ist.

Wenn d) erfüllt ist, so bedeutet dies nach Bemerkung (2.6) u.a., dass $\widetilde{f}(x), (\widetilde{f})'(x), \cdots, (\widetilde{f})^{(\rho-2)}(x)$ absolut stetig sind und $(\widetilde{f})^{(\rho-1)}(x)$ fast überall gleich einer Funktion $g_{\rho-1}(x) \in BV_{2\pi}$ ist. Für $\rho = 1$ und $h > 0$ folgt also fast überall

$$|\Delta_h^1 \widetilde{f}(x)| = \left|\widetilde{f}\left(x+\frac{h}{2}\right) - \widetilde{f}\left(x-\frac{h}{2}\right)\right| = \left|\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} dg_0(t)\right| \leqq \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} dV(t),$$

wobei $V(t)$ die totale Variation von $g_0(t)$ bedeutet. Mit der Bezeichnung

$$\chi_h(x,t) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ für } t \in \left[x-\frac{h}{2};\ x+\frac{h}{2}\right] \\ 0 \text{ sonst} \end{array}\right\}$$

und der Version des Satzes von Fubini für Stieltjes-Integrale[22] folgt weiter

$$\|\Delta_h^1 \widetilde{f}(x)\|_1 \leqq \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \chi_h(x,t)\, dV(t)\right\} dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \chi_h(x,t)\, dx\right\} dV(t)$$

$$= h\int_{-\pi}^{\pi} dV(t) = h \operatorname{Var}[g_0]_{-\pi}^{\pi} = O(h) \quad (h \downarrow 0).$$

Dasselbe gilt für beliebige $h \to 0$.

Der Induktionsschluss für $\rho=2, 3, \cdots$ kann nun analog wie im Beweis des vorigen Satzes durchgeführt werden, und damit ist e) gezeigt.

Der Schritt von e) nach b) kann hier nicht wie in Satz (3.3) mit der schwachen* Kompaktheit bewiesen werden. Stattdessen hat man folgenden elementaren Beweis[23]:

Aus den Voraussetzungen $f(x) \in L^1_{2\pi}$ und $\|\Delta_h^\rho \widetilde{f}(x)\|_1 = O(h^\rho)$ folgt, dass

22) Vgl. z.B. Widder [11], S. 26, Theorem 15 d.
23) Dieses Argument stammt von Dr. H. Berens.

sowohl $\Delta_h^\rho f(x)$ als auch $\Delta_h^\rho \widetilde{f}(x)$ zum Raum $L_{2\pi}^1$ gehören. Deshalb gilt nach Lemma (2. 3b) $\widetilde{S}[\Delta_h^\rho f(x)]=S[\Delta_h^\rho \widetilde{f}(x)]$ und entsprechend $\widetilde{\sigma}_N(\Delta_h^\rho f(x))=\sigma_N(\Delta_h^\rho \widetilde{f}(x))$. Benutzt man ausserdem die für alle $g(x)\in L_{2\pi}^1$ gültige Ungleichung $\| \sigma_N(g)\|_1 \leqq \| g \|_1$, so erhält man, gleichmässig in N,

$$h^{-\rho}\| \widetilde{\sigma}_N(\Delta_h^\rho f(x))\|_1 = h^{-\rho}\|\sigma_N(\Delta_h^\rho \widetilde{f}(x))\|_1 \leqq h^{-\rho}\| \Delta_h^\rho \widetilde{f}(x)\|_1 = O(1) \ (h\to 0),$$

also, wenn man die schon im Beweis des vorigen Satzes berechneten Fourierkoeffizienten von $\Delta_h^\rho f(x)$ einsetzt,

$$h^{-\rho}\left\| \sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)(-i)(\operatorname{sign} k)\, e^{ikx}\sum_{n=0}^{\rho}(-1)^n\binom{\rho}{n}e^{ikh(\rho/2-n)}\widehat{f}(x)\right\|_1$$
$$= O(1) \ (h\to 0).$$

Mit der Relation (3. 4) ergibt sich daraus nach dem Grenzübergang $h\to 0$:

$$\left\| \sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)(-i)(\operatorname{sign} k)\, e^{ikx}(ik)^\rho \widehat{f}(k)\right\|_1 = \|\widetilde{\sigma}_N^{(\rho)}(f\,;x)\|_1 = O(1) \ (N\to\infty)$$

und, da die Äquivalenz von a) und b) schon bewiesen ist, folgt daraus b).

Der Beweis von f) kann wieder wie bei Satz (3. 3) in Form eines Ringschlusses zwischen den Aussagen b), d), f), b) durchgeführt werden, wobei für den Schritt von d) nach f) ähnlich wie bei Butzer [2], S. 284. von der durch partielle Integration zu erhaltenden Formel

$$\widetilde{f}(x+h)=\sum_{k=0}^{\rho-1}\frac{h^k}{k!}(\widetilde{f})^{(k)}(x)+\int_0^h\frac{(h-u)^{\rho-1}}{(\rho-1)!}\,d_u g_{\rho-1}(x+u)$$

ausgegangen werden kann. Dabei ist $g_{\rho-1}(x)$ die Funktion aus $BV_{2\pi}$, die nach Annahme d) fast überall mit $\widetilde{f}^{\{\rho-1\}}(x)\equiv\widetilde{f}^{(\rho-1)}(x)$ übereinstimmt. Daraus folgt nach der Definition (3. 2) von $\nabla_h^\rho \widetilde{f}(x)$ für $h>0$

$$\| h^{-\rho}\nabla_h^\rho \widetilde{f}(x)\|_1 = \left\| h^{-\rho}\rho!\int_0^h\frac{(h-u)^{\rho-1}}{(\rho-1)!}\,d_u g_{\rho-1}(x+u)\right\|_1 \leqq$$
$$\leqq h^{-\rho}\rho!\left(\max_{0\leqq u\leqq h}\frac{(h-u)^{\rho-1}}{(\rho-1)!}\right)\left\|\int_0^h |d_u g_{\rho-1}(x+u)|\right\|_1$$
$$= h^{-1}\rho\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^h |d_u g_{\rho-1}(x+u)|\,dx = h^{-1}\rho\int_{-\pi}^{\pi}\int_x^{x+h}|dg_{\rho-1}(u)|\,dx$$
$$=\rho\,[\operatorname{Var} g]_{-\pi}^{\pi} = O(1).$$

Dabei wurde zur Berechnung des Doppelintegrals dasselbe Argument wie zuvor beim Schritt d) $\rightarrow$ e) verwendet. Dasselbe gilt auch für $h<0$, so dass man erhält

$$\| \nabla_h^\rho \widetilde{f}(x)\|_1 = O(h^\rho) \ (h \rightarrow 0)\,.$$

Damit ist f) bewiesen.

Für den Beweis, dass aus f) auch b) folgt, siehe Butzer [2], S. 295, Satz 6. 2.

Der Beweis der Äquivalenz von b) und g) wird im Abschnitt 4 gegeben.

Im Raum $C_{2\pi}$ gilt die folgende Version des Satzes (3. 3):

(3. 6) SATZ[24]. *Sei $f(x)\in C_{2\pi}$ und $\rho=1,2,\cdots$, dann sind folgende Aussagen äquivalent*:

a) $$\|\sigma_n^{\{\rho\}}(f\,;x)\|_C \equiv \left\| \sum_{k=-n}^{n} \left(1-\frac{|k|}{n+1}\right) |k|^\rho \widehat{f}(k)\, e^{ikx} \right\|_C = O(1) \ (n\rightarrow\infty)\,;$$

b) *$S^{\{\rho\}}[f]$ ist die Fourierreihe einer Funktion $g(x)$ aus $L_{2\pi}^\infty$, d.h.* $(-1)^{[\rho/2]}|k|^\rho\widehat{f}(k)=\widehat{g}(k)$ *mit* $g(x)\in L_{2\pi}^\infty$, *also* $f(x)\in W_C^\rho$;

c) $$\left.\begin{cases} f^{(\rho-1)}(x), \ \textit{falls } \rho \textit{ gerade} \\ \widetilde{f}^{(\rho-1)}(x), \ \textit{falls } \rho \textit{ ungerade} \end{cases}\right\} \in \mathrm{Lip}\, 1\,;$$

d) $f^{\{\rho\}}(x) \in L_{2\pi}^\infty$;

e) $$\left.\begin{cases} \|\Delta_h^\rho f(x)\|_C = O(h^\rho) \ (h\rightarrow 0), \ \textit{falls } \rho \textit{ gerade} \\ \|\Delta_h^\rho \widetilde{f}(x)\|_C = O(h^\rho) \ (h\rightarrow 0), \ \textit{falls } \rho \textit{ ungerade} \end{cases}\right\}\,;$$

f) *falls ρ gerade ist, sind $f(x), f'(x),\cdots,f^{(\rho-2)}(x)$ stetig differenzierbar und* $\|\nabla_h^\rho f(x)\|_C = O(h^\rho) \ (h\rightarrow 0)$;
falls ρ ungerade ist, sind $\widetilde{f}(x), (\widetilde{f})'(x),\cdots,(\widetilde{f})^{(\rho-2)}(x)$ stetig differenzierbar und $\|\nabla_h^\rho \widetilde{f}(x)\|_C = O(h^\rho) \ (h\rightarrow 0)$;

g) $f^{\{\rho-1\}}(x)\in C_{2\pi}$ *und*

$$\left\| \int_u^\infty \frac{f^{\{\rho-1\}}(x+t)+f^{\{\rho-1\}}(x-t)-2f^{\{\rho-1\}}(x)}{t^2}\,dt \right\|_C = O(1) \quad (u\downarrow 0)\,.$$

Aus jeder dieser Aussagen folgt ausserdem

$$S^{\{\rho\}}[f]=S[f^{\{\rho\}}] \ \textit{oder} \ (-1)^{[\rho/2]}|k|^\rho \widehat{f}(k)=\widehat{f^{\{\rho\}}}(k)\,.$$

---

24) Vgl. Fussnote 20.

Der Satz wird auch hier nur für ungerade ρ bewiesen, da der Beweis für gerade ρ einfacher und im wesentlichen analog durchzuführen ist. Für die Äquivalenz zwischen a) und b) wird Lemma (2.1) für $p=\infty$ benutzt, und die Äquivalenz zwischen c) und d) folgt (wenn man Lemma (2.5) anwendet um $\int f^{\{\rho\}}(x)\,dx = \int (\widetilde{f})^{(\rho)}(x)\,dx = (\widetilde{f})^{(\rho-1)}(x) = \widetilde{f^{\{\rho-1\}}}(x)$ zu zeigen) aus der bekannten Tatsache, dass eine Funktion genau dann $\in \mathrm{Lip}\,1$ ist, wenn sie das Integral einer Funktion aus $L^\infty_{2\pi}$ ist.

Der Ringschluss zwischen den Bedingungen b), d) und e) bleibt im wesentlichen derselbe wie bei Satz (3.5): Wenn b) erfüllt ist, folgt aus $S^{\{\rho\}}[f] = \widetilde{S}^{(\rho)}[f] = S[g]$, $(g(x) \in L^\infty_{2\pi})$, mit Lemma (2.3 a): $\widetilde{\widetilde{S}}^{(\rho)}[f] = -S^{(\rho)}[f] = \widetilde{S}[g] = S[\widetilde{g}]$ mit $\widetilde{g}(x) \in L^p_{2\pi}$ für alle $p<\infty$, denn da $\rho \geqq 1$ ist, verschwindet das konstante Glied dieser Reihe. Integriert man ρ-mal gliedweise, so folgt aus der Vollständigkeit des trigonometrischen Systems in Raum $C_{2\pi}$, dass für alle x gilt $f(x) = I^\rho[-\widetilde{g}(x)] + P_{\rho-1}(x)$, wobei I^ρ das ρ-te unbestimmte Integral und $P_{\rho-1}(x)$ ein algebraisches Polynom von Grad $\rho-1$ ist. Also ist $f(x)$ $(\rho-1)$-mal stetig differenzierbar, $f^{(\rho)}(x) \in L^p_{2\pi}$ $(1 \leqq p < \infty)$, und wegen Lemma (2.4) gilt $(\widetilde{f^{(\rho)}})(x) = -\widetilde{\widetilde{g}}(x) = g(x) \in L^\infty_{2\pi}$ fast überall. Nach Lemma (2.5) folgt dann auch $(\widetilde{f})^{(\rho)}(x) \in L^\infty_{2\pi}$. Damit ist d) bewiesen und zugleich gezeigt, dass $S^{\{\rho\}}[f] = S[g] = S[f^{\{\rho\}}]$ erfüllt ist.

Der Schritt von d) nach e) kann wie bei Satz (3.3) durchgeführt werden, wenn man dort $p=\infty$ setzt, $f(x)$ durch $\widetilde{f}(x)$ ersetzt und die Aussage d) in der Form benutzt, dass $\widetilde{f}(x), (\widetilde{f})'(x), \cdots, (\widetilde{f})^{(\rho-1)}(x)$ absolut stetig sind und $(\widetilde{f})^{(\rho)}(x) \in L^\infty_{2\pi}$ ist.

Auch der Schritt von e) nach b) kann wie bei Satz (3.3) mit Hilfe der schwachen* Kompaktheit bewiesen werden, wenn man benutzt, dass der Raum $L^\infty_{2\pi}$ zum separablen Raum $L^1_{2\pi}$ adjungiert ist. Für den Ringschluss zwischen den Bedingungen b), d) und f) kann beim Schritt d) $\to$ f) wieder auf [2], S. 284, Satz 3.1 (i) und beim Schritt f) $\to$ b) auf [2], S. 293 Satz 6.1 verwiesen werden.

Bedingung g) wird im folgenden Abschnitt 4 bewiesen.

Ersetzt man die Bedingung d) durch $f^{\{\rho\}}(x) \in C_{2\pi}$, so gilt ein entsprechender Satz, der allerdings für das hier angestrebte Ziel der Charakterisierung von Saturationsklassen keine unmittelbare Bedeutung hat. Für den Beweis des Satzes (1.4) wird jedoch die folgende Aussage benötigt, die wir hier ohne Beweis formulieren:

(3. 7) LEMMA. *Für $f(x) \in C_{2\pi}$ und $\rho = 1, 2, \cdots$ sind die Bedingungen*

$$S^{\{\rho\}}[f] = S[g]\,;\ g(x) \in C_{2\pi}$$

und $f^{\{\rho\}}(x) \in C_{2\pi}$ *äquivalent, und aus jeder der beiden Bedingungen folgt*

$$S^{\{\rho\}}[f] = S[f^{\{\rho\}}].$$

4. Charakterisierung der Klassen W_X^ρ für beliebige $\rho > 0$. Das Charakterisierungsproblem im Raum $C_{2\pi}$ für den Fall $0 < \rho < 1$ wurde von G. Sunouchi [9], S. 130 gelöst durch den folgenden Satz:

Die Bedingung, dass $\sum_{k=1}^{\infty} k^\rho A_k(x)$ *die Fourierreihe einer Funktion aus* $L_{2\pi}^{\infty}$ *ist, ist für* $0 < \rho < 1$ *äquivalent mit der Aussage, dass*

$$\int_u^\infty \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t^{1+\rho}}\, dt$$

gleichmässig in u und x beschränkt ist.

Für $\rho = 1$ ist dieser Satz ebenfalls gültig; dies wurde zum Teil von M. Zamansky [12] S. 37 gezeigt. Nach einer Bemerkung von G. Sunouchi ist eine Verallgemeinerung dieses Ergebnisses auf die Räume $L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$ möglich. Diese Verallgemeinerung wird im folgenden Lemma (4. 6) formuliert und bewiesen. Dazu muss jedoch zunächst ein von G. Sunouchi benutztes Resultat von R. Salem und A. Zygmund [7], das ebenfalls bisher nur im Raum $C_{2\pi}$ bewiesen ist, auf den Raum $L_{2\pi}^p$ übertragen werden:

(4. 1) LEMMA. *Die Funktion $f(x)$ sei 2π-periodisch, besitze die Fourierreihe*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)$$

und erfülle die Bedingung $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(\rho, p)$ *für ein* ρ *in* $0 < \rho < 1$ *und* $1 \leqq p < \infty$. *Dann gilt*

$$\left\| \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi\rho}{2}\, \Gamma(\rho+1) \int_{1-r}^\infty \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t^{1+\rho}}\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} r^k k^\rho (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\|_p = O(1) \quad (r \uparrow 1),$$

wobei $\Gamma(x)$ *die Eulersche Gamma-Funktion ist.*

Der Beweis unterscheidet sich nur in der Schreibweise vom Beweis des entsprechenden Satzes IV in Salem-Zygmund [7], S. 32. Mit den Bezeichnungen

$G_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$,

$$f(r,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}dt,$$

$$G_x(r,t)=f(r,x+t)+f(r,x-t)-2f(r,x),\ (0\leqq r<1),$$

erhält man

$$t^{-(1+\rho)}G_x(r,t)=-4\sum_{k=1}^{\infty}t^{-(1+\rho)}\sin^2\left(\frac{kt}{2}\right)r^kA_k(x).$$

Die Reihe ist für festes $r<1$ absolut und gleichmässig in $t\geqq 0$ konvergent, also kann sie bezüglich t von 0 bis T integriert werden:

$$\int_0^T t^{-(1+\rho)}G_x(r,t)\,dt=-4\sum_{k=1}^{\infty}r^kA_k(x)\int_0^T t^{-(1+\rho)}\sin^2\left(\frac{kt}{2}\right)dt. \tag{4. 2}$$

Aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}r^k\left|\int_T^{\infty}t^{-(1+\rho)}\sin^2\left(\frac{kt}{2}\right)dt\right|<\frac{C}{T^\rho}\sum_{k=1}^{\infty}r^k<\infty$$

folgt, dass Gl. (4. 2) auch für $T=\infty$ gültig ist. Nun gilt[25]

$$\int_0^{\infty}t^{-(1+\rho)}\sin^2\left(\frac{kt}{2}\right)dt=\left(\frac{k}{2}\right)^\rho\int_0^{\infty}x^{-(1+\rho)}\sin^2x\,dx=\frac{1}{\rho}\left(\frac{k}{2}\right)^\rho\int_0^{\infty}x^{-\rho}\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{k^\rho}{2\rho}\left(\cos\frac{\pi\rho}{2}\right)\Gamma(1-\rho)=\pi k^\rho\left[4\left(\sin\frac{\pi\rho}{2}\right)\Gamma(\rho+1)\right]^{-1},$$

und damit erhält man

$$-\frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi\rho}{2}\right)\Gamma(\rho+1)\int_0^{\infty}t^{-(1+\rho)}G_x(r,t)\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}r^kk^\rho A_k(x).$$

Wenn man also zeigen kann, dass gilt

$$\left\|\int_{1-r}^{\infty}t^{-(1+\rho)}G_x(t)\,dt-\int_0^{\infty}t^{-(1+\rho)}G_x(r,t)\,dt\right\|_p=O(1)\quad(r\uparrow 1)$$

25) R. Salem-A. Zygmund [7], S. 32.

oder

$$(4.\ 3)\quad \left\| \int_0^{1-r} t^{-(1+\rho)} G_x(r,t)\, dt \right\|_p + \left\| \int_{1-r}^{\infty} t^{-(1+\rho)} \{G_x(r,t) - G_x(t)\}\, dt \right\|_p = O(1) \quad (r \uparrow 1),$$

dann ist damit die Behauptung bewiesen. Mit Hilfe der verallgemeinerten Minkowski-Ungleichung und des Mittelwertsatzes erhält man für ein θ in $0 < \theta < t$

$$\left\| \int_0^{1-r} t^{-(1+\rho)} G_x(r,t)\, dt \right\|_p \leqq \int_0^{1-r} t^{-(1+\rho)} \| G_x(r,t) \|_p\, dt =$$

$$= \int_0^{1-r} t^{-\rho} \left\| \left\{ \frac{\partial G_x(r,u)}{\partial u} \right\}_{u=\theta} \right\|_p dt\,.$$

Ausserdem folgt aus der Voraussetzung $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(\rho, p)$ und der Periodizität von $f(x)$

$$\| G_x(u+t) - G_x(u) \|_p \leqq \| f(x+u+t) - f(x+u) \|_p + \| f(x-u-t) - f(x-u) \|_p =$$

$$= \| f(x+t) - f(x) \|_p + \| f(x-t) - f(x) \|_p = O(t^\rho) \quad (t \downarrow 0)\,.$$

Nun lässt sich ganz analog wie bei Salem-Zygmund [7], S. 30, (Lemma 1) zeigen:

Aus $\quad \| G_x(u+t) - G_x(u) \|_p = O(t^\rho) \quad (t \downarrow 0),\ 1 \leqq p \leqq \infty$

folgt

$$\left\| \frac{\partial G_x(r,u)}{\partial u} \right\|_p = O(\{1-r\}^{\rho-1}) \quad (r \uparrow 1).$$

Also gilt für den ersten Term in Gl. (4. 3)

$$(4.\ 4)\quad \left\| \int_0^{1-r} t^{-(1+\rho)} G_x(r,t)\, dt \right\|_p = O\left(\{1-r\}^{\rho-1} \int_0^{1-r} t^{-\rho}\, dt \right) = O(1) \quad (r \uparrow 1)\,.$$

Der zweite Term in Gl. (4. 3) lässt sich ebenso abschätzen, wenn man die folgende Aussage benutzt, deren Beweis sich ebenfalls nicht wesentlich vom Beweis des entsprechenden Lemmas 2 aus Salem-Zygmund [7], S. 30 unterscheidet:

Aus $\quad \| G_x(u+t) - G_x(u) \|_p = O(t^\rho) \quad (t \downarrow 0)$

folgt

$$\|G_x(r,u)-G_x(u)\|_p=O(\{1-r\}^\rho)\quad(r\uparrow 1),$$

gleichmässig in u.

Also gilt

$$\left\|\int_{1-r}^{\infty}t^{-(1+\rho)}\{G_x(r,t)-G_x(t)\}\,dt\right\|_p\leqq\int_{1-r}^{\infty}t^{-(1+\rho)}\|G_x(r,t)-G_x(t)\|_p\,dt=$$

$$=O\left((1-r)^\rho\int_{1-r}^{\infty}t^{-(1+\rho)}\,dt\right)=O(1)\quad(r\uparrow 1).$$

Hieraus und aus Gl. (4. 4) folgt Gl. (4. 3), q.e.d.

Das am Anfang dieses Abschnitts erwähnte Ergebnis von M. Zamansky lässt sich ebenfalls auf den Raum $L^p_{2\pi}$ übertragen:

(4. 5) LEMMA. *Aus* $\|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\|_p=O(t)\ (t\downarrow 0),\ (1\leqq p\leqq\infty)$

folgt $$\left\|\sigma_n(f;x)-f(x)-\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}t^{-2}(f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x))\,dt\right\|_p=$$

$$=O\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty).$$

Der Beweis dieser Behauptung kann fast wörtlich wie bei M. Zamansky [12], S. 37～40 durchgeführt werden, deshalb sei hier darauf verzichtet.

Mit Hilfe dieser beiden Lemmata wird die genannte Verallgemeinerung des Satzes von Sunouchi bewiesen:

(4. 6) LEMMA. *Sei* $f(x)\in L^p_{2\pi}$ $(1\leqq p<\infty)$ *mit* $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k(x)$.

Es gilt

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)k^\rho A_k(x)\right\|_p=O(1)\quad(n\to\infty)$$

für ein ρ *in* $0<\rho<1$ *genau dann, wenn*

$$\left\|\int_u^{\infty}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^{1+\rho}}\,dt\right\|_p=O(1)\quad(u\downarrow 0).$$

BEWSIS. Um zu zeigen, dass aus der zuletzt genannten Integralrelation die Bedingung

$$(4.\ 7) \qquad \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(1-\frac{k}{n+1}\right) k^{\rho} A_k(x) \right\|_p = O(1) \ \ (n\to\infty)$$

folgt, gehen wir denselben Weg wie G. Sunouchi [9], S. 130. So ergibt eine einfache Rechnung die Fourierentwicklung

$$\int_u^{\infty} t^{-(1+\rho)} G_x(t)\,dt \sim -4\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)\int_u^{\infty} t^{-(1+\rho)}\sin^2\left(\frac{kt}{2}\right)dt\,,$$

wobei $G_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$ ist.

Wenn nun $\left\|\int_u^{\infty} t^{-(1+\rho)}G_x(t)dt\right\|_p = O(1)$ $(u\downarrow 0)$ ist, folgt mit Hilfe der für die Fejér-Mittel σ_n gültigen Ungleichung $\|\sigma_n(f;x)\|_p \leqq \|f(x)\|_p$

$$\left\|\sigma_n\left(\int_u^{\infty} t^{-(1+\rho)}G_x(t)\,dt\,;x\right)\right\|_p = 4\left\|\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)A_k(x)\int_u^{\infty} t^{-(1+\rho)}\sin^2\left(\frac{kt}{2}\right)dt\right\|_p$$

$=O(1)$, gleichmässig in $u>0$ und n.

Führt man den Grenzübergang $u\downarrow 0$ durch und benutzt man wiederum die Identität

$$\int_0^{\infty} t^{-(1+\rho)}\sin^2\left(\frac{kt}{2}\right)dt = \left(\frac{k}{2}\right)^{\rho}\int_0^{\infty} x^{-(1+\rho)}\sin^2 x\,dx = k^{\rho}C_{\rho}\ \ (0<\rho\leqq 1),$$

wobei $C_{\rho}\neq 0$ eine nur von ρ abhängige Grösse ist, dann folgt (4. 7).

Umgekehrt sei jetzt (4. 7) erfüllt, dann ergibt sich aus Lemma (2. 9)

$$(4.\ 8) \qquad \left\| f(x)-\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^{\rho}}{(n+1)^{\rho}}\right)A_k(x)\right\|_p = O(n^{-\rho})\ \ (n\to\infty)\,,$$

d.h. die beste Approximation von $f(x)$ im Mittel der Ordnung p ist mindestens von der Ordnung $O(n^{-\rho})$. Dies hat nach dem Satz von Bernstein für $L^p_{2\pi}$-Funktionen (E. S. Quade, [5], S. 535, Theorem 2 (i)) zur Folge, dass $f(x)\in \mathrm{Lip}(\rho, p)$ ist, falls nur Werte $0<\rho<1$ betrachtet werden. Damit sind die Voraussetzungen des Lemmas (4. 1) erfüllt und man erhält

$$(4.9)\qquad \left\| \frac{1}{\pi} \sin\frac{\pi\rho}{2}\,\Gamma(\rho+1)\int_{1-r}^{\infty} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^{1+\rho}}\,dt \right\|_p \leqq$$

$$\leqq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} r^k k^\rho A_k(x) \right\|_p + O(1) \quad (r \uparrow 1).$$

Aus der Voraussetzung (4. 7) folgt nun, dass auch der erste Term auf der rechten Seite beschränkt ist, denn für die Abel-Poisson-Mittel $\sum_{k=1}^{\infty} r^k k^\rho A_k(x)$ der trigonometrischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} r^k k^\rho A_k(x)$ gelten ganz entsprechende Aussagen wie sie in den Lemmata (2. 1) und (2. 2) für die Fejér-Mittel formuliert sind.[26] Also sind die Bedingungen

$$\|\sigma_n(T;x)\|_p = O(1) \ (n\to\infty) \quad \text{und} \quad \left\|\sum_{k=1}^{\infty} r^k A_k(x)\right\|_p = O(1) \ \ (r\uparrow 1)$$

für $1 \leqq p \leqq \infty$ und jede trigonometrische Reihe $T(x)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k(x)$ äquivalent, und die rechte Seite von (4. 9) ist gleichmässig in r beschränkt. Da ρ fest ist, folgt

$$\left\| \int_{1-r}^{\infty} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^{1+\rho}}\,dt \right\|_p = O(1), \quad (r\uparrow 1).$$

Setzt man $1-r=u$, so ergibt sich die Behauptung für $0<\rho<1$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass dieses Ergebnis auch im Falle $\rho=1$ aus (4. 7) abgeleitet werden kann. Die Relation (4. 8) bleibt für $\rho=1$ erhalten, und dies bedeutet nach dem genannten Bernstein-Satz, dass $\|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\|_p = O(t)$ gilt für $t\downarrow 0$. Also kann Lemma (4. 5) angewendet werden, und da unter der Voraussetzung (4.7) nach Lemma (2. 9) gilt $\|f(x)-\sigma_n(f;x)\|_p = O\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n\to\infty)$, kann die Aussage von Lemma (4. 5) in der Form

$$\left\| \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty} t^{-2}(f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x))\,dt \right\|_p = O(1) \ \ (n\to\infty)$$

26) Vgl. Zygmund [13], S. 149, 150. Nebenbei ergibt sich also, dass man den Sätzen (3. 3), (3. 5) und (3. 6) als achte äquivalente Aussage $\left\|\sum_{k=1}^{\infty} r^k k^\rho A_k(x)\right\| = O(1)\ (r\uparrow 1)$ hinzufügen kann.

geschrieben werden. Wenn nun ein $u>0$ beliebig gegeben ist, kann n so gewählt werden, dass $\frac{\pi}{2(n+1)}<u<\frac{\pi}{2n}$ ist, und es gilt

$$\left\|\int_u^{\frac{\pi}{2n}} t^{-2}(f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x))\,dt\right\|_p \leqq \int_{\frac{\pi}{2(n+1)}}^{\frac{\pi}{2n}} t^{-2}\,\|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\|_p\,dt$$

$$=O\left(\int_{\frac{\pi}{2(n+1)}}^{\frac{\pi}{2n}} t^{-1}\,dt\right)=O\left(\log\frac{n+1}{n}\right)=O(1)\ (n\to\infty),\ d.h.$$

$$\left\|\int_u^{\infty} t^{-2}(f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x))\,dt\right\|_p \leqq \left\|\int_u^{\frac{\pi}{2n}}\cdots\right\|_p+\left\|\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\infty}\cdots\right\|_p=O(1)\ (u\downarrow 0),$$

und damit ist Lemma (4. 6) bewiesen.

Zu diesem Lemma ist zu bemerken, dass unter der Voraussetzung $f(x)\in C_{2\pi}$ die $L^\infty_{2\pi}$-Norm durch die $C_{2\pi}$-Norm ersetzt werden kann, denn es ist leicht zu zeigen, dass $\int_u^\infty t^{-2}(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))\,dt$ dann bezüglich x stetig ist. Damit erhält man

(4. 10) LEMMA. *Sei X einer der Räume $C_{2\pi}$, $L^p_{2\pi}$ $(1\leqq p<\infty)$. Dann ist für $0<\rho\leqq 1$ und $f(x)\in X$ die Bedingung $f(x)\in W^\rho_X$ äquivalent mit der Aussage*

$$\left\|\int_u^\infty \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^{1+\rho}}\,dt\right\|_X=O(1)\quad (u\downarrow 0).$$

Der in der Einleitung formulierte Hauptsatz (1. 4) ist eine Erweiterung dieses Lemmas auf alle $\rho>0$.

Beweis des Satzes (1. 4). Zunächst sei ρ nicht ganzzahlig. Wenn $f(x)\in W^\rho_X$ ist und die Bezeichnung $<\rho>=\rho-[\rho]$ eingeführt wird, erhält man durch Anwendung des Lemmas (2. 10) auf die Fourierreihe $\sum_{k=1}^\infty k^\rho A_k(x)$ mit $\beta=<\rho>$ die Aussage: $\sum_{k=1}^\infty k^{-<\rho>}k^\rho A_k(x)=\sum_{k=1}^\infty k^{[\rho]}A_k(x)$ ist die Fourierreihe einer Funktion $l(x)$ aus $\left\{\begin{array}{l} L^r_{2\pi},\ r=r(<\rho>)>1,\ \text{falls } X=L^1_{2\pi} \\ L^p_{2\pi},\ \text{falls } X=L^p_{2\pi}\ (1<p<\infty)\end{array}\right\}$.

$$\left| \; C_{2\pi}, \text{ falls } X = C_{2\pi} \right.$$

Wir werden diese Eigenschaft im folgenden kurz mit $l(x) \in R(r, p, C)$ bezeichnen. Da dann um so mehr auch $f(x) \in R(r, p, C)$ gilt und $[\rho]$ eine ganze Zahl ist, kann man für $X = L^p_{2\pi}$ $(1 \leqq p < \infty)$ Satz (3. 3) bzw. für $X = C_{2\pi}$ Lemma (3. 7) anwenden und erhält $S^{\{[\rho]\}}[f] = S[f^{\{[\rho]\}}]$ mit $f^{\{[\rho]\}}(x) \in R(r, p, C)$, so dass, wenn $f^{\{[\rho]\}}(x) \sim \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^*(x)$ ist, die Bedingung $f(x) \in W^\rho_X$ in der Form

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) k^{<\rho>} A_k^*(x) \right\|_X = O(1) \quad (n \to \infty)$$

geschrieben werden kann, d.h. $f^{\{[\rho]\}}(x) \in W_X^{<\rho>}$. Aus Lemma (4. 10) folgt dann

$$\left\| \int_u^\infty \frac{f^{\{[\rho]\}}(x+t) + f^{\{[\rho]\}}(x-t) - 2 f^{\{[\rho]\}}(x)}{t^{1+<\rho>}} dt \right\|_X = O(1) \quad (u \downarrow 0),$$

und damit ist Bedingung 2) von Satz (1. 4) erfüllt.

Wenn umgekehrt Bedingung 2) für $0 < \,<\rho>\, < 1$ zutrifft, dann folgt aus Lemma (4. 10)

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) k^{<\rho>} A_k^*(x) \right\|_X = O(1) \quad (n \to \infty),$$

wobei wieder $f^{\{[\rho]\}}(x) \sim \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^*(x)$ ist. Ausserdem ist nach Bedingung 2) $f^{\{[\rho]\}}(x) \in X$; im Falle $X = L^1_{2\pi}$ gilt sogar $f^{\{[\rho]\}}(x) \in L^r_{2\pi}$ für ein $r = r(<\rho>) > 1$, denn die Folge $\{k^{-<\rho>}\}$ gehört nach Lemma (2. 10) zur Multiplikatorenklasse $(S, L^r_{2\pi})$. Insgesamt ist also $f^{\{[\rho]\}}(x) \in R(r, p, C)$ und dies bedeutet, da $[\rho] \geqq 0$ ist, um so mehr, dass $f(x) \in R(r, p, C)$ ist. Also kann für alle Räume Satz (3. 3) angewendet werden, und man erhält $S^{\{[\rho]\}}[f] = S[f^{\{[\rho]\}}]$, d. h. $A_k^*(x) = (-1)^{[\rho/2]} \cdot k^{[\rho]} A_k(x)$, wenn $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)$ gesetzt wird.

Also folgt:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) k^{<\rho>} A_k^*(x) \right\|_X = \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) k^\rho A_k(x) \right\|_X = O(1) \quad (n \to \infty),$$

und dies bedeutet nach Lemma (2. 1) bzw. (2. 2) und Definition (1. 3), dass

$f(x)$ zur Klasse W_X^ρ gehört. Damit ist Satz (1. 4) für nicht-ganzzahlige ρ bewiesen.

Sei ρ nun eine ganze Zahl. Dann folgt analog wie vorher aus $f(x) \in W_X^\rho$ mit Hilfe des Lemmas (2. 10) für $\beta = 1$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) k A_k^*(x) \right\|_X = O(1) \ (n \to \infty),$$

wobei $f^{\{\rho-1\}}(x) \sim \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^*(x)$ gesetzt wurde und $f^{\{\rho-1\}}(x) \in R(r, p, C) \subset X$ ist für ein $r > 1$. Daraus folgt mit Lemma (4. 10) die Bedingung 2) des Satzes (1. 4).

Ebenso lässt sich der Beweis, dass aus dieser Bedingung $f(x) \in W_X^\rho$ folgt, auf den Fall ganzzahliger ρ-Werte übertragen, wenn man $<\rho>$ durch 1 und $f^{\{[\rho]\}}(x)$ durch $f^{\{\rho-1\}}(x)$ ersetzt.

Damit ist Satz (1. 4) bewiesen und zugleich der noch fehlende Beweis für die Bedingungen g) in den Sätzen (3. 3), (3. 5) und (3. 6) gegeben.

Zum Schluss formulieren wir als Beispiel für die konkrete Gestalt des Ergebnisses den Satz (1.4) noch einmal für den speziellen Wert $\rho = \frac{7}{2}$:

In diesem Fall ist unter der Voraussetzung $f(x) \in X$, wobei X einer der Räume $C_{2\pi}$, $L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$ sein kann, die Bedingung $f(x) \in W_X^{7/2}$ äquivalent mit der Bedingung:

$f'''(x) \in X$ *und*

$$\left\| \int_u^\infty \frac{\widetilde{f'''}(x+t) + \widetilde{f'''}(x-t) - 2\widetilde{f'''}(x)}{t^{3/2}} dt \right\|_X = O(1) \quad (u \downarrow 0).$$

Bemerkung bei der Korrektur: Wie Herr Prof. G. Sunouchi uns freundlicherweise mitteilte, hat er in einer Arbeit "Saturation in local approximation" (diese Zeitschrift) eine andere Charakterisierung der Klassen W_x^ρ für den kokalen Fall bewiesen.

LITERATUR

[1] ALJANČIĆ, S.; Approximation of continuous functions by typical means of their Fourier series, Proceed. Amer. Math. Soc. 12(1961), 681–688.

[2] BUTZER, P. L.; Beziehungen zwischen den Riemannschen, Taylorschen und gewöhnlichen Ableitungen reellwertiger Funktionen, Math. Annalen 144(1961), 275–298.

[3] BUTZER, P. L. AND SUNOUCHI, G.; Approximation theorems for the solution of Fourier's problem and Dirichlet's problem, Math. Annalen 155(1964), 316–330.

[4] KACZMARZ, S.; On some classes of Fourier series, Journ. London Math. Soc. 8(1933), 39–45.
[5] QUADE, E. S.; Trigonometric approximation in the mean, Duke Math. Journ. 3(1937), 529–543.
[6] RIESZ, M.; Sur les fonctions conjugées, Math. Zeitschrift 27(1928), 218–244.
[7] SALEM, R. AND ZYGMUND, A.; Capacity of sets and Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc. 59(1946), 23–41.
[8] STEČKIN, S. B.; Über die beste Approximation gewisser Klassen periodischer Funktionen durch trigonometrische Polynome, (Russisch) Izv. Adad. Nauk, SSSR, Ser. Math. 20(1956), 643–648.
[9] SUNOUCHI, G.; Characterization of certain classes of functions, Tôhoku Math. Journ. (2) 14(1962), 127–134.
[10] SUNOUCHI, G. AND WATARI, C.; On determination of the class of saturation in the theory of approximation of functions I, II, Proceed. Jap. Academy 34(1958), 477–481; Tôhoku Math. Journ. 11(1959), 480–488.
[11] WIDDER, D. V.; The Laplace transform. Princeton 1946.
[12] ZAMANSKY, M.; Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 66(1949), 19–93.
[13] ZYGMUND, A.; Trigonometric series, Vol. I, Cambridge 1959.

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (ANALYSIS)
TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN.