Tôhoku Math. Journ.
20(1968), 431-442.

TAUBER-KONSTANTEN BEI DEN HAUSDORFF-VERFAHREN

WOLFGANG BIEGERT

(Received February 9, 1968)

Ist $\beta(t)$ eine nichtfallende Funkion im Bereich $0 \leqq t \leqq 1$ mit $\beta(0)=0$, $\beta(1)=1$ und $\beta(+0)=0$, sind weiter μ_n die zugehörigen Momentkonstanten, so definiert man die reguläre Hausdorff-Transformation [6] als

$$H(n) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \Delta^{n-\nu}\mu_\nu s_\nu \,, \tag{1.1}$$

wobei s_m die Teilsummen einer gegebenen Reihe $\sum a_\nu$ (mit reellen oder komplexen Gliedern) sind.

Gilt für die Glieder a_n der Reihe $\sum a_\nu$ die Tauber-Bedingung vom Littlewoodschen Typ [8]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |na_n| < \infty \,, \tag{1.2}$$

so bezeichnet man nach Hadwiger [4] die kleinste Konstante A, für die (bei einer bestimmten Koppelung von m und n)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |H(n) - s_m| \leqq A \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} |na_n| \tag{1.3}$$

gilt, als Konstante Tauberscher Art oder kurz als Tauber-Konstante. Mit Agnew [2] bezeichnet man als Tauber-Konstante A' die kleinste Konstante, für die

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |H(n) - s_m| \leqq A' \cdot L \tag{1.4}$$

gilt, wenn die Teilsummen s_m der Tauber-Bedingung vom Schmidtschen Typ

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \operatorname*{Maximum}_{|w-u|\leqq\lambda u} |s_w - s_u| \leqq \lambda \cdot L \tag{1.5}$$

mit festem L aus $0 \leqq L < \infty$ und beliebigem $\lambda > 0$ genügen. Genügen die Glieder einer Reihe $\sum a_\nu$ der Bedingung (1.2), so genügen ihre Teilsummen auch der Bedingung (1.5). (1.5) ist also umfassender, für dieselbe Koppelung von m und n muss also

$$A \leqq A' \tag{1.6}$$

gelten.

Bei den Hausdorff-Verfahren hat Jakimovski [7] für die Bedingung (1.2) und die Koppelung

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{m}{n} = Q > 0 \tag{1.7}$$

Tauber-Konstanten $A = A(Q)$ erhalten. In der vorliegenden Abhandlung soll gezeigt werden, dass — mit einer Einschränkung für $\beta(t)$ — zur Tauber-Bedingung (1.5) dieselben Tauber-Konstanten A' gehören, dass also in (1.6) das Gleichheitszeichen gilt.

Man beweist den folgenden

SATZ. *Es sei $\beta(t)$ eine nichtfallende Funktion im Bereich $0 \leqq t \leqq 1$ mit $\beta(0) = 0$ und $\beta(1) = 1$. Für festes $1 > \alpha > 0$ und $P \geqq 0$ soll*

$$\frac{\beta(t)}{t^\alpha} \to P \qquad \textit{streben für } t \to 0\,. \tag{2.1}$$

Die zu $\beta(t)$ gehörigen (regulären) Momentkonstanten seien

$$\mu_n = \int_0^1 t^n \, d\beta(t)\,. \tag{2.2}$$

Eine gegebene Reihe $\sum a_\nu$ (mit reellen oder komplexen Gliedern) besitze die Teilsummen s_m, die der Tauber-Bedingung vom Schmidtschen Typ

$$\varlimsup_{u\to\infty} \operatorname*{Maximum}_{|w-u|\leqq\lambda u} |s_w - s_u| \leqq \lambda \cdot L \tag{2.3}$$

mit festem L aus $0 \leqq L < \infty$ und beliebigem $\lambda > 0$ genügen.

$$H(n) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \Delta^{n-\nu} \mu_\nu s_\nu \tag{2.4}$$

ist dann eine reguläre Hausdorff-Transformierte dieser Reihe. Strebt mit $n \to \infty$ auch $m \to \infty$, so dass

(2.5) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{m}{n} = Q > 0$$

ist, so gilt

(2.6) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} |H(n) - s_m| \leqq A' \cdot L$$

mit

(2.7) $$A' = \begin{cases} \displaystyle\int_0^Q \frac{\beta(t)}{t}\,dt + \int_Q^1 \frac{1-\beta(t)}{t}\,dt & (0 < Q \leqq 1), \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\beta(t)}{t}\,dt + \log Q & (1 \leqq Q < \infty). \end{cases}$$

Darüber hinaus ist A' die beste Konstante im dem Sinn, dass es mindestens eine Reihe $\sum a_\nu$ (mit reellen Gliedern) gibt, dass in (2.5) *das Gleichheitszeichen gilt.*

Die Bedingung (2.1) ist schärfer als die notwendige Bedingung $\beta(+0)=0$ für die reguläre Momentkonstante, sie garantiert aber auch die Existenz des Integrals $\int \frac{\beta(t)}{t}\,dt$ an der unteren Grenze 0. Die Existenz dieses Integrals an seiner unteren Grenze 0 ist auch bei Jakimovski [7] zusätzlich gefordert. Die Bedingung (2.1) ist z.B. für die Cesàro-, für die Hölder- und für die Euler-Knopp-Verfahren erfüllt. Im letzten Fall ist die Konstante zur Bedingung (2.3) schon als Spezialfall in einem früheren Ergebnis des Verfassers [3] enthalten.

Schmidt [9] nennt eine Folge $\{s_m\}$, die der Bedingung (2.3) genügt, 'langsam oszillierend'. Für 'langsam oszillierende' Folgen gelten die Abschätzungen :

I. Es gibt eine Konstante K so, dass

(3.1) $$|s_\nu - s_m| \leqq K \cdot \log \frac{m}{\nu}$$

ist für alle $\nu=1, 2, 3, \cdots$ und alle $m \geqq (1/Q)\nu$ mit $0 < Q < 1$ ([9], Satz 13).

II. Es gibt eine Konstante K so, dass

(3.2) $$|s_m| \leqq K \cdot \log(m+1)$$

ist für $m = 1, 2, \cdots$. ([9], Satz 14).

III. Ist $Q > 1$ und $\sigma > 0$ nahe an 0, so gilt für genügend grosses ν

$$|s_\nu - s_m| \leqq L \cdot \log Q\,, \tag{3.3}$$

falls ν aus $m\frac{1}{Q}(1-\sigma) \leqq \nu < m\frac{1}{Q}(1+\sigma)$ ist. Dabei ist L die Konstante aus der Bedingung (2.3). ([3], Hilfssatz 2).

IV. Für genügend grosses φ und $\eta > \varphi$ gilt

$$|s_\eta - s_\varphi| \leqq L \cdot \log \frac{\eta}{\varphi}\,. \tag{3.4}$$

Zum Nachweis der Abschätzung (3.4) wählt man zu einem $\varepsilon > 0$ ein φ_0 so, dass für alle $\varphi > \varphi_0$

$$\underset{|w-u| \leqq \lambda u}{\text{Maximum}} |s_w - s_u| \leqq \lambda \cdot (L + \varepsilon)$$

gilt, wenn $u \geqq \varphi$ ist. Zu einem festen $\varphi > \varphi_0$ und zugehörigem η wählt man ein k so, dass $\varphi(k) = (1+\lambda)^k \varphi \leqq \eta < (1+\lambda)^{k+1}\varphi = \varphi(k+1)$ ist. Dann gilt

$$k \cdot \log(1+\lambda) \leqq \log \frac{\eta}{\varphi}\,.$$

Man zerlegt nun

$$|s_\eta - s_\varphi| \leqq |s_\eta - s_{\varphi(k)}| + |s_{\varphi(k)} - s_{\varphi(k-1)}| + \cdots + |s_{\varphi(1)} - s_\varphi|\,.$$

(Falls dabei eine nichtganze Zahl als Index auftritt, soll stets die grösste in ihr enthaltene ganze Zahl verstanden werden). Jeder Summand ist von der Form $|s_{\varphi(\mu+1)} - s_{\varphi(\mu)}|$. Also gilt jedesmal

$$\varphi(\mu+1) - \varphi(\mu) = \lambda(1+\lambda)^\mu \varphi$$

oder

$$w - u = \lambda \cdot u\,.$$

Man kann damit abschätzen

$$|s_\eta - s_\varphi| \leqq (k+1)\,\lambda(L+\varepsilon)$$

und damit auch

$$\frac{|s_\eta - s_\varphi|}{\log(\eta/\varphi)} \leqq \frac{(k+1)\cdot\lambda}{k \cdot \log(1+\lambda)}\,(L+\varepsilon).$$

Für festes φ und η folgt: Wenn $\lambda \to 0$ strebt, muss $k \to \infty$ streben. Für $\lambda \to 0$ gilt also

$$\frac{|s_\eta - s_\varphi|}{\log(\eta/\varphi)} \leqq 1 \cdot (L+\varepsilon)$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Also gilt für jedes $\varphi > \varphi_0$ und $\eta > \varphi$ die Abschätzung (3.4).

Es gilt weiter: Ist θ beliebig aus $0 < \theta < 1$, ist $p = [\theta n]$ und $0 \leqq t \leqq 1$, so strebt

$$n\binom{n-1}{p-1} t^{p-1}(1-t)^{n-p} \log \frac{Qn}{p-1} \to 0 \tag{3.5}$$

für $n \to \infty$ mit Ausnahme des einen Werts $t = \theta$.

Mit der Stirlingschen Formel erhält man

$$n\binom{n-1}{p-1} t^{p-1}(1-t)^{n-p} \log \frac{Qn}{p-1} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \log \frac{Q}{\theta} \sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}} \frac{\sqrt{n}}{t} \left(\frac{1-t}{1-\theta}\right)^n \left(\frac{t(n-p)}{p(1-t)}\right)^p$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \log \frac{Q}{\theta} \sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}} \frac{1}{t} \cdot \sqrt{n} \left[\frac{1-t}{1-\theta} \left(\frac{(1-\theta)t}{\theta(1-t)}\right)^\theta\right]^n.$$

Die Funktion

$$y = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x}{x}\right)^\theta$$

hat im Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ ihr einziges Minimum bei $x = \theta$. Also ist für $t \neq \theta$

$$\frac{1}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^\theta < \frac{1}{1-t}\left(\frac{1-t}{t}\right)^\theta$$

und also ist die eckige Klammer < 1 für $t \neq \theta$.

Völling analog zeigt man: Es strebt

$$n\binom{n-1}{p-1} t^{p-1}(1-t)^{n-p} \log \frac{Qn}{p} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \tag{3.6}$$

und

$$n\binom{n-1}{p-1} t^{p-1}(1-t)^{n-p} \to 0 \qquad \text{für} \quad n \to \infty \tag{3.7}$$

wenn $t \neq \theta$ ist, und es strebt

$$n(1-t)^{n-1} \log Qn \to 0 \qquad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{3.8}$$

Sofort erkennt man; Ist $0<a<b<n$, so gilt

$$\text{(3.9)} \quad \frac{d}{dx}\sum_{\nu=a}^{b-1}\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}\log\frac{m}{\nu} = \sum_{\nu=a+1}^{b-1}\binom{n}{\nu}x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu}\log\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{\nu}$$

$$+ n\binom{n-1}{a-1}x^{a-1}(1-x)^{n-a}\log\frac{m}{a} - n\binom{n-1}{b-1}x^{b-1}(1-x)^{n-b}\log\frac{m}{b-1}.$$

Hardy ([5], Satz 138) gibt Abschätzungen für die Glieder der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu},$$

die von Jakimovski ([7], (26), (27)) auf die hier verwendete Form angewandt wurden. Diese Abschätzungen werden im folgenden mit [Hardy] zitiert.

Man kann nun den Satz beweisen. Es ist zu untersuchen

$$H(n) - s_m = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\Delta^{n-\nu}\mu_\nu s_\nu - \left\{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\Delta^{n-\nu}\mu_\nu\right\}s_m,$$

da die Summe in der geschweiften Klammer gleich $\mu_0 = 1$ ist. Also gilt

$$\text{(4)} \qquad |H(n) - s_m| \leqq \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\Delta^{n-\nu}\mu_\nu|s_\nu - s_m|.$$

Es sei zunächst $0<Q<1$. Dann gilt für grosse n auch $m<n$. Man bezeichnet $q=[c\cdot n]$, $m_1=[m(1-\lambda)]$, $m_2=[m(1+\lambda)]$, wobei λ die Grösse aus der Bedingung (2.3) und c eine feste Zahl aus $0<c<1$ ist. Man zerlegt nun die Summe in (4) in fünf Teile. Es umfasst S_1 das Glied mit $\nu=0$, S_2 die Glieder mit $1\leqq\nu<q$, S_3 die Glieder mit $q\leqq\nu<m_1$, S_4 die Glider mit $m_1\leqq\nu\leqq m_2$ und S_5 die restlichen Glieder mit $m_2<\nu\leqq n$.

Man schätzt zunächst S_1 ab. Es ist $S_1\leqq\Delta^n\mu_0|s_0|+\Delta^n\mu_0|s_m|$. Ist die Hausdorff-Transformation regulär, so strebt $\Delta^n\mu_0\to 0$ für $n\to\infty$. Mit (3.2) gilt dann

$$S_1 \leqq \underset{n\to\infty}{o(1)} + K\log(m+1)\,\Delta^n\mu_0$$

Nach Voraussetzung (2.1) gibt es ein t_0, dass für alle $0<t<t_0<1$

$$\beta(t) \leqq P(1+\varepsilon)t^{\kappa}$$

ist. Für reguläre Momentkonstanten gilt doch

$$\Delta^{n-\nu}\mu_\nu = \int_0^1 x^\nu(1-x)^{n-\nu}\, d\beta(x)\,.$$

Es sei $\rho < t_0$. Für $n > \rho^{-1}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
S_1 &\leqq o(1) + K\log(m+1)\left\{\int_0^\rho (1-t)^n\, d\beta(t) + \int_\rho^1 (1-t)^n\, d\beta(t)\right\} \\
&\leqq o(1) + K\log(m+1)\int_0^\rho n(1-t)^{n-1}\,\beta(t)\, dt + K\log(m+1)\cdot(1-\rho)^n \\
&\leqq o(1) + KP(1+\varepsilon)\log(m+1)\int_0^{1/n} n(1-t)^{n-1}\, t^\kappa\, dt \\
&\qquad\qquad + KP(1+\varepsilon)\log(m+1)\int_{1/n}^\rho \binom{n}{1} t(1-t)^{n-1}\, t^{\kappa-1}\, dt \\
&\leqq o(1) + KP(1+\varepsilon)\log(m+1)\cdot n\int_0^{1/n} t^\kappa\, dt \\
&\qquad\qquad + KP(1+\varepsilon)\log(m+1)\, C\cdot e^{-\gamma n}\int_{1/n}^\rho t^{\kappa-1}\, dt\,,
\end{aligned}$$

denn es gilt

$$\sum_{\nu=0}^{1}\binom{n}{\nu} t^\nu(1-t)^{n-\nu} \leqq C\cdot e^{-\gamma n}$$

mit $C=$const. und $\gamma > 0$, falls $t > 1/n$ ist ([Hardy]). Damit wird

$$S_1 \leqq o(1) + KP(1+\varepsilon)\log(m+1)\cdot n^{-\kappa} + KP(1+\varepsilon)\log(m+1)\cdot C\cdot e^{-\gamma n}\frac{\rho^\kappa}{\kappa}$$

und also

$$\text{(5.1)} \qquad S_1 = o(1) \quad \text{für} \quad n\to\infty\,.$$

Es gilt weiter

$$S_2 \leqq K\int_0^1 \sum_{\nu=1}^{q-1}\binom{n}{\nu} t^\nu(1-t)^{n-\nu}\log\frac{m}{\nu}\, d\beta(t)$$

nach (3.1). Nach (3.9) erhält man zusammen mit (3.5) und (3.6)

$$\frac{d}{dx}\sum_{\nu=1}^{q-1}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\log\frac{m}{\nu} \underset{n\to\infty}{=} o(1) + \sum_{\nu=2}^{q-1}\binom{n}{\nu}x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu}\log\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^\nu$$

falls $x \neq c$. Integriert man (für das Integral im Lebesgueschen Sinne ist ein einzelner Funktionswert nicht entscheidend), so ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{q-1}\binom{n}{\nu} t^\nu(1-t)^{n-\nu}\log\frac{m}{\nu} = o(1) - \int_t^1 \sum_{\nu=2}^{q-1}\binom{n}{\nu} x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu}\log\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^\nu dx.$$

Für alle $\nu > 1$ ist

$$1 \leqq -\log\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^\nu \leqq \log 4\,,$$

also kann man weiter abschätzen

$$S_2 \leqq o(1) + K' \int_{t=0}^1 \int_{x=t}^1 \sum_{\nu=2}^{q-1}\binom{n}{\nu} x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu}\, dx\, d\beta(t)\,,$$

oder, wenn man die Reihenfolge der Integrationen vertauscht,

$$S_2 \leqq o(1) + K' \int_{x=0}^1 \frac{\beta(x)}{x}\left\{\sum_{\nu=2}^{q-1}\binom{n}{\nu} x^\nu(1-x)^{n-\nu}\right\} dx.$$

Nach der Abschätzung [Hardy] strebt der Wert der Klammer $\to 0$ mit $n \to \infty$, wenn $c < x$ ist. Für $0 \leqq x \leqq c$ strebt er $\to 1$. Also strebt

$$S_2 \to \bar{S}_2 \leqq K' \int_{x=0}^c \frac{\beta(x)}{x}\, dx \tag{5.2}$$

und für genügend kleines c ist $\bar{S}_2 < \varepsilon$ zu machen.

Die Abschätzung für S_3 verläuft auf weite Strecken analog. Es gilt

$$S_3 \leqq L \int_{t=0}^1 \sum_{\nu=q}^{m_1-1}\binom{n}{\nu} t^\nu(1-t)^{n-\nu}\log\frac{m}{\nu}\, d\beta(t)$$

nach (3.4). Mit (3.9), (3.5) und (3.6) erhält man

$$\frac{d}{dx}\sum_{\nu=q}^{m_1-1}\binom{n}{\nu} x^\nu(1-x)^{n-\nu}\log\frac{m}{\nu} = o(1) - \sum_{\nu=q+1}^{m_1-1}\binom{n}{\nu} x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu}$$

falls $x \neq Q(1-\lambda)$ und $c \neq x$ ist, und damit gilt auch

$$\sum_{\nu=q}^{m_1-1}\binom{n}{\nu} t^\nu(1-t)^{n-\nu}\log\frac{m}{\nu} = o(1) + \int_{x=t}^1 \sum_{\nu=q+1}^{m_1-1}\binom{n}{\nu} x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu}\, dx\,.$$

Dann ergibt sich nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$S_3 \leqq o(1) + L \int_{x=0}^{1} \int_{t=0}^{x} \sum_{\nu=q+1}^{m_1-1} \binom{n}{\nu} x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu}\, dx\, d\beta(t)$$

$$S_3 \leqq o(1) + L \int_{x=0}^{1} \frac{\beta(x)}{x} \left\{ \sum_{\nu=q+1}^{m_1-1} \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} \right\} dx .$$

Der Wert der Klammer strebt $\to 0$ für $Q < x$ und $\to 1$ für $0 < x \leqq Q$, wenn $n \to \infty$ strebt ([Hardy]). Damit strebt auch

$$S_3 \to \bar{S}_3 \leqq L \int_{x=0}^{Q} \frac{\beta(x)}{x}\, dx . \tag{5.3}$$

Bei S_4 liegen alle ν im Bereich $m(1-\lambda) \leqq \nu \leqq m(1+\lambda)$ oder $|m-\nu| \leqq \lambda m$. Nach der Tauber-Bedingung (2.3) ist also

$$S_4 \leqq \lambda(L+\varepsilon) \sum_{\nu=m_1}^{m_2} \binom{n}{\nu} \Delta^{n-\nu} \mu_\nu \leqq \lambda(L+\varepsilon) , \tag{5.4}$$

und für genügend kleines λ ist S_4 beliebig klein zu machen.

Schliesslich ist noch S_5 abzuschätzen. Mit (3.4) erhält man

$$S_5 \leqq L \int_0^1 \sum_{\nu=m_2+1}^{n} \binom{n}{\nu} t^{\nu}(1-t)^{n-\nu} \log \frac{\nu}{m}\, dt .$$

Hier ist

$$\frac{d}{dx} \sum_{\nu=m_2+1}^{n} \binom{n}{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} \log \frac{\nu}{m}$$

$$= \sum_{\nu=m_2+1}^{n} \binom{n}{\nu} x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu} \log \left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^{\nu} + n\binom{n-1}{m_2} x^{m_2}(1-x)^{n-m_2-1} \log \frac{m_2+1}{m}$$

$$= o(1) + \sum_{\nu=m_2+1}^{n} \binom{n}{\nu} x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu} + n\binom{n-1}{m_2} x^{m_2}(1-x)^{n-m_2-1} \log(1+\lambda) .$$

Analog zur Abschätzung (3.5) strebt

$$n\binom{n-1}{m_2} x^{m_2}(1-x)^{n-m_2-1} \log(1+\lambda) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty ,$$

falls $x \neq Q(1+\lambda)$ ist. Damit erhält man

$$\sum_{\nu=m_2+1}^{n} \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu} \log \frac{\nu}{m} = o(1) + \int_{x=0}^{t} \sum_{\nu=m_2+1}^{n} \binom{n}{\nu} x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu}\, dx$$

und, wieder nach Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen,

$$S_5 \leqq o(1) + L \int_{x=0}^{1} \int_{t=x}^{1} \sum_{\nu=m_2+1}^{n} \binom{n}{\nu} x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu}\, dx\, d\beta(t),$$

$$S_5 \leqq o(1) + L \int_{x=0}^{1} \frac{\beta(1)-\beta(x)}{x} \left\{ \sum_{\nu=m_2+1}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} \right\} dx.$$

Ist $x \leqq Q$, so strebt der Wert der Klammer $\to 0$ für $n \to \infty$, ist $Q < x < 1$ so strebt dieser Wert $\to 1$. Also gilt

$$S_5 \to \bar{S}_5 \leqq L \int_{x=Q}^{1} \frac{1-\beta(x)}{x}\, dx. \tag{5.5}$$

Fasst man zusammen, erhält man für $0 < Q < 1$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |H(n) - s_m| \leqq L \left\{ \int_0^Q \frac{\beta(x)}{x}\, dx + \int_Q^1 \frac{1-\beta(x)}{x} \right\} dx. \tag{5.6}$$

Ist aber $1 < Q$, so gilt für genüged grosse n auch $n < m$. Man bezeichnet wieder $q = [cn]$ mit $0 < c < 1$ und $n_1 = [n(1-\sigma)]$ mit $\sigma > 0$ nahe an 0. (Genauer ist die Einschränkung für σ angegeben in [3], Hilfssatz 2). Man zerlegt die Summe in (4) in vier Teile. Es umfasst S_1 das Glied mit $\nu = 0$, S_2 die Glieder mit $1 \leqq \nu < q$, S_3 die Glieder mit $q \leqq \nu < n_1$ und S_4 die restlichen Glieder mit $n_1 \leqq \nu \leqq n$. Die Abschätzungen für S_1 und S_2 sind völlig analog zu (5.1) und (5.2). Die Abschätzung für S_3 entspricht der von (5.3), wenn man n_1 statt m_1 setzt. Für $(1-\sigma) < x$ strebt hier der Wert der Klammer $\to 0$, für $0 < x < 1-\sigma$ aber gegen 1. Also ist

$$S_3 \leqq o(1) + L \int_0^{1-\sigma} \frac{\beta(x)}{x}\, dx \leqq o(1) + L \int_0^1 \frac{\beta(x)}{x}\, dx. \tag{6.1}$$

Es ist noch S_4 abzuschätzen. Für alle diese ν gilt die Abschätzung (3.3)

$$S_4 \leqq L \log Q \int_0^1 \sum_{\nu=n_1}^{n} \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu}\, d\beta(t).$$

Es gilt doch

$$\frac{d}{dx}\sum_{\nu=n_1}^{n}\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu} = n\binom{n-1}{n_1-1}x^{n_1-1}(1-x)^{n-n_1}$$

und damit auch

$$\sum_{\nu=n_1}^{n}\binom{n}{\nu}t^{\nu}(1-t)^{n-\nu} = 1 - \int_{x=t}^{1}\left\{n\binom{n-1}{n_1-1}x^{n_1-1}(1-x)^{n-n_1}\right\}dx.$$

Nach der Abschätzung (3.7) strebt der Integrand $\to 0$ für alle $x \neq 1-\sigma$, wenn $n \to \infty$ geht. Also gilt

$$S_4 \to \bar{S}_4 \leqq L\cdot\log Q\int_0^1 d\beta(t) = L\cdot\log Q\,. \tag{6.2}$$

Zusammengefasst ergibt sich damit für $1 < Q$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|H(n)-s_m| \leqq L\cdot\left\{\int_0^1\frac{\beta(x)}{x}\,dx + \log Q\right\}. \tag{6.3}$$

Für den Fall $Q = 1$ ist entweder $m < n$ oder $m \geqq n$. In beiden Fällen nimmt dann die Konstante A' den Wert

$$\int_0^1\frac{\beta(x)}{x}\,dx$$

an.

Bei der Untersuchung von Jakimovski [7] garantiert der Hilfssatz von Agnew [1], dass die dort erhaltene Tauber-Konstante A zur Bedingung (1.2) tatsächlich die kleinste Konstante ist. Wegen (1.6) darf aber A' nicht kleiner als A sein. Also ist auch A' für die Tauber-Bedingung vom Schmidtschen Typ (1.5) tatsächlich die kleinste mögliche Konstante, für die (2.6) gilt.

Jakimovski [7] gibt zusätzliche Untersuchungen über $A = A(Q)$. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind selbstverständlich auch für die Tauber-Konstante A' zur Tauber-Bedingung vom Schmidtschen Typ (1.5) gültig.

LITERATUR-VERZEICHNIS

[1] R. P. AGNEW, Abel transforms and partial sums of Tauberian series, Annals of Math., 50(1949), 110–117.
[2] R. P. AGNEW, Borel transforms of Tauberian series, Math. Zeitschr., 67(1957), 51–62.
[3] W. BIEGERT, Die Tauber-Bedingungen vom Schmidtschen Typ und Tauber-Konstanten bei den Kreisverfahren, Archiv d. Math., 19(1968), 87–94.
[4] H. HADWIGER, Über ein Distanztheorem bei der A-Limitierung, Comm. Math. Helvetici, 16(1944), 209–214.

[5] G. H. HARDY, Divergent series, Oxford, 1956.
[6] F. HAUSDORFF, Summationsmethoden und Momentfolgen, Teil I Math. Zeitschr., 9 (1921), 74-109. ; Teil II Math. Zeitschr., 16(1923), 220-248.
[7] A. JAKIMOVSKI, Tauberian Constants for Hausdorff-transformations, Bull. Research Counc. of Israel, Sect. F, 9(1961), 175-184.
[8] J. E. LITTLEWOOD, The converse of Abel's theorem on power series, Proc. Lond. Math. Soc., Ser. 2, 9(1911), 434-448.
[9] R. SCHMIDT, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildung, Math. Zeitschr., 22(1925), 89-152.

STAATL. INGENIEURSCHULE FÜR BAUWESEN
STUTTGART, GERMANY