Tôhoku Math. Journ.
Vol. 18, No. 4, 1966

ÜBER EINEN DARSTELLUNGSSATZ FÜR FUNKTIONEN ALS FOURIERINTEGRALE UND ANWENDUNGEN IN DER FOURIERANALYSIS

HUBERT BERENS UND ERNST GÖRLICH*)

(Received March 15, 1966, revised August 16, 1966)

1. Einleitung. Eine hinreichende Bedingung, dass eine gerade trigonometrische Reihe

$$\frac{\lambda_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\cos kx \tag{1.1}$$

die Fourierreihe einer integrierbaren Funktion l darstellt, ist : $\lambda_k\to 0$ für $k\to\infty$ und die Folge $\{\lambda_k\}$ ist quasikonvex, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\lambda_k-2\lambda_{k+1}+\lambda_{k+2}|<+\infty \tag{1.2}$$

(Satz von Young und Kolmogoroff, siehe A. Zygmund [1, S. 109]).

In der Theorie der singulären Faltungsintegrale treten nun Familien von Folgen

$$\{\lambda_k(\rho),\ k=0,1,2,\cdots;\ 0<\rho<\infty\} \tag{1.3}$$

auf mit der Eigenschaft, dass die zugeordneten trigonometrischen Reihen (1.1) die Fourierreihen einer Familie von integrierbaren Funktionen $\{l_\rho: 0<\rho<\infty\}$ mit gleichmässig bzgl. ρ beschränktem Integral $\int_0^{2\pi}|l_\rho(x)|\,dx$ bilden.

Hinreichend hierfür ist: $\lambda_k(\rho)\to 0$ für $k\to\infty$ und alle $0<\rho<\infty$ und die in dem Parameter ρ gleichmässige Beschränktheit der Summe (1.2) für alle Folgen $\{\lambda_k(\rho)\}$ (siehe z. B. G. Sunouchi [3, s. 129]). Diese allgemeine

*) Diese Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsvorhabens Bu 166/3 der „Deutschen Forschungsgemeinschaft".

Bedingung ist aber in vielen Beispielen nur schwer zu verifizieren.

Wir werden in dieser Arbeit ein einfaches hinreichendes Kriterium für eine allgemeine Klasse von Familien von Folgen (1. 3) behandeln, wenn nämlich

$$\left\{\lambda_k(\rho) = h\left(\frac{k}{\rho}\right),\ k=0,1,2,\cdots;\ 0<\rho<\infty\right\} \tag{1.4}$$

ist, wobei $h(v)$ eine gerade, stetige Funktion auf der reellen Zahlengeraden R ist mit $h(0)=1$ und $\lim_{v\to\infty} h(v)=0$.

Der Ausgangspunkt hierzu ist ein Kriterium von A. Beurling [4], das Analogon des Satzes von Young und Kolmogoroff für Fourierintegrale. Wir werden eine schwächere Version dieses Satzes von A. Beurling formulieren, zugeschnitten auf die Anwendungen in dieser Arbeit, und über ihn mittels der Poissonschen Beziehung zu einem Kriterium für Familien von Folgen vom Typ (1. 4) gelangen. Der Darstellungssatz selbst ist elementar, jedoch sind die Anwendungsmöglichkeiten in der Theorie der singulären Faltungsintegrale, insbesondere in der Saturationstheorie, überraschend.

Ist speziell die Folge $\{\lambda_k\}$ konvex, dann ist (1. 2) automatisch erfüllt; der entsprechende Satz für Fourierintegrale ist dann bekanntlich der Satz von Pólya aus der Wahrscheinlichkeitstheorie (siehe z. B. E. Lukacs [29, S. 70]).

Dies ist der Inhalt des Abschnitts 2. Als Anwendungen des Darstellungssatzes betrachten wir in den folgenden Abschnitten singuläre Integrale vom Faltungstyp. Abschnitt 3 beschäftigt sich mit der gleichmässigen Beschränktheit solcher Integraloperatoren bezüglich des Parameters ρ für $\rho\to\infty$, insbesondere bei nicht geschlossen darstellbarem Kern. Die Abschnitte 4 und 5 enthalten Anwendungen auf die Saturationstheorie und auf Konvergenzaussagen für Taylorentwicklungen. Viele bekannte Beispiele lassen sich so mit einer einheitlichen Methode behandeln.

Die Autoren danken den Herren Professoren P. L. Butzer und G. Sunouchi sowie Herrn Dr. R. J. Nessel für viele Anregungen und Hinweise.

Im folgenden sei $X_{2\pi}$ stets einer der Banachräume $C_{2\pi}$ und $L^p_{2\pi}$, $1\leqq p<\infty$, unter der Norm

$$\|f\|_{X_{2\pi}} = \begin{cases} \max\limits_x |f(x)| & (f\in C_{2\pi}), \\ \left\{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} & (f\in L^p_{2\pi}). \end{cases} \tag{1.5}$$

Weiter bezeichnen wir mit $L^\infty_{2\pi}$ die Menge aller wesentlich beschränkten 2π-periodischen Funktionen auf R und mit $NBV_{2\pi}$ den Raum der normalisierten 2π-periodischen Funktionen μ von beschränkter Variation auf $[0,2\pi]$ (also

$\mu(x)=\{\mu(x+)+\mu(x-)\}/2$, $\mu(0)=0$ und $\mu(x+2\pi)-\mu(x)=$ konst.).

Ist $f\in L^1_{2\pi}$, dann heisst

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\,e^{ikx}\,,\quad \hat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ikx}f(x)\,dx \tag{1.6}$$

die Fourierreihe von f mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, und

$$[d\mu](x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\check{\mu}(k)\,e^{ikx}\,,\quad \check{\mu}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ikx}\,d\mu(x) \tag{1.7}$$

heisst die Fourier-Stieltjesreihe der Funktion $\mu\in NBV_{2\pi}$ mit den Fourier-Stieltjeskoeffizienten $\check{\mu}(k)$.

Auf den Räumen $L^p(R)$, $1\leqq p\leqq 2$, definieren wir entsprechend die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ivx}f(x)\,dx \quad (f\in L^p(R)) \tag{1.8}$$

(die Transformation ist im üblichen Sinne zu verstehen), und auf $NBV(R)$ ist die Fourier-Stieltjestransformierte durch

$$\check{\mu}(v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ivx}\,d\mu(x) \quad (\mu\in NBV(R)) \tag{1.9}$$

definiert.

2. Eine hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer Funktion als Fouriertransformierte. Notwendige und hinreichende Darstellungssätze für die Fourier bzw. Fourier-Stieltjes transformation wurden z.B. von S. Bochner [5], H. Cramér [20], J. L. B. Cooper [19] und neuerdings von K. de Leeuw [26] und P. L. Butzer-R. J. Nessel [16] bewiesen.

Unter dem Gesichtspunkt der konkreten Anwendbarkeit sind die hinreichenden und einfach verifizierbaren Bedingungen von G. Pólya [31] in der Wahrscheinlichkeitstheorie und A. Beurling [4] von grösserem Nutzen. Beurling bewies:

Ist die Funktion h lokal absolut stetig und gehören h und h' zum Raum $L^2(R)$, dann existiert eine Funktion H in $L^1(R)$, so dass

$$h(v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-ivx} H(x)\,dx\,.$$

Sei h eine gerade Funktion auf $(-\infty, \infty)$ mit $\lim_{|v|\to\infty} h(v) = 0$. Hat h eine Ableitung derart, dass das Integral

$$\int_0^\infty t\,|d\,h'(t)| < \infty$$

ist, dann ist h die Fouriertransformierte einer Funktion $H \in L^1(R)$.

Das zweite Kriterium ist das Analogon zum Satz von Young und Kolmogoroff. Wir werden in Satz 1 in diesem Abschnitt eine schwächere Version dieses hinreichenden Kriteriums formulieren und einen Beweis skizzieren.

SATZ 1. *Sei $h(v)$ eine stetige gerade Funktion auf der Zahlengeraden mit $h(0)=1$ und $\lim_{v\to\infty} h(v)=0$. Genügt die Funktion weiter den Bedingungen:*

(i) *$h(v)$ ist lokal absolut stetig in $(0, \infty)$, $h'(v)$ ist stückweise stetig mit r Sprungstellen in $0 < v_1 < \cdots < v_r < \infty$ und absolut stetig in jedem endlichen abgeschlossenen Teilintervall von $(0, \infty)$, das keinen dieser Punkte enthält.*

(ii)
$$\int_0^\infty v\,|h''(v)|\,dv < \infty\,.$$

Dann ist $h(v)$ darstellbar als Fouriertransformierte einer geraden Funktion H in $L^1(R)$ mit $\int_{-\infty}^\infty H(x)dx=2\pi$ und

(2.1)
$$\begin{aligned} H(x) &= 2\int_0^\infty h(v)\cos vx\,dv \\ &= \sum_{k=1}^{r}\{h'(v_k+) - h'(v_k-)\}\left(\frac{\sin v_k x/2}{x/2}\right)^2 + \\ &\quad + \int_0^\infty h''(v)\left(\frac{\sin vx/2}{x/2}\right)^2 dv \quad (x \neq 0)\,. \end{aligned}$$

BEWEIS. Wir beschränken uns auf den Fall, dass $h'(v)$ keine Sprungstellen besitzt. Durch partielle Integration erhalten wir mit $0 < \varepsilon < R < \infty$

$$\int_{\varepsilon}^{R} v h''(v)\, dv = Rh'(R) - \varepsilon h'(\varepsilon) - [h(R) - h(\varepsilon)],$$

und da wegen (ii) die linke Seite für $R \to \infty$ beschränkt bleibt, folgt mit $\lim_{R\to\infty} h(R) = 0$ auch $\lim_{R\to\infty} h'(R) = 0$. Dies ergibt weiter

$$\text{(2. 2)} \qquad \lim_{R\to\infty} |R h'(R)| = \lim_{R\to\infty} \left| -R \int_R^\infty h''(v)\, dv \right| \leqq \lim_{R\to\infty} \int_R^\infty v\,|h''(v)|\,dv = 0\,.$$

Entsprechend zeigt man die Grenzwertbeziehung

$$\text{(2. 3)} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^2 h'(\varepsilon) = 0\,.$$

Für beliebiges, aber festes reelles $x \neq 0$ und $0 < \varepsilon < R < \infty$ erhalten wir nun

$$2\int_{\varepsilon}^{R} h(v) \cos vx\, dv = 2h(R)\frac{\sin Rx}{x} - 2h(\varepsilon)\frac{\sin \varepsilon x}{x} - h'(R)\left(\frac{\sin Rx/2}{x/2}\right)^2 +$$
$$+ h'(\varepsilon)\left(\frac{\sin \varepsilon x/2}{x/2}\right)^2 + \int_{\varepsilon}^{R} h''(v)\left(\frac{\sin vx/2}{x/2}\right)^2 dv$$

und für die Grenzübergänge $R \to \infty$ und $\varepsilon \to 0+$ wegen (2. 2) und (2. 3)

$$2\int_0^\infty h(v)\cos vx\, dv = \int_0^\infty h''(v)\left(\frac{\sin vx/2}{x/2}\right)^2 dv,$$

wobei das Integral auf der linken Seite der Gleichung im uneigentlichen Riemannschen Sinne existiert und das auf der rechten im Lebesgueschen Sinne für jedes $x \neq 0$. Es bleibt zu zeigen, dass die Funktion

$$H(x) = \int_0^\infty h''(v)\left(\frac{\sin vx/2}{x/2}\right)^2 dv$$

die gewünschten Eigenschaften besitzt. Offenkundig ist $H(x)$ stetig für alle $x \neq 0$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(x)|\,dx \leqq \int_0^\infty v\,|h'(v)|\,dv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v}\left(\frac{\sin vx/2}{x/2}\right)^2 dx$$
$$= 2\pi \int_0^\infty v\,|h''(v)|\, dv,$$

also ist $H \in L^1(R)$. Andererseits folgt für $v \neq 0$

$$\hat{H}(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx} H(x)\, dx = \int_{|v|}^{\infty} u h''(u) \left(1 - \frac{|v|}{u}\right) du,$$

da

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx} \frac{1}{u} \left(\frac{\sin ux/2}{x/2}\right)^2 dx = \begin{cases} 1 - \dfrac{|v|}{u}, & |v| \leqq u, \\ 0, & |v| \geqq u. \end{cases}$$

Hieraus erhält man $\hat{H}(v) = h(v)$, wenn man berücksichtigt, dass h gerade ist. Wegen der Stetigkeit von $\hat{H}(v)$ und $h(v)$ gilt diese Gleichung auch für $v=0$, d.h.

$$\hat{H}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\, dx = h(0) = 1,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Hat $h'(v)$ endlich viele Sprünge, so verläuft der Beweis analog.

BEMERKUNG 1. Satz 1 kann auch als hinreichendes Kriterium dafür aufgefasst werden, dass die Funktion h eine Faktorfunktion vom Typ $(L^p(R); L^p(R))$, $1 \leqq p \leqq 2$, für Fourierintegrale bildet. Hierzu siehe z.B. E. Hille und R. S. Phillips [23, S. 556]; weiter sei auf die neuere Arbeit von K. de Leeuw [26] hingewiesen.

Angesichts der Formel (2. 1) erhält man folgende abgeschwächte Version des Satzes von Pólya:

FOLGERUNG 1. *Erfüllt* $h(v)$ *die Bedingung* (i) *mit* $\{h'(v_k+) - h'(v_k-)\} > 0$, $k = 1, 2, \cdots, r$, *und gilt* $h''(v) \geqq 0$ *für fast alle* v *in* $(0, \infty)$ *an Stelle von* (ii), *dann bleibt die Aussage des Satzes gültig, und es folgt* $H(x) \geqq 0$.

BEMERKUNG 2. Für einen Beweis von Folgerung 1 unter der Voraussetzung der zweifachen Monotonie von $h(v)$ auf $0 \leqq v \leqq \infty$ siehe z.B. N. I. Achieser [1, S. 125].

3. Eine Klasse von singulären Faltungsintegralen. $X_{2\pi}$ sei einer der Räume $C_{2\pi}$ und $L_{2\pi}^p$ $(1 \leqq p < \infty)$. Wir definieren auf $X_{2\pi}$ das singuläre Faltungsintegral

$$(3.1) \qquad I_\rho(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int^{2\pi} f(x-u)\,\chi_\rho(u)\,du \qquad (f \in X_{2\pi},\ \rho \to \infty)$$

mit dem Parameter $\rho > 0$ und dem Kern χ_ρ, der wie folgt festgelegt ist: Es sei H eine beliebige, aber fortan fest gewählte Funktion in $L^1(R)$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} H(u)\,du = 2\pi$, und es sei

$$(3.2) \qquad \chi_\rho(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho H[\rho(u+2k\pi)] \qquad (0 < u < 2\pi;\ \rho > 0)$$

fast überall.

Wesentliche Standardbeispiele sind von diesem Typ.

Die Summanden $\rho H[\rho(\cdot\ +2k\pi)]$ sind Funktionen in $L^1_{2\pi}$ für jedes $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ und jedes $0 < \rho < \infty$, weiter ist mit (1.5)

$$(3.3) \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\rho H[\rho(\cdot\ +2k\pi)\|_{L^1_{2\pi}} = \frac{\rho}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |H(\rho u)|\,du = \frac{1}{2\pi}\|H\|_{L^1(R)}.$$

Folglich gehört der Kern χ_ρ zu $L^1_{2\pi}$ für jedes $\rho > 0$ und seine $L^1_{2\pi}$-Norm ist durch $(1/2\pi)\|H\|_{L^1(R)}$ gleichmässig bezüglich ρ beschränkt. Weiter werden die Fourierkoeffizienten von χ_ρ nach (1.6) und (1.8) gegeben durch

$$(3.4) \qquad \widehat{\chi}_\rho(k) = \frac{\rho}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{2j\pi}^{2(j+1)\pi} e^{-iku}\,H(\rho u)\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iku/\rho}\,H(u)\,du = \widehat{H}(k/\rho) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Da H normiert ist, also $\widehat{H}(0) = 1$, gilt $\lim_{\rho\to\infty}\widehat{\chi}_\rho(k) = 1$ für jedes feste $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Damit bilden die Faltungsintegrale $I_\rho(f;\cdot)$ beschränkte lineare Transformationen von $X_{2\pi}$ in sich für jedes $\rho>0$, ihre Normen $\|I_\rho\|$ sind darüberhinaus gleichmässig in ρ beschränkt durch

$$(3.5) \qquad \|I_\rho\| \leqq \|\chi_\rho\|_{L^1_{2\pi}} \leqq (1/2\pi)\|H\|_{L^1(R)},$$

und die Fourierreihe von $I_\rho(f;x)$ hat die Gestalt

$$(3.6) \qquad I_\rho(f;x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{H}(k/\rho)\,\hat{f}(k)\,e^{ikx}.$$

Hieraus folgt weiter mit $\lim_{\rho\to\infty} \widehat{\chi}_\rho(k) = 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$$\lim_{\rho\to\infty} \| I_\rho(p;\cdot) - p(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0 \tag{3.7}$$

für jedes trigonometrische Polynom p, und da die Menge dieser Polynome dicht in $X_{2\pi}$ liegt, ergibt sich aus (3.5) und (3.7) schliesslich über den Satz von Banach-Steinhaus:

SATZ 2. *Die durch* (3.1), (3.2) *definierten Faltungsintegrale* $I_\rho(f;\cdot)$, $0 < \rho < \infty$, *bilden eine Familie von beschränkten linearen Operatoren von* $X_{2\pi} \to X_{2\pi}$, *deren Normen gleichmässig in* ρ *durch* $(1/2\pi)\|H\|_{L^1(R)}$ *beschränkt sind und für die gilt*

$$\lim_{\rho\to\infty} \| I_\rho(f;\cdot) - f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} = 0 \tag{3.8}$$

für alle $f \in X_{2\pi}$.

BEMERKUNG 3. Ist die Funktion H ausserdem von beschränkter Variation auf R, dann existiert das Faltungsintegral $I_\rho(f;x)$ für alle x, es gehört zum Raume $C_{2\pi}$ und

$$I_\rho(f;x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \widehat{H}(k/\rho)\, \hat{f}(k)\, e^{ikx}.$$

Dies ist der Satz von Young und Hardy (siehe z. B. N. I. Achieser [1, S. 116] und A. Zygmund [40, S. 160]). Der Beweis wird über die Poissonsche Formel geführt.

BEMERKUNG 4. Die singulären Integrale $I_\rho(f;x)$, $0 < \rho < \infty$, auf $X_{2\pi}$ bilden unter den gemachten Voraussetzungen eine Schar von Operatoren vom Faktorfolgentyp $(X_{2\pi}, X_{2\pi})$, deren Normen bezüglich ρ gleichmässig beschränkt sind. Die Faktorfolgen haben die spezielle Gestalt

$$\{\lambda_k(\rho) = h(k/\rho),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots;\ 0 < \rho < \infty\}, \tag{3.9}$$

wobei $h = \widehat{H}$ die Fouriertransformierte einer Funktion H in $L^1(R)$ ist mit $\widehat{H}(0) = 1$. Für Multiplikatoren für Fourierreihen siehe z. B. A. Zygmund [40, S. 175 f].

Eine allgemeinere Familie von Operatoren vom Faktorfolgentyp $(X_{2\pi}, X_{2\pi})$ mit Faktoren der Form (3.9) und bezüglich ρ gleichmässig beschränkten Normen erhält man, wenn h die Fourier-Stieltjestransformierte $\check{\psi}$ einer

Funktion ψ von beschränkter Variation auf R ist mit $\check{\psi}(0)=1$. Ist ψ normalisiert, also $\psi(x)=\{\psi(x+)+\psi(x-)\}/2$ für alle $x \in R$, sowie $\psi(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}\psi(x)=0$ und $\psi(\infty)=\lim_{x\to\infty}\psi(x)=2\pi$, dann haben die Operatoren die Gestalt

$$I_\rho(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi} f(x-u)\,d\Psi_\rho(u) \quad (f\in X_{2\pi},\ \rho\to\infty)$$

mit

$$\Psi_\rho(u)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\psi[\rho(u+2k\pi)]-\psi[\rho 2k\pi]\} \quad (0\leqq u\leqq 2\pi;\ 0<\rho<\infty);$$

das Faltungsintegral ist im Lebesgue-Stieltjesschen Sinne zu nehmen. Die Fourierreihe hat dann die Darstellung

$$I_\rho(f;x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\check{\psi}(k/\rho)\hat{f}(k)\,e^{ikx}.$$

In allen hier betrachteten Anwendungsbeispielen ist jedoch der Stieltjes-Kern Ψ_ρ absolut stetig, d.h. wir haben Integrale vom Typ (3.1).

Wir untersuchen nun zwei typische Beispiele. Als erstes das *verallgemeinerte periodische singuläre Integral von Weierstrass*

$$C_t^\kappa(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-u)\,c_t^\kappa(u)\,du \quad (f\in X_{2\pi};\ t\to 0+) \tag{3.10}$$

mit dem Kern

$$c_t^\kappa(u)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-t|k|^\kappa}e^{iku} \quad (0<t<\infty;\ \kappa>0). \tag{3.11}$$

Die Funktion

$$h_\kappa(v)=e^{-|v|^\kappa} \quad (-\infty<v<\infty;\ \kappa>0) \tag{3.12}$$

erfüllt die Bedingungen von Satz 1; insbesondere gilt

$$h_\kappa''(v)=\kappa v^{\kappa-2}(\kappa v^\kappa+1-\kappa)\,e^{-v^\kappa} \quad (0<v<\infty)$$

und

$$\int_0^\infty v\,|h_\kappa''(v)|\,dv\leqq\begin{cases}1 & ;\ 0<\kappa\leqq 1\\ 2\kappa-1 & ;\ 1\leqq\kappa<\infty.\end{cases}$$

Folglich existiert eine gerade Funktion H_κ in $L^1(R)$, derart dass $h_\kappa(v)=\widehat{H}_\kappa(v)$ ist. Mit $\rho=t^{-1/\kappa}$ erhalten wir also, dass das Weierstrassintegral (3.10) ein singuläres Integral vom Typ (3.1) ist.

Die Funktion $H_\kappa(x)$ ist für $0<\kappa\leqq 2$ nicht negativ, nicht jedoch für $2<\kappa<\infty$ (siehe hierzu z.B. S. Bochner [6], vgl. auch S. Bochner [7]). Für $0<\kappa\leqq 1$ folgt $H_\kappa(x)\geqq 0$ unmittelbar aus Folgerung 1; für einen Beweis dieser Aussage im allgemeinen Falle $0<\kappa\leqq 2$ sei auf P. Lévy [27; S. 272—274] oder Y. V. Linnik [28; S. 40] verwiesen. Wir bemerken weiter, dass die Funktion $H_\kappa(x)$ für $\kappa=1$ und $\kappa=2$ geschlossen darstellbar ist, und zwar ist $H_1(x)=2/(1+x^2)$ der Kern von *Poisson-Cauchy* und $H_2(x)=\sqrt{\pi}\,e^{-x^2/4}$ der Kern von *Gauss-Weierstrass.* Summendarstellungen für $H_\kappa(x)$ gaben W. Feller [21] und H. Bergström [3]:

$$H_\kappa(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{|x|}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{|x|^\kappa}\right)^k\frac{\Gamma(1+k\kappa)}{k!}\sin\frac{k\kappa\pi}{2}\,; & 0<\kappa<1\,;\ x\neq 0\,,\\[2ex] -2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^k\sin 3(k+1)\pi/2}{(k+1)!}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{\kappa}+1\right): & 1<\kappa\leqq 2\,;\ x\neq 0\,.\end{cases}$$

(Die für $1<\kappa\leqq 2$ angegebene Formel findet sich für alle $\kappa\geqq 1$ bei G. H. Hardy [22; S. 385] und für $\kappa=2,3,\cdots$ z.B. schon bei E. M. Wright [37]. Weitere Literatur gibt E. Lukacs [29; S. 105] an.) Zum Schluss sei noch erwähnt, dass die Funktionen $H_\kappa(x)$, $0<\kappa\leqq 2$, stabile Dichtefunktionen im Sinne von P. Lévy sind.

Nach diesen Ausführungen über die Funktionen H_κ erhalten wir aus der Darstellung der Kerne

$$c_t^\kappa(u)=t^{-1/\kappa}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_\kappa[t^{-1/\kappa}(u+2k\pi)]\quad(0<u<2\pi\,;t>0)\,,$$

dass die singulären Integrale $C_t^\kappa(f;\cdot)$ für $0<t<\infty$ und $0<\kappa\leqq 2$ eine Familie von positiven Operatoren auf $X_{2\pi}$ bilden. Im Falle $\kappa=1$ haben wir das singuläre Integral von Abel-Poisson ($t=\log 1/r$; $0<r<1$), und $C_t^2(f;\cdot)$ ist bekannt als das spezielle Integral von Weierstrass. Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Faltungsintegrale (3.10) eine gleichmässig beschränkte, stark stetige Halbgruppe von Operatoren vom Faktorfolgentyp ($X_{2\pi}$, $X_{2\pi}$) bilden (vgl. z.B. E. Hille-R. S. Phillips [23; S. 555]).

Im nicht periodischen Fall definieren wir entsprechend zu (3.1) die singulären Faltungsintegrale

$$(3.13)\qquad I_\rho(f;x)=\frac{\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-u)H(\rho u)\,du\quad(f\in L^p(R),\ 1\leqq p<\infty;\rho\to\infty),$$

wobei H eine gerade, zu 2π normierte Funktion in $L^1(R)$ ist. Es gilt

SATZ 3. *Die Integrale in* (3.13) *bilden eine Familie von beschränkten linearen Transformationen von* $L^p(R)$, $1 \leqq p < \infty$, *in sich mit*

$$\|I_\rho\| \leqq (1/2\pi)\|H\|_{L^1(R)} \quad (0 < \rho < \infty)$$

und

$$\lim_{\rho\to\infty} \|I_\rho(f;\cdot) - f(\cdot)\|_{L^p(R)} = 0 \quad (f \in L^p(R)).$$

Im Falle $1 \leqq p \leqq 2$ haben wir über die Parsevalsche Gleichung die weitere Darstellung

$$(3.14) \qquad I_\rho(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx}\,\widehat{H}(v/\rho)\,\hat{f}(v)\,dv\,.$$

In unserem Beispiel haben wir mit $\rho = t^{-1/\kappa}$ die *verallgemeinerten Weierstrassintegrale*

$$(3.15) \qquad W_t^\kappa(f;x) = \frac{t^{-1/\kappa}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\,H_\kappa(t^{-1/\kappa}u)\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivx}\,e^{-t|v|^\kappa}\,\hat{f}(v)\,dv \quad (f \in L^p(R),\ 0 < t < \infty;\ \kappa > 0).$$

Die Darstellung auf der rechten Seite der Gleichung gilt nur für $1 \leqq p \leqq 2$.

Als zweites Beispiel untersuchen wir die *typischen Mittel*

$$(3.16) \qquad T_{n,\kappa}(f;x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \left\{\frac{|k|}{n+1}\right\}^\kappa\right)\hat{f}(k)\,e^{ikx} \quad (f \in X_{2\pi};\ \kappa > 0);$$

Wir betrachten sie als Sonderfall der *Rieszmittel*

$$(3.17) \quad R_{n,\kappa,\lambda}(f;x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \left\{\frac{|k|}{n+1}\right\}^\kappa\right)^\lambda \hat{f}(k)\,e^{ikx} \quad (f \in X_{2\pi};\ \lambda > 0,\ \kappa > 0).$$

Die gleichmässige Beschränktheit der Operatornormen $\|R_{n,\kappa,\lambda}\|$ wurde in einer der bedeutenden Arbeiten über die Rieszmittel von G. Sunouchi [32] bewiesen. Für $\lambda \geqq 1$ und $\kappa > 0$ lässt sich dieses Ergebnis leicht aus Satz 1 ableiten. Denn die Funktion

(3.18) $$h(v)=\begin{cases}(1-|v|^{\kappa})^{\lambda} & ; -1\leqq v\leqq 1\\ 0 & ; \text{sonst}\end{cases}$$

erfüllt für $\lambda\geqq 1$ und $0<\kappa\leqq 1$ die Vorausetzungen von Folgerung 1, woraus sich zugleich die Positivität der Rieszschen Mittel für diese κ und λ ergibt, und im Falle $\lambda\geqq 1$ und $\kappa>1$ verifiziert man leicht für $h(v)$ die Bedingungen von Satz 1. Somit bilden die Mittel (3.17) für $\lambda\geqq 1$ und $\kappa>0$ singuläre Integrale vom Typ (3.1) mit dem Kern

$$\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\left\{\frac{|k|}{n+1}\right\}^{\kappa}\right)^{\lambda} e^{ikx}.$$

Genauso behandeln wir im nicht periodischen Fall das singläre Integral von Riesz

(3.19) $$B_{N,\kappa,\lambda}(f;x)=\int_{-N}^{N} e^{ivx}\left(1-\left\{\frac{|v|}{N}\right\}^{\kappa}\right)^{\lambda}\hat{f}(v)dv$$

$$(f\in L^{p}(R),\ 1\leqq p\leqq 2;\ N\to\infty;\ \lambda>0;\ \kappa>0).$$

Im Falle $\kappa=2$ wird (3.19) als singuläres Integral von Bochner-Riesz bezeichnet.

4. Anwendungen auf Saturationsprobleme. Zuvor definieren wir einige Funktionenklassen, die im folgenden als sogenannte Favardklassen auftreten.

Die Teilmenge W_X^{κ} des Raumes $X_{2\pi}$ ist für $\kappa>0$ und $X_{2\pi}=C_{2\pi}$ definiert durch

(4.1) $$W_C^{\kappa}=\{f\in C_{2\pi};\ |k|^{\kappa}\hat{f}(k)=\hat{g}(k),\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\ \text{mit } g\in L_{2\pi}^{\infty}\},$$

für $X_{2\pi}=L_{2\pi}^{1}$ durch

(4.2) $$W_1^{\kappa}=\{f\in L_{2\pi}^{1};\ |k|^{\kappa}\hat{f}(k)=\check{\mu}(k),\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\ \text{mit } \mu\in NBV_{2\pi}\},$$

und für $X_{2\pi}=L_{2\pi}^{p}$, $1<p<\infty$, durch

(4.3) $$W_p^{\kappa}=\{f\in L_{2\pi}^{p};\ |k|^{\kappa}\hat{f}(k)=\hat{g}(k),\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\ \text{mit } g\in L_{2\pi}^{p}\}$$

Mit ${}^{o}W_X^{\kappa}$ bezeichnen wir die Teilklasse von W_X^{κ}, für die das Element g wieder zu $X_{2\pi}$ gehört. Wegen der Reflexivität der Räume $L_{2\pi}^{p}$, $1<p<\infty$, sind ${}^{o}W_p^{\kappa}$ und W_p^{κ} für diese p identisch. Ist $f\in {}^{o}W_X^{\kappa}$, also $|k|^{\kappa}\hat{f}(k)=\hat{g}(k)$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$, mit $g\in X_{2\pi}$, so benutzen wir die Bezeichnung

$$f^{\{\kappa\}}(x) = g(x). \tag{4.4}$$

Die Teilmenge V_p^κ des Raumes $L^p(R)$ ist für $\kappa > 0$ und $p = 1$ definiert durch

$$V_1^\kappa = \{f \in L^1(R);\ |v|^\kappa \hat{f}(v) = \check{\mu}(v),\ -\infty < v < \infty,\ \text{mit } \mu \in NBV(R)\}, \tag{4.5}$$

und für $1 < p \leqq 2$ durch

$$V_p^\kappa = \{f \in L^p(R); |v|^\kappa \hat{f}(v) = \hat{g}(v),\ -\infty < v < \infty,\ \text{mit } g \in L^p(R)\}. \tag{4.6}$$

Die Teilklassen ${}^oV_p^\kappa$ sind wie oben definiert.

Entsprechend wird für $f \in {}^oV_p^\kappa$ die Funktion $f^{\{\kappa\}}$ definiert durch

$$|v|^\kappa \hat{f}(v) = [f^{\{\kappa\}}]^\wedge(v) = \hat{g}(v). \tag{4.7}$$

Bezüglich des Problems einer äquivalenten Charakterisierung dieser Klassen verweisen wir auf die Arbeiten von G. Sunouchi [34], P. L. Butzer und E. Görlich [13] für die W_X^κ-Klassen und auf die Arbeiten von J. L. B. Cooper [19], P. L. Butzer und R. J. Nessel [16], sowie R. J. Nessel [30] für die Klassen V_p^κ.

Wir betrachten das Saturationsproblem nun zunächst in den Räumen $X_{2\pi}$ und zitieren den folgenden allgemeinen und grundlegenden Satz von G. Sunouchi [34, S. 128].

SATZ 4. *Sei $f \in X_{2\pi}$ und erfülle das singuläre Integral*

$$I_\rho(f; x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-u)\,\chi_\rho(u)\,du \quad (0 < \rho < \infty) \tag{4.8}$$

mit normiertem Kern in $L_{2\pi}^1$ die folgenden Bedingungen;

(a) *Es existieren Konstanten $\kappa > 0$, $c \neq 0$, so dass*

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1-\hat{\chi}_\rho(k)}{c\rho^{-\kappa}} = |k|^\kappa \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{4.9}$$

(b) *Die Folgen*

$$\Lambda_\rho(k) = \begin{cases} 1 & ;\ k = 0 \\ \dfrac{1-\hat{\chi}_\rho(k)}{c\rho^{-\kappa}|k|^\kappa} & ;\ k \neq 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

bilden gleichmässig bezüglich ρ beschränkte Faktorfolgen vom Typ $(X_{2\pi}, X_{2\pi})$. *Dann ist das singuläre Integral* $I_\rho(f;\cdot)$ *im Raum* $X_{2\pi}$ *saturiert mit der Ordnung* $\rho^{-\kappa}$ $(\rho\to\infty)$, *und die Favardklasse ist gegeben durch* W_X^κ; *d.h. es gilt*

$$\|f(\cdot)-I_\rho(f;\cdot)\|_{X_{2\pi}}=o(\rho^{-\kappa})\quad(\rho\to\infty)\Longleftrightarrow I_\rho(f;\cdot)\equiv f(\cdot);$$

$$\|f(\cdot)-I_\rho(f;\cdot)\|_{X_{2\pi}}=O(\rho^{-\kappa})\quad(\rho\to\infty)\Longleftrightarrow f\in W_X^\kappa.$$

Der kritische Punkt bei der Anwendung dieses Satzes besteht in der Verifizierung der Bedingung (b). Eine hinreichende, aber meist nicht einfach nachprüfbare Bedingung besteht — wie in der Einleitung erwähnt — in der bezüglich ρ gleichmässigen Quasikonvexität der Folge $\Lambda_\rho(k)$ (vgl. A. Zygmund [39, S. 109] und G. Sunouchi [34, S. 128]). Für die Klasse von singulären Integralen, bei denen $\Lambda_\rho(k)=\lambda(k/\rho)$ ist, haben wir jedoch das folgende

KOROLLAR 1. *Lässt sich* $\Lambda_\rho(k)$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$, *für* $0<\rho<\infty$ *darstellen durch* $\Lambda_\rho(k)=\lambda(k/\rho)$, *wobei* $\lambda(v)$ *die Fouriertransformierte einer* $L^1(R)-$*Funktion bzw. eine Fourier-Stieltjestransformierte ist, dann sind die Bedingungen* (4.9) *und* (4.10) *erfüllt. Folglich hat das zugeordnete singuläre Integral das in Satz* 4 *angegebene Saturationsverhalten.*

BEWEIS. Da $\lambda(v)$ stetig ist und $\lambda(0)=1$, folgt $\lim_{\rho\to\infty}\lambda(k/\rho)=1$, und damit ist (a) erfüllt. Dass (b) erfüllt ist, folgt aus Satz 2 und Bemerkung 4. Wenn man

$$\varphi_\rho(u)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda(k/\rho)\,e^{iku}$$

setzt, folgt darüberhinaus für die Räume $X_{2\pi}=C_{2\pi}$, $L_{2\pi}^p$ $(1<p<\infty)$

$$\left[\frac{f(\cdot)-I_\rho(f;\cdot)}{c\,\rho^{-\kappa}}\right]^\wedge(k)=\Lambda_\rho(k)\,\hat g(k)=\hat\varphi_\rho(k)\,\hat g(k)\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

also erhalt hier

$$\rho^\kappa[f(x)-I_\rho(f;x)]=\frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x-u)\varphi_\rho(u)\,du\quad(f\in W_X^\kappa;\rho>0)\tag{4.11}$$

die Darstellung als ein singuläres Integral vom Typ (3.1). Ist $X_{2\pi}=L_{2\pi}^1$, so ergibt sich entsprechend für fast alle x

$$(4.12)\qquad \rho^{\kappa}[f(x)-I_{\rho}(f;x)]=\frac{c}{2\pi}\int^{2\pi}\varphi_{\rho}(x-u)\,d\mu(u)\quad (f\in W_1^{\kappa};\rho>0).$$

BEMERKUNG 5. Wenn wir die Klasse der singulären Integrale (4. 8) weiter einschränken, indem wir fordern, dass die Funktion $\lambda(v)$ im obigen Korollar die Bedingungen des Satzes 1 oder der Folgerung 1 erfüllt, bekommen wir ein einfaches Kriterium für die Anwendbarkeit von Satz 4. Damit erhalten wir bei nur geringem Verlust an Allgemeinheit einen wesentlich einfacheren Beweis des direkten Teiles des Saturationssatzes gegenüber dem von P.L. Butzer-E. Görlich [14; Sätze 2.7, 5.1, 5.5] angewendeten verfahren. Die folgenden Anwendungsbeispiele gehören sämtlich zu dieser speziellen Klasse von singulären Integralen.

Wir betrachten zunächst das verallgemeinerte periodische Weierstrass-integral (3. 10). Hier ist $\rho=t^{-1/\kappa}$, $c=1$ und

$$(4.13)\qquad \lambda(v)=\frac{1-e^{-|v|^{\kappa}}}{|v|^{\kappa}}\qquad (\kappa>0).$$

Eine elementare Rechnung ergibt, dass $\lambda(v)$ die Bedingungen von Satz 1 erfüllt. Insbesondere folgt die Bedingung (ii) aus der Abschätzung

$$v\,|\lambda''(v)|\leqq\begin{cases}(2\kappa^2+\kappa)\,v^{\kappa-1} & ;\ 0\leqq v\leqq 1,\\ (4\kappa^2+3\kappa)\,v^{-\kappa-1} & ;\ 1\leqq v<\infty.\end{cases}$$

Also hat $C_t^{\kappa}(f;\cdot)$ im Raum $X_{2\pi}$ für $\kappa>0$ die Saturationsordnung t $(t\to 0+)$ und die Favardklasse W_X^{κ}. (Vgl. P. L. Butzer-E. Görlich [14, Satz 6.3]).

Satz 4 ist weiterhin auf die typischen Mittel (3. 16) und die Riesz-Mittel (3. 17) für $\lambda\geqq 1$ und $\kappa>0$ anwendbar. In beiden Fällen ist $n^{-\kappa}$ $(n\to\infty)$ die Saturationsordnung und W_X^{κ} die Favardklasse. Auch für die singulären Integrale von Bernstein-Rogosinski, von Riemann und Jackson — de La Vallée Poussin sind die Voraussetzungen von Satz 4 (Bemerkung 5) erfüllt. Für ihre Definitionen und Literaturangaben verweisen wir auf P. L. Butzer-E. Görlich [14].

Nun zu den Räumen $L^p(R)$, $1\leqq p\leqq 2$. Die zu Satz 4 und Korollar 1 entsprechenden Sätze für die Fouriertransformation wurden zuerst von P. L. Butzer [10] und unabhängig davon von G. Sunouchi [33; Teil I] aufgestellt. Wir verzichten hier auf ihre ausführliche Formulierung und geben nur das der Bemerkung 5 entsprechende Ergebnis an. (Für eine weitere Bedingung, dass die folgende Funktion (4. 14) eine Fourier- bzw. Fourier-Stieltjestransformierte ist, vgl. auch H. König [24].)

SATZ 5. *Sei* $f \in L^p(R)$, $1 \leqq p \leqq 2$, *und es gelte für das singuläre Integral* (3.13):
Es existieren Konstanten $c \neq 0$ *und* $\kappa > 0$ *und eine Funtion* $\lambda(v)$, *die den Voraussetzungen von Satz* 1 *oder Folgerung* 1 *genügt, derart dass für alle* $\rho > 0$ *die Darstellung besteht*

$$\lambda(v/\rho) = \begin{cases} 1\,; & v = 0\,, \\ \dfrac{1-\widehat{H}(|v|/\rho)}{c\rho^{-\kappa}|v|^{\kappa}}\,; & v \neq 0\,. \end{cases} \tag{4.14}$$

Dann ist das singuläre Integral $I_\rho(f;\cdot)$ *saturiert im Raum* $L^p(R)$ *mit Saturationsordnung* $\rho^{-\kappa}$ $(\rho \to \infty)$, *und die Favardklasse ist* V_p^κ.

Der Beweis ist analog zu dem des Korollars; statt (4.11), (4.12) erhält man hier

$$\rho^\kappa[f(x) - I_\rho(f;x)] = \frac{c}{2\pi}\rho\int_{-\infty}^{\infty} g(x-u)\,L(\rho u)\,du \quad (f \in V_p^\kappa,\ 1 < p \leqq 2), \tag{4.15}$$

$$\rho^\kappa[f(x) - I_\rho(f;x)] = \frac{c}{2\pi}\rho\int_{-\infty}^{\infty} L[\rho(x-u)]\,d\mu(u) \quad (f \in V_1^\kappa)\,, \tag{4.16}$$

wobei $\lambda(v) = \widehat{L}(v)$ ist.

Satz 5 lässt sich z.B. auf das nichtperiodische verallgemeinerte Weierstrass-integral $W_t^\kappa(f;\cdot)$ (Formel (3.15)) anwenden. Hier ist $\rho = t^{-1/\kappa}$, $c = 1$ und die Bedingung (4.14) von Satz 5 ist auf Grund der für die Funktion (4.13) durchgeführten Rechnung erfüllt. Also hat $W_t^\kappa(f;\cdot)$ für $\kappa > 0$ im Raum $L^p(R)$, $1 \leqq p \leqq 2$, die Saturationsordnung t $(t \to 0+)$ und die Favardklasse V_p^κ.

Entsprechend erhält man, unter Verwendung der beim periodischen Fall durchgeführten Rechnungen, für das singuläre Integral $B_{N,\kappa,\lambda}(f;\cdot)$ von Riesz (3.19) für $\lambda \geqq 1$ und $\kappa > 0$ im Raum $L^p(R)$ die Saturationsordnung $N^{-\kappa}$ $(N \to \infty)$ und die Favardklasse V_p^κ. Für $\lambda = 1$ ist hierin der Saturationssatz für die typischen Mittel und für $\kappa = 2$ der Saturationsatz des singulären Integrals von Bochner-Riesz enthalten. Auch für den Integralmittelwert (siehe Abschnitt 5) lässt sich auf diesem Wege ein Saturationssatz gewinnen.

BEMERKUNG 6. Für die Behandlung des Saturationsproblems für mehrdimensionale Faltungsintegrale mittels Fouriertransformationsmethoden und für weitere Literatur hierzu wird auf die Arbeiten von P. L. Butzer-R. J. Nessel [15], [16], R. J. Nessel [30] verwiesen.

5. Taylorentwicklungen. Satz 5 lässt sich weiter auf das *singuläre Integral von Picard* anwenden. Allgemeiner betrachten wir

$$(5.1)\quad P_{\alpha,\rho}(f;x)=\frac{\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-u)H_\alpha(\rho u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ivx}}{1+(|v|/\rho)^\alpha}\hat{f}(v)\,dv$$

$$(f\in L^p(R);\ \alpha>0;\ \rho\to\infty)$$

mit dem Kern definiert durch

$$(5.2)\qquad \widehat{H}_\alpha(v)=(1+|v|^\alpha)^{-1}$$

(vgl. Y. V. Linnik [28, S. 39]). Für $\alpha=2$ ist $H_2(x)=\pi e^{-|x|}$, und $P_{2,\rho}(f;\cdot)$ ist das singuläre Integral von Picard.

Die Funktion $h(v)=(1+|v|^\alpha)^{-1}$ erfüllt für $0<\alpha\leqq 1$ die Voraussetzungen von Folgerung 1 und für alle $\alpha>0$ die Voraussetzungen von Satz 1, also ist $H_\alpha(x)\in L^1(R)$ und nicht negativ für $0<\alpha\leqq 1$. (Tatsächlich ist der Kern auch noch für $1<\alpha\leqq 2$ nicht negativ, siehe Y. V. Linnik [28, S. 40]). Hieraus folgt offenbar mit Satz 3, dass das Integral (5.1) auf $L^p(R)$ vom Typ (3.10) ist.

Wenn wir nun die Voraussetzung (4.14) von Satz 5 verifizieren, so ist sie mit $\kappa=\alpha$ und $c=1$ erfüllt, und wegen der Identität

$$(5.3)\qquad \lambda(|v|/\rho)=\frac{1-\dfrac{1}{1+(|v|/\rho)^\alpha}}{(|v|/\rho)^\alpha}=\frac{1}{1+(|v|/\rho)^\alpha}=\widehat{H}_\alpha(v/\rho)$$

reduziert sich (4.14) auf die oben gezeigte Kerneigenschaft. Also ergibt sich aus Satz 5 Saturationsordnung $\rho^{-\alpha}$ $(\rho\to\infty)$ und die Favardklasse V_p^α. Hier liegt nun die bemerkenswerte Situation vor, dass die Gleichungen (4.15), (4.16) Rekursionsformeln sind; denn für $f\in V_p^\alpha$, $1<p\leqq 2$, ist

$$(5.4)\qquad \rho^\alpha[f(x)-P_{\alpha,\rho}(f;x)]=\frac{\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(x-u)H_\alpha(\rho u)\,du,$$

und für $f\in V_1^\alpha$ haben wir

$$(5.5)\qquad \rho^\alpha[f(x)-P_{\alpha,\rho}(f;x)]=\frac{\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_\alpha(\rho u)\,d\mu(u),$$

so dass sich der direkte Teil des Saturationsproblems auf das Problem der gleichmässigen Beschränktheit der Operatoren reduziert. Ist $f\in {}^oV_p^\alpha$, $1\leqq p\leqq 2$, also das zugeordnete g in $L^p(R)$, so ergibt sich aus (5.4) zwanglos die Konvergenzaussage

$$\lim_{\rho\to\infty} \|\rho^\alpha[f(\cdot) - P_{\alpha,\rho}(f;\cdot)] - g(\cdot)\|_{L^p(R)} = 0. \tag{5.6}$$

Angesichts von (5.3) liegt es nahe, diese Quotientenbildung zu iterieren, um zu Taylordifferenzen der Form

$$\rho^{\alpha r}\left\{P_{\alpha,\rho}(f;x) - \sum_{j=0}^{r-1}(-\rho^{-\alpha})^j f^{\{\alpha j\}}(x)\right\} = \frac{(-1)^r\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^{\{\alpha r\}}(x-u)\,H_\alpha(\rho u)\,du \tag{5.7}$$

$$(r = 1, 2, \cdots; f \in {}^oV_p^{\alpha r})$$

zu gelangen, wie sie zuerst von P. L. Butzer und H. G. Tillman [18] in Zusammenhang mit dem Saturationsproblem untersucht wurden.

Wir machen nun zunächst für periodische Funktionen eine allgemeinere Aussage über Grenzwertbeziehungen vom Typ (5.6). Solche asymptotischen Relationen lassen sich generell mit Hilfe des Satzes von Banach-Steinhaus im Raum $X_{2\pi}$ aus allen Saturationssätzen folgern, da ${}^oW_X^\kappa$ unter der Norm $\|f\|_{X_{2\pi}} + \|g\|_{X_{2\pi}}$ zu einem Banachraum wird (vgl. P. L. Butzer-E. Görlich [14, Satz 8.4]). Wir verzichten auf weitere Einzelheiten und formulieren gleich

SATZ 6. *Sei $I_\rho(f;\cdot)$ ein singuläres Integral der Form* (4.8), *das die Bedingung des Korollars* 1 (*oder speziell der Bemerkung* 5) *erfüllt. Es gilt $f \in {}^oW_X^\kappa$ genau dann, wenn der Limes*

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^\kappa[f(\cdot) - I_\rho(f;\cdot)]$$

im starken oder im schwachen Sinne existiert. Der Grenzwert ist $cf^{\{\kappa\}}$.

Hieraus erhält man für die im Anschluss an Satz 4 genannten singulären Integrale asymptotische Beziehungen, für deren explizite Formulierung wir wieder auf P. L. Butzer-E. Görlich [14, §8] verweisen.

Ist $f \in W_X^\kappa$ und $X_{2\pi}$ einer der Räume $C_{2\pi}$, $L_{2\pi}^1$, so lässt sich die Grenzwertbeziehung nur im Sinne der schwachen* Konvergenz aufrechterhalten. Statt Satz 6 ergibt sich dann die folgende äquivalente Charakterisierung der Klassen W_X^κ:

SATZ 7. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 6 *gilt*: $f \in W_X^\kappa$ *genau dann, wenn*

$$\rho_\kappa[f(\cdot)-I_\rho(f;\cdot)]$$

für $\rho\to\infty$ in der schwachen Topologie konvergiert. Der Grenzwert ist cg, falls $X_{2\pi}=C_{2\pi}$ oder $L^p_{2\pi}$, $1<p<\infty$, wobei g die durch (4.1) definierte Funktion ist, bzw. $d\mu$ im Falle $X_{2\pi}=L^1_{2\pi}$, mit μ definiert durch (4.2).*

BEWEIS. Wir beschränken uns auf den Fall $f\in W^\kappa_1$. Entsprechend der isometrischen Isomorphie des Raumes $NBV_{2\pi}$ zu dem Raum der beschränkten linearen Funktionale auf $C_{2\pi}$ identifizieren wir die Funktionen $\rho^\kappa\int_0^x[f(u)^\kappa - I_\rho(f;u)]du$ mit linearen Funktionalen auf $C_{2\pi}$. Ist $f\in W^\kappa_1$, so folgt aus Satz 4, dass diese Funktionen von gleichmässig beschränkter Variation auf $[0, 2\pi]$ sind, also sind die Funktionale gleichmässig beschränkt bezüglich ρ. Dies und die aus (4.9) folgende Konvergenz der Funktionale auf der Menge der trigonometrischen Polynome ergeben mit Hilfe des Satzes von Banach-Steinhaus die schwache* Konvergenz gegen $c\mu(x)$.

Umgekehrt folgt aus der schwachen* Konvergenz, insbesondere für die Menge der Funktionen e^{ikx}, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$, zusammen mit (4.9) sofort die Beziehung $|k|^\kappa \hat{f}(k)=\check{\mu}(k)$ für alle ganzen k.

BEMERKUNG 7. In den Räumen $L^p_{2\pi}$, $1<p<\infty$, ist wegen der Reflexivität die schwache* Konvergenz mit der schwachen Konvergenz identisch, und angesichts von Satz 6 (oder auch Satz 4) folgt also die Äquivalenz der schwachen und der starken Konvergenz in diesem Zusammenhang.

Ist $I_\rho(f;\cdot)$ speziell eine stark stetige Halbgruppe von Operatoren, so entspricht der Aussage von Satz 6 die bekannte Tatsache, dass die Definition des infinitesimalen Generators durch einen starken oder schwachen Grenzwert gleichwertig ist. (Vgl. z.B. K. Yosida [38, S. 58]).

Zur Aussage in Satz 7 möchten wir auf die Arbeit von K. de Leeuw [25] über duale Halbgruppen von Operatoren hinweisen, speziell siehe Theorem 2.2 und die Anwendungen.

Für die Sätze 6 und 7 ist nicht erforderlich, dass die Bedingungen des Korollars 1 oder der Bemerkung 5 erfüllt sind. Beim Beweis wird nur benutzt, dass aus $f\in W^p_X$ folgt $\|f(\cdot)-I_\rho(f;\cdot)\|_{X_{2\pi}}=O(\rho^{-\kappa})$, d.h. dass der direkte Teil des Saturationssatzes bekannt ist. Somit kann diese Voraussetzung durch die hinreichenden Bedingungen jedes anderen Saturationssatzes ersetzt werden, so dass die Ergebnisse z.B. für alle in P. L. Butzer-E. Görlich [14] betrachteten singulären Integrale anwendbar werden. Für weitere Literaturangaben über solche Grenzwertrelationen verweisen wir ebenfalls auf diese Arbeit.

Nun zu den Taylorentwicklungen vom Butzer-Tillmannschen Typ. Entsprechend dem singulären Integral (5.1) lässt sich auf den Räumen $X_{2\pi}$ das Beispiel

$$(5.8)\qquad P^*_{\alpha,\rho}(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-u)\,\chi_{\alpha,\rho}(u)\,du$$

$$\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(|k|/\rho)^{\alpha}}\hat{f}(k)e^{ikx}\quad (f\in X_{2\pi};\ \alpha>0,\ \rho\to\infty)$$

behandeln, wobei der Kern durch die Koeffizienten

$$\widehat{\chi}_{\alpha,\rho}(k)=[1+(|k|/\rho)^{\alpha}]^{-1}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

definiert ist. Auf Grund der am Anfang von Abschnitt 5 durchgeführten Überlegungen ergibt sich mit Satz 2, dass $P^*_{\alpha,\rho}(f;\cdot)$ ein singuläres Integral vom Typ (3.1) ist mit

$$\chi_{\alpha,\rho}(x)=\rho\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_{\alpha}[\rho(x+2k\pi)]\,.$$

Speziell haben wir

$$\chi_{2,\rho}(x)=\rho\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\rho|x+2k\pi|}=\rho\pi\frac{\cosh\rho(\pi-x)}{\sinh\rho\pi}\quad (0\leqq x\leqq 2\pi)\,.$$

Die Beziehungen (5.4) bis (5.7) gelten entsprechend für das periodische Integral $P^*_{\alpha,\rho}(f;\cdot)$, insbesondere sind Satz 6 und 7 hierauf anwendbar.

Ein weiteres Beispiel fur die Anwendbarkeit von Satz 4 (bzw. Korollar 1 oder Bemerkung 5) auf Taylordifferenzen liefert der *Integralmittelwert* (auch als singuläres Integral von *Lebesgue* und in der englischen Terminologie als "moving average" bezeichnet)

$$(5.9)\quad R^1_h(f;x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(u)\,du=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin kh}{kh}\hat{f}(k)\,e^{ikx}\qquad (f\in X_{2\pi};\ h\to 0+)\,.$$

Dabei wird der Wert von $(\sin kh)/kh$ fur $k=0$ zu 1 festgelegt. Die Bedingungen von Bemerkung 5 lassen sich für die Fourierkoeffizienten $\lambda(|k|h)$ der r-ten Taylordifferenz

$$(5.10)\quad h^{-2r}\left\{R^1_h(f;x)-\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\frac{h^{2j}}{(2j+1)!}f^{(2j)}\right\}\quad (r=1,2,\cdots;\ f\in {}^{o}W^{2r-2}_X)$$

leicht verifizieren, wenn man $\rho=1/h$ setzt. Aus der Entwicklung von

$$\lambda(v) = \frac{(2r+1)!}{(-1)^r} \sum_{j=r}^{\infty} (-1)^j \frac{v^{2(j-r)}}{(2j+1)!}$$

erhält man durch gliedweise Differentiation und Integration die Beschränktheit des Integrals $\int_0^1 v|\lambda''(v)|dv$. Andererseits gilt für $r=1, 2, \cdots$ offenbar $v|\lambda''(v)| = O(v^{-2})$ $(v\to\infty)$, insgesamt also $\int_0^\infty v|\lambda''(v)|dv < +\infty$. Damit erhalten wir

SATZ 8. *Sei $f\in X_{2\pi}$ und $r=1, 2, \cdots$ beliebig aber fest.*

(a) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
  (i) $f\in W_X^{2r}$;
  (ii) $f\in {}^oW_X^{2r-2}$ *und die r-te Taylordifferenz* (5.10) *konvergiert für* $h\to 0+$ *in der schwachen* Topologie*;
  (iii) $f\in {}^oW_X^{2r-2}$ *und die r-te Taylordifferenz* (5.10) *ist in der $X_{2\pi}$-Norm gleichmässig bezüglich h beschränkt.*

(b) *Weiter gilt die Äquivalenz:*
  (i) $f\in {}^oW_X^{2r}$;
  (ii) *die r-te Taylordifferenz* (5.10) *konvergiert für $h\to 0+$ in der $X_{2\pi}$-Norm gegen* $(-1)^r[(2r+1)!]^{-1} f^{\{2r\}}(x)$.

In den reflexiven Räumen $L_{2\pi}^p$, $1<p<\infty$, sind alle fünf Aussagen untereinander gleichwertig.

Entsprechend lässt sich der m-fach iterierte Integralmittelwert

$$R_h^m(f;x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^m \hat{f}(k)e^{ikx} \qquad (f\in X_{2\pi};\ r=1, 2, \cdots;\ h\to 0+)$$

behandeln. Saturationsordnung und Favardklasse bleiben hier unabhängig von m erhalten. Weiterhin gelten analoge Aussagen wie in Satz 8 für das periodische verallgemeinerte Weierstrassintegral (3.10) — dies ist im wesentlichen in den Sätzen von P. L. Butzer-G. Sunouchi [17] enthalten — und für das singuläre Integral von Rogosinski-Bernstein.

Eine neue Erscheinung tritt bei den Rieszmitteln $R_{n,\kappa,\lambda}(f;\cdot)$ (3.17) im Falle ganzzahliger λ-Werte auf: Die Entwicklung bricht hier bei $r=\lambda+1$ ab, d.h. für $f\in {}^oW_X^{\lambda\kappa}$ tritt bei der Approximation der Funktionen $f^{\{\lambda\kappa\}}\in X_{2\pi}$ durch die λ-te Differenz

$$(5.11) \qquad (-1)^\lambda(n+1)^{\lambda\kappa}\left\{R_{n,\kappa,\lambda}(f;\cdot) - \sum_{j=0}^{\lambda-1} \frac{(-1)^j}{(n+1)^{\kappa j}}\binom{\lambda}{j} f^{\{\kappa j\}}(\cdot)\right\}$$

keine Saturation mehr auf. Wir gehen auf den Fall $\lambda = 1$, d.h. auf die typischen Mittel (3. 16) näher ein und betrachten für $f \in {}^oW_X^\kappa$ die Approximation von $f^{\{\kappa\}}$ durch die erste Taylordifferenz:

$$(5.12)\quad (n+1)^\kappa\{T_{n,\kappa}(f;x)-f(x)\} + f^{\{\kappa\}}(x) \sim \sum_{n+1\leqq|k|}\left(1-\left\{\frac{n+1}{k}\right\}^\kappa\right)[f^{\{\kappa\}}]^\wedge(k)\, e^{ikx}.$$

SATZ 9. *Ist $f \in {}^oW_X^\kappa$ und $E_n[f^{\{\kappa\}}]$ die beste trigonometrische Approximation von $f^{\{\kappa\}}$ in der $X_{2\pi}$-Norm, dann gilt*

$$\|(n+1)^\kappa\{T_{n,\kappa}(f;x) - f(x)\} + f^{\{\kappa\}}(x)\|_{X_{2\pi}} = O(E_n[f^{\{\kappa\}}]).$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Eigenschaft, dass für trigonometrische Polynome der Ordnung $\leqq n$ die Gleichung (5. 12) identisch verschwindet.

Ist dagegen λ nicht ganzzahlig, so lässt sich die Taylorentwicklung im Sinne von Satz 8 für beliebig grosses r durchführen.

Ein weiteres Beispiel für dieses Phänomen ist das singuläre Integral von *Jackson-de La Vallée-Poussin* (siehe auch P. L. Butzer [12, S. 8])

$$J_n^*(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{2u}{n}\right)\left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 du \quad (f \in X_{2\pi};\ n\to\infty).$$

dessen zweite Taylordifferenz bei der Approximation von $(3/4)f^{(4)}$ (falls $f \in {}^oW_X^4$) keine Saturation mehr aufweist.

BEMERKUNG 8. Die erhaltenen Grenzwertrelationen führen mit Hilfe eines Satzes von G. Sunouchi [35] und C. Watari [36] (vgl. auch P. L. Butzer-E. Görlich [14, §9]) zu Ergebnissen über die nichtsaturierte Approximation in der $X_{2\pi}$-Norm.

Weiterhin sei noch erwähnt, dass H. Berens [2] diese Probleme bei Halbgruppen von Operatoren ausser für Taylordifferenzen auch für Peano- und Riemanndifferenzen untersucht hat.

Schliesslich ist zur Situation in den Räumen $L^p(R)$, $1 \leqq p \leqq 2$, zu sagen, dass sich die Ergebnisse sämtlich übertragen lassen, wenn man Satz 4 durch bekannte Saturationssätze von P. L. Butzer - R. J. Nessel [16, Theorem 3.4] ersetzt. Die so gewonnenen Aussagen ordnen sich in die Reihe der von P. L. Butzer [9], [11], [12] und P. L. Butzer-H. G. Tillmann [18] bewiesenen asymptotischen Entwicklungen ein.

LITERATUR

[1] N. I. ACHIESER, Theory of approximation. New York 1956.

[2] H. BERENS, Equivalent representations for the infinitesimal generator of higher orders in semi-group theory. Nederl. Akad. Wetensch., Proceedings, Series A, 68(1965) (=Indag. Math., 27(1965)), 497-512.

[3] H. BERGSTRÖM, On some expansions of stable distributions. Arkiv för Matematik, 2 (1954), 375-378.

[4] A. BEURLING, Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionelle. Neuvième Congrès Math. Scand., Helsingfors, 1938, 345-366.

[5] S. BOCHNER, Vorlesungen über Fouriersche Integrale. New York 1948.

[6] S. BOCHNER, Stable laws of probability and completely monotone functions. Duke Math. Journ. 3 (1937), 726-728.

[7] S. BOCHNER, Quasi-analytic functions, Laplace operator, positive kernels. Annals of Math. 51(1950), 68-91.

[8] P. L. BUTZER, Zur Frage der Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren. Math. Zeitschr. 70(1958), 93-112.

[9] P. L. BUTZER, Representation and approximation of functions by general singular integrals. Nederl. Akad. Wetensch., Proceedings, Series A, 63 (1960), (=Indag. Math., **22**), 1-24.

[10] P. L. BUTZER, Fourier transform methods in the theory of approximation. Archive Rat. Mech. Anal., 5(1960), 390-415.

[11] P. L. BUTZER, The dependence of the solution of the equation of heat conduction upon its initial temperature distribution; asymptotic expansions. Archiv d. Math., 13(1962), 302-312.

[12] P. L. BUTZER, Saturation and approximation. J. SIAM Numer. Anal., Ser. B., 1(1964), 2-10.

[13] P. L. BUTZER UND E. GÖRLICH, Zur Charakterisierung von Saturationsklassen in der Theorie der Fourierreihen. Tôhoku Math. Journ. 17(1965), 29-54.

[14] P. L. BUTZER, UND E. GÖRLICH, Saturationsklassen und asymptotische Eigenschaften trigonometrischer singulärer Integrale. (Weierstrass-Festband., Wiss. Abh. Bd. 33 der Arbeitsgem. für Forschg. des Landes NRW, Teil III, 55 S.). Westdeutscher Verlag Opladen 1966.

[15] P. L. BUTZER AND R. J. NESSEL, Favard classes for n-dimensional singular integrals. Bull. Amer. Math. Soc. 72(1966), 493-498.

[16] P. L. BUTZER AND R. J. NESSEL, Contributions to the theory of saturation for singular integrals in several variables, I. Nederl. Akad. Wetensch., Proceedings, Series A, 69 (1966) (=Indag. Math. 28), im Druck.

[17] P. L. BUTZER AND G. SUNOUCHI, Approximation theorems of the solution of Fourier's problem and Dirichlet's problem. Math. Annalen 155, (1964), 316-330.

[18] P. L. BUTZER AND H. G. TILLMANN, Approximation theorems for semi-groups of bounded linear transformations. Math. Ann. 140(1960), 256-262.

[19] J. L. B. COOPER, Some problems in the theory of Fourier transforms. Arch. Rat. Mech. and Anal. 14(1963), 213-216.

[20] H. CRAMER, On the representation of functions by certain Fourier integrals. Trans. Amer. Math. Soc. 46 (1939), 190-201.

[21] W. FELLER, On a generalization of Marcel Riesz' potentials and the semi-groups generated by them. Comm. du Sémin. Math. de l'Univ. de Lund. Tome suppl. dédié à M. Riesz, (1952), 73-81.

[22] G. H. HARDY, Divergent series. Oxford 1949.

[23] E. HILLE AND R. S. PHILLIPS, Functional analysis and semi-groups. (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 31), New York 1957.

[24] H. KÖNIG, Einige Eigenschaften der Fourier-Stieltjes Transformation. Archiv der Math., 11(1960), 352-365.

[25] K. DE LEEUW, On the adjoint semi-group and some problems in the theory of approxim-

ation. Math. Zeitschr. 73(1960), 219–234.
[26] K. DE LEEUW, On L_p multipliers. Annals of Math. 81(1965), 364–379.
[27] P. LEVY, Calcul des probabilités. Paris 1925.
[28] Y. V. LINNIK, Decomposition of probability distributions. Edinburgh-London 1964.
[29] E. LUKACS, Characteristic functions. London 1960.
[30] R. J. NESSEL, Contributions to the theory of saturation for singular integrals in several variables, II, III, Nederl. Akad. Wetensch., Proceedings, Series A, 69(1966) (=Indag. Math. 28), im Druck.
[31] G. PÓLYA, Remarks on characteristic functions. Proceedings of the first Berkeley Symposium 1949, 115–123.
[32] G. SUNOUCHI, On the Riesz summability of Fourier series. Tôhoku Math. Journ. 11(1959), 321–326.
[33] G. SUNOUCHI, On the class of saturation in the theory of approximation I, II, III, Tôhoku Math. Journ. 12(1960), 339–344; 13(1961), 112–118, 320–328.
[34] G. SUNOUCHI, Characterization of certain classes of functions. Tôhoku Math. Journ. 14(1962), 127–134.
[35] G. SUNOUCHI, On the saturation and best approximation. Tôhoku Math. Journ. 14 (1962), 212–216.
[36] C. WATARI, A note on saturation and best approximation. Tôhoku Math. Journ. 15 (1963), 273–276.
[37] E. M. WRIGHT, The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. Journal London Math. Soc. 10(1935), 286–293.
[38] K. YOSIDA, On semi-group theory and its application to Cauchy's problem in partial differential equations. Tata Institute. Bombay 1957.
[39] A. ZYGMUND, Trigonometrical series. Reprint of the 1935 edition, New York 1955.
[40] A. ZYGMUND, Trigonometric series. I. Cambridge 1959.

TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Nachtrag. Herr Prof. G. Sunouchi hat die Autoren auf das folgende Kriterium von B.Sz. Nagy*) aufmerksam gemacht, dessen Voraussetzungen schwächer sind als das zweite Kriterium von Beurling:

Sei $h(v)$ eine stetige gerade Funktion auf der Zahlengeraden mit $h(0)=1$ und $\lim_{v\to\infty} h(v)=0$. Genügt die Funktion weiter den Bedingungen

a) $h'(v) \in L^1(R)$,
b) $h'(v)$ ist von beschränkter Variation auf jedem Teilintervall von $(0, \infty)$, das keinen der endlich vielen Punkte $0, v_1, v_2, \cdots, v_r < \infty$ enthält, und es gilt

*) Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier. Hungarica Acta Math. 1, Nr. 3(1948) 14–52.

$$\int_{0+} t\,|dh'(t)|<\infty,$$

$$\left(\int^{v_i-}+\int_{v_i+}\right)|t-v_i|\log\frac{1}{|t-v_i|}\,|dh'(t)|<\infty \qquad (i=1,2,\cdots,r),$$

$$\int^{\infty} t\,|dh(t)|<\infty.$$

Dann ist $h(v)$ darstellbar als Fouriertransformierte einer geraden Funktion H in $L^1(R)$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} H(x)dx=2\pi$ und

$$H(x)=2\int_0^{\infty} h(v)\cos vx\, dv.$$

Mit Hilfe dieses Kriteriums und des Korollars 1 lässt sich auch der Fall $0<\lambda<1$ bei den Rieszmitteln (3.17) behandeln, wie Prof. G. Sunouchi gezeigt hat. Die Verfasser sind für diesen Hinweis sehr dankbar.

Weiter möchten wir in diesem Zusammenhang auf eine verwandte Arbeit von S. A. Teljakovskii, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 28 (1963), 283-322, aufmerksam machen.