Tôhoku Math. Journ.
21(1969), 654-667.

SUR QUELQUES FONCTIONS ENTIÈRES OU MÉROMORPHES À L'ÉGARD DE LA CONJECTURE DE PALEY*)

NOBUSHIGE TODA

(Received August 4, 1969)

1. Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini $\rho > 1/2$, alors Paley [3] a conjecturé que

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{T(r,f)} \leqq \pi\rho .$$

Concernant cette conjecture, Tsuzuki et Misu [5] a trouvé le théorème suivant :

THÉORÈME A. *Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante d'ordre fini. Si elle satisfait à la condition*

$$\sum_{a\neq\infty} \delta(a,f) = 1 ,$$

alors on a

$$2 \leqq \liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{T(r,f)} \leqq \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{T(r,f)} \leqq \pi .$$

En particulier, s'il existe une valeur a finie telle que $\delta(a,f)=1$, alors on a

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{T(r,f)} = \pi .$$

Dans ce mémoire, on améliore, d'abord, ce théorème qui est une amélioration du Théorème 7.3 dans [4] et puis dans les paragraphes 2 et 3 on donne quelques choses concernant des résultats récents de Petrenko [4]. On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna librement :

*) Ce travail a été fait en partie avec l'aide de la Fondation de Sakkokaï (The Sakkokai Foundation).

$$\log^+,\ M(r,f),\ m(r,a),\ N(r,a),\ T(r,f),\ \delta(a,f)\ \text{ etc.}$$

THÉORÈME 1. *Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante d'ordre inférieur fini. Si elle satisfait à la condition*

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a,f) = 1\,,$$

alors on a

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{T(r,f)} = \pi\,.$$

N. B. Une fonction entière comme dans ce théorème est à croissance régulière et son ordre est entier et non zéro ([2], Théorème 2).

Pour démontrer ce théorème, on utilise les lemmes suivants:

LEMME 1. *Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante d'ordre fini, alors on a*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f')}{\log M(r,f)} = 1$$

(voir [6], p. 19).

LEMME 2. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante dans $|z|<\infty$ telle que*

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a,f) = 1 \quad \textit{et} \quad \delta(\infty,f) = 1\,,$$

alors on a

$$\delta(0,f') = 1 \quad \textit{et} \quad \delta(\infty,f') = 1$$

(voir [7], p. 24).

En vertu de ce lemme et du théorème A, on a

LEMME 3. *Soit $f(z)$ une fonction entière comme dans le théorème* 1, *alors on a*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f')}{T(r,f')} = \pi$$

(voir aussi [5], Formule (6)).

LEMME 4. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante dans $|z|<\infty$ et $\Delta_f=\sum_{a\neq\infty}\delta(a,f)$, alors on a les inégalités suivantes*:

$$\Delta_f \leqq \liminf_{r\to\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)} \leqq \limsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)} \leqq 2-\delta(\infty,f)$$

(voir [2], p. 327).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. On récrit $\log M(r,f)/T(r,f)$ comme suivant :

$$\frac{\log M(r,f)}{T(r,f)}=\frac{T(r,f')}{T(r,f)}\cdot\frac{\log M(r,f')}{T(r,f')}\cdot\frac{\log M(r,f)}{\log M(r,f')}. \tag{1}$$

On calcule la limite de chaque fraction du côte droit dans l'égalité (1) quand r tend vers l'infini.

1) Dans le lemme 4, si on prend $\Delta_f=1$ et $\delta(\infty,f)=1$, on a

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}=1.$$

Maintenant, on suppose que $\Delta_f=1$ et $f(z)$ est entière, par conséquent $\delta(\infty,f)=1$, de sorte que l'on a

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}=1.$$

2) $$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r,f')}{T(r,f')}=\pi \quad \text{d'après le lemme 3.}$$

3) $$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r,f)}{\log M(r,f')}=1 \quad \text{d'après le lemme 1.}$$

En conséquence, d'après 1), 2) et 3), on a

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r,f)}{T(r,f)}=\pi.$$

2. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $|z|<\infty$,

$$M(r, a, f) = \sup_{|z|=r} \left| \frac{1}{f(z)-a} \right| \quad \text{pour } a \neq \infty ,$$

$$M(r, \infty, f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

et

$$\beta(a,f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ M(r, a, f)}{T(r,f)} .$$

Petrenko [4] a introduit ces notions et donné le résultat suivant qui contient une solution définitive pour la conjecture de Paley.

THÉORÈME B. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe dans $|z|<\infty$ d'ordre inférieur λ fini et a une valeur quelconque finie ou non, alors on a*

$$\beta(a,f) \leqq \begin{cases} \pi\lambda/\sin\pi\lambda & \text{pour} \quad 0<\lambda<1/2 \\ \pi\lambda & \text{pour} \quad 1/2\leqq\lambda . \end{cases}$$

En outre, il a évalué $\beta(a,f)$ dans quelques cas. Ici, on évalue $\beta(a,f)$ dans quelques cas particuliers et améliore des résultats de Petrenko [4].

LEMME 5. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante dans $|z|<\infty$ d'ordre inférieur fini telle que*

$$\delta(0,f) = 1 \quad \textit{et} \quad \delta(\infty,f) = 1 ,$$

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ les zéros et $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ les pôles de $f(z)$ en considérant la multiplicité et differents de 0 respectivement. Alors, l'ordre de $f(z)$ est entier $p\geqq 1$, $f(z)$ est à croissance régulière et on a, pour un nombre réel ε positif quelconque suffisamment petit,

$$T(r,f) = (1+\eta(r)) \frac{|C(r)|}{\pi} r^p \qquad (r>r_0(\varepsilon))$$

et

$$|C(\sigma r) - C(r)| < \varepsilon |C(r)| \qquad (r>r_0(\varepsilon))$$

où

$$|\eta(r)| < \varepsilon \qquad (r>r_0(\varepsilon)) ,$$

$$C(r) = \alpha(f) + \frac{1}{p} \left\{ \sum_{|a_k|\leqq r} a_k^{-p} - \sum_{|b_k|\leqq r} b_k^{-p} \right\}$$

$\alpha(f)$ étant un constant dépendant de $f(z)$ et

$$1 < \sigma \leqq 36$$

(voir [1], Théorème 1).

($(r > r_0(\varepsilon))$ signifie "pour tout r plus grand que $r_0(\varepsilon)$ qui est un nombre positif dépendant de ε, et ainsi de suite.)

En effet, ce que l'ordre est entier $p \geqq 1$ et $f(z)$ est à croissance régulière est d'après le Corollaire 6.1 dans [2]. Dans notre cas

$$K(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,0)+N(r,f)}{T(r,f)} \leqq 2-\delta(0,f)-\delta(\infty,f) = 0\,,$$

par conséquent, on peut appliquer le Théorème 1 dans [1] pour un nombre réel ε positif quelconque suffisamment petit.

LEMME 6. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $|z| < \infty$ comme dans le lemme 5. Alors, il existe deux suites de nombres réels positifs $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ et $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ telles que*

1) $\alpha_j \nearrow \infty$, $r_j \nearrow \infty$, $1 < r_j/\alpha_j < e^{1/2}$ *et* $\alpha_{j+1}/\alpha_j \leqq e$,

2) *pour un nombre réel ε positif quelconque suffisamment petit, sur $|z| = r_j$*

$$|\log|f(z)| - \mathrm{Re}\, C_j z^p| < 4\varepsilon |C_j| r_j^p \quad (j > j_0(\varepsilon))$$

où $C_j = C(\alpha_j)$ et p est l'ordre de $f(z)$ (voir [1], Lemme 5 et p. 281).

THÉORÈME 2. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante dans $|z| < \infty$ d'ordre inférieur fini telle que*

$$\sum_{a\neq\infty} \delta(a,f) = 1 \quad et \quad \delta(\infty,f) = 1\,,$$

alors on a

$$\beta(\infty,f) \leqq \pi\,.$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 2,

$$\delta(0,f') = 1 \quad \text{et} \quad \delta(\infty,f') = 1\,,$$

par conséquent, on a

$$K(f') = \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,0,f) + N(r,f')}{T(r,f')} \leqq 2 - \delta(0,f') - \delta(\infty,f') = 0\,.$$

En conséquence, on peut appliquer le Théorème 2 dans [1] à notre $f'(z)$. D'après ce théorème il y a un chemin $\mathcal{L}$ continu s'étendant à l'infini et tel que, tout le long de $\mathcal{L}$

$$(2) \qquad |f'(z)| < \exp\left(-\frac{\pi}{16}T(r,f')\right) \quad (|z| = r \geqq r_0)\,.$$

D'autre part, l'inégalité

$$1 = \delta(\infty,f') = \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r,f')}{T(r,f)} \leqq \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ M(r,\infty,f')}{T(r,f')}$$

veut dire que, pour un nombre réel ε positif quelconque plus petit que un, il existe un nombre réel positif l_0 tel que, pour tout $r > l_0$,

$$(3) \qquad \exp((1-\varepsilon)T(r,f')) \leqq M(r,\infty,f')\,.$$

En vertu de (2) et (3), si l_1 est suffisamment grand, pour tout $\zeta \in \mathcal{L} \cap (r_0 \leqq |z| \leqq r)$, on a

$$(4) \qquad |f'(\zeta)| \leqq M(r,\infty,f') \qquad (r > l_1)\,.$$

Soient $\mathcal{L}_r = \mathcal{L} \cap (r_0 \leqq |z| \leqq r)$, ζ_r le premier point d'intersection de $\mathcal{L}$ et $|z| = r$ quand ζ tend vers l'infini sur $\mathcal{L}$ et $\Gamma_r^z = \mathcal{L}_r \cup$ (la partie sur $|z| = r$ de ζ_r jusqu'à z). Alors, quand $f(z)$ n'a pas de pôles sur $|z| = r$, d'après la relation

$$f(z) - f(\zeta_{r_0}) = \int_{\Gamma_r^z} f'(\zeta)d\zeta\,,$$

si $|z| = r > l_1$, on a, en vertu de (4)

$$|f(z)| \leqq M(r,\infty,f') \int_{\Gamma_r^z} |d\zeta| + |f(\zeta_{r_0})|\,.$$

D'après le Théorème 2 dans [1], on a

$$\int_{\Gamma_r^z} |d\zeta| \leqq K_1 r(1 + \log r)\,.$$

Par conséquent, on a

$$(5)\qquad M(r,\infty,f)\leqq K_1 r(1+\log r)M(r,\infty,f')+|f(\zeta_{r_0})|$$

quand r est suffisamment grand où K_1 est une constante.

Soient $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ et $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ deux suites de nombres réels obtenues en appliquant le lemme 6 à $f'(z)$ telles que $r_1>l_1$. Alors, d'après le lemme 5, on a, pour un nombre reel ε_1 positif quelconque suffisamment petit,

$$(6)\qquad T(r_j,f')=(1+\eta(r_j))\frac{|C(r_j)|}{\pi}r_j^p\quad (j>j_0(\varepsilon_1))$$

$$(7)\qquad |C_j-C(r_j)|<\varepsilon_1|C_j|\qquad (j>j_0(\varepsilon_1))$$

et

$$(8)\qquad |\eta(r_j)|<\varepsilon_1\qquad (j>j_0(\varepsilon_1)).$$

D'autre part, en vertu du lemme 6, on a, sur $|z|=r_j$,

$$|\log|f'(z)||<|C_j|r_j^p+4\varepsilon_1|C_j|r_j^p\qquad (j>j_0(\varepsilon_1)),$$

de sorte que l'on a

$$(9)\qquad \log^+M(r_j,\infty,f')<(1+4\varepsilon_1)|C_j|r_j^p\qquad (j>j_0(\varepsilon_1))$$

où p est l'ordre de $f(z)$.

Par conséquent, en utilisant (6), (7), (8) et (9), on a

$$\beta(\infty,f')=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log^+M(r,\infty,f')}{T(r,f')}\leqq\liminf_{j\to\infty}\frac{\log^+M(r_j,\infty,f)}{T(r_j,f')}$$

$$\leqq\liminf_{j\to\infty}\frac{(1+4\varepsilon_1)|C_j|r_j^p}{(1-\varepsilon_1)^2|C_j|r_j^p}=\pi\frac{(1+4\varepsilon_1)}{(1-\varepsilon_1)^2},$$

ε_1 étant positif quelconque,

$$(10)\qquad \beta(\infty,f')\leqq\pi.$$

D'après le lemme 4, dans ce cas,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f')}{T(r,f)}=1,$$

par conséquent, en vertu de (5) et (10) on a

$$\beta(\infty, f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ M(r, \infty, f)}{T(r,f)} \leqq \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ M(r, \infty, f')}{T(r,f')} \leqq \pi$$

parce que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log r}{T(r,f)} = 0 .$$

On a le résultant.

THÉORÈME 3. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante dans $|z| < \infty$ d'ordre inférieur fini telle que*

$$\delta(0,f) = 1 \quad et \quad \delta(\infty,f) = 1 ,$$

alors, on a

$$\beta(0,f) = \pi \quad \text{et} \quad \beta(\infty,f) = \pi .$$

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse, on a

$$K(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,0) + N(r,f)}{T(r,f)} \leqq 2 - \delta(0,f) - \delta(\infty,f) = 0 ,$$

en conséquence on peut appliquer les lemmes 5 et 6 à notre $f(z)$. Soient ε un nombre réel positif quelconque suffisamment petit et $\{\alpha_j\}_{j=1}^\infty$, $\{r_j\}_{j=1}^\infty$ deux suites comme dans le lemme 6. De 2) du lemme 6, on a, sur $|z| = r_j$,

$$|\log|f(z)|| < |C_j| r_j^p + 4\varepsilon |C_j| r_j^p \qquad (j > j_0(\varepsilon)) ,$$

de sorte que,

$$\log^+ M(r_j, 0, f) \leqq (1+4\varepsilon)|C_j| r_j^p \qquad (j > j_0(\varepsilon)) \tag{11}$$

et

$$\log^+ M(r_j, \infty, f) \leqq (1+4\varepsilon)|C_j| r_j^p \qquad (j > j_0(\varepsilon)) . \tag{12}$$

Comme on a obtenu (10), on obtien

$$\beta(0,f) \leqq \pi \tag{13}$$

utilisant (11), et

$$\beta(\infty, f) \leqq \pi \tag{14}$$

utilisant (12).

Puis on démontre

$$\beta(\infty, f) \geqq \pi .$$

Pour deux nombres reels ε, δ positifs quelconque suffisamment petits, d'après le Lemme 5 dans [1], on a

$$\log^+ M(r, \infty, f) > |C_j| r^p \cos \frac{\delta}{p} - 4\varepsilon |C_j| r^p \tag{15}$$

où $\alpha_j \leqq |z| = r \leqq \alpha_{j+1}$ $(j \geqq j_0(\varepsilon, \delta))$ et p est l'ordre de $f(z)$.

D'autre part, d'après le lemme 5 dans ce mémoire, on a

$$T(r, f) < (1+\varepsilon)^2 \frac{|C_j|}{\pi} r^p \tag{16}$$

où $\alpha_j \leqq r \leqq \alpha_{j+1}$ $\quad (j \geqq j_0(\varepsilon))$.

De (15) et (16), on a, pour $\alpha_j \leqq r \leqq \alpha_{j+1}$ $(j \geqq j_1$, où $j_1 = \max(j_0(\varepsilon, \delta), j_0(\varepsilon))$,

$$\frac{\log^+ M(r, \infty, f)}{T(r, f)} \geqq \frac{\pi |C_j| r^p \left(\cos \frac{\delta}{p} - 4\varepsilon\right)}{(1+\varepsilon)^2 |C_j| r^p} = \frac{\pi \left(\cos \frac{\delta}{p} - 4\varepsilon\right)}{(1+\varepsilon)^2} . \tag{17}$$

Cette inégalité ne dépend pas de j, par conséquent elle est vraie pour tout r plus grand que α_{j_1}. En prenant la limite inférieure, on a

$$\beta(\infty, f) = \liminf_{r \to \infty} \frac{\log^+ M(r, \infty, f)}{T(r, f)} \geqq \frac{\pi \left(\cos \frac{\delta}{p} - 4\varepsilon\right)}{(1+\varepsilon)^2} ,$$

ε et δ étant quelconque, cela conduit à

$$\beta(\infty, f) \geqq \pi . \tag{18}$$

De la même manière, on obtien

$$\beta(0, f) \geqq \pi . \tag{19}$$

De (13) et (19), ou (14) et (18), on a

$$\beta(0,f)=\pi \quad \text{ou} \quad \beta(\infty,f)=\pi$$

respectivement.

COROLLAIRE 1. *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe transcendante dans* $|z|<\infty$ *d'ordre inférieur fini telle que*

$$\delta(a,f)=1 \quad \textit{et} \quad \delta(b,f)=1\,,$$

alors on a

$$\beta(a,f)=\pi \quad \textit{et} \quad \beta(b,f)=\pi$$

où a *et* b *sont deux valeurs différentes finies ou non.*

DÉMONSTRATION. D'abord, on fait le cas où $a\neq 0$, ∞ et $b\neq 0$, ∞. On considère la transformation linéaire:

$$g(z)=\frac{f(z)-a}{f(z)-b}\,.$$

Alors, on a

1) $T(r,f)\sim T(r,g)$,

2) $\delta(a,f)=\delta(0,g)=1$ et $\delta(b,f)=\delta(\infty,g)=1$,

3) $\log^+M(r,a,f)-0(1)\leqq\log^+M(r,0,g)\leqq\log^+M(r,a,f)+0(1)$

et

$$\log^+M(r,b,f)-0(1)\leqq\log^+M(r,\infty,g)\leqq\log^+M(r,b,f)+0(1)\,.$$

Par conséquent, d'après 1) et 3) on a

$$\beta(a,f)=\beta(0,g) \quad \text{et} \quad \beta(b,f)=\beta(\infty,g)\,.$$

En conséquence, appliquant le théorème 3 à $g(z)$, on a

$$\beta(a,f)=\pi \quad \text{et} \quad \beta(b,f)=\pi\,.$$

On peut démontrer les autres cas de la même manière.

COROLLAIRE 2. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante dans $|z|<\infty$ d'ordre inférieur fini telle que*

$$\sum_{a\neq\infty} \delta(a,f) = 1 \quad et \quad \delta(\infty,f) = 1\,,$$

alors on a

$$\beta(0,f^{(p)}) = \pi \quad et \quad \beta(\infty,f^{(p)}) = \pi$$

où $f^{(p)}$ signifie la p-ième dérivative de f, $p=1,2,3,\cdots$.

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 2, on a pour $p=1,2,3,\cdots$,

$$\delta(0,f^{(p)}) = 1 \quad \text{et} \quad \delta(\infty,f^{(p)}) = 1\,.$$

Par conséquent, on a ce résultat tout de suite d'après le théorème 3.

3. Dans ce paragraphe, on considère quelques d'autres cas.

LEMME 7. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante dans $|z|<\infty$. Alors, on a*

$$\delta(\infty,f') \leqq \frac{\Delta(\infty,f)}{2-\Theta(\infty,f)}\,, \tag{20}$$

$$\frac{1}{2-\Theta(\infty,f)}\sum_{a\neq\infty} \delta(a,f) \leqq \delta(0,f') \tag{21}$$

et

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r,f')}{T(r,f)} \leqq 2-\Theta(\infty,f) \tag{22}$$

(voir [7], pp. 21-23).

THÉORÈME 4. *Soient $f(z)$ une fonction entière transcendante d'ordre inférieur fini telle que*

$$\sum_{a\neq\infty} \delta(a,f) = 1$$

et $F(z)$ une fonction entière telle que

$$F^{(p)}(z) = f(z)$$

où $p = 1, 2, 3, \cdots$, *alors on a*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r, F)}{T(r, F)} \leqq \pi .$$

DÉMONSTRATION. On démontre le cas où $p=1$. On peut démontrer les autres cas par la méthode inductive. On peut écrire

$$\frac{\log M(r, F)}{T(r, F)} = \frac{T(r,f)}{T(r,F)} \cdot \frac{\log M(r,f)}{T(r,f)} \cdot \frac{\log M(r, F)}{\log M(r,f)} .$$

1) $\limsup_{r\to\infty} \dfrac{T(r,f)}{T(r, F)} \leqq 1$ d'après le lemme 4.

2) $\lim_{r\to\infty} \dfrac{\log M(r,f)}{T(r,f)} = \pi$ d'après le théorème 1.

3) $\lim_{r\to\infty} \dfrac{\log M(r, F)}{\log M(r,f)} = 1$ d'après le lemme 1.

Par conséquent, on a

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r, F)}{T(r, F)} \leqq \pi .$$

EXEMPLE. Il existe une fonction $F(z)$ entière transcendante d'ordre fini telle que

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a, F) = 0$$

mais

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r, F)}{T(r, F)} \leqq \pi .$$

En effet, si on prend $f(z)$ dans le théorème 4 comme

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a,f) = 1 \quad \text{et} \quad \delta(0,f) = 0 ,$$

alors, d'après (20)

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a, F) = 0 .$$

THÉORÈME 5. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante dans $|z| < \infty$ d'ordre inférieur fini telle que*

$$\sum_a \delta(a, f') = 2 , \tag{23}$$

alors on a

$$\beta(\infty, f) \leqq \pi .$$

DÉMONSTRATION. Par la calcule simple, la relation (23) entraîne

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a, f') = 1 \quad \text{et} \quad \delta(\infty, f') = 1 . \tag{24}$$

En consequénce, on peut appliquer le Théorème 3 dans [1] et le théorème 2 dans ce mémoire. D'après le Théorème 3 dans [1], il existe une valeur finie, asymptotique de $f'(z)$ le long de $\mathcal{L}'$ qui est un chemin s'étendant à l'infini et a quelques d'autres propriétés. Par conséquent, comme on a obtenu (5) dans le paragraphe 2, on a pour une constante K_2

$$M(r, \infty, f) \leqq K_2 r(1 + \log r) M(r, \infty, f') \qquad (r \geqq r') . \tag{25}$$

En vertu de (20), $\delta(\infty, f') = 1$ entraîne

$$\Theta(\infty, f) = 1 ,$$

par conséquent, d'après (22), on a

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{T(r, f')}{T(r, f)} \leqq 1 . \tag{26}$$

De (25), (26) et le théorème 2, on a

$$\begin{aligned} \beta(\infty, f) &= \limsup_{r \to \infty} \frac{\log^+ M(r, \infty, f)}{T(r, f)} \leqq \beta(\infty, f') \limsup_{r \to \infty} \frac{T(r, f')}{T(r, f)} \\ &\leqq \pi \end{aligned}$$

parce que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log r}{T(r,f)} = 0 .$$

N. B. On peut donner aussi un exemple d'une fonction $f(z)$ méromorphe dans $|z| < \infty$ telle que

$$\sum_{a\neq\infty} \delta(a) = 0$$

mais

$$\beta(\infty,f) \leqq \pi .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. EDREI ET W. H. J. FUCHS, Valeurs déficientes et valeurs asymptotiques des fonctions méromorphes, Comment. Math. Herv., 33(1959), 258–295.
[2] A. EDREI AND W. H. J. FUCHS, On the growth of meromorphic functions with several deficient values, Trans. Amer. Math. Soc., 93(1959), 292–328.
[3] R. E. A. C. PALEY, A note on integral functions, Proc. Cambridge Philos. Soc., 28(1932), 262–265.
[4] V. P. PETRENKO, Growth of meromorphic functions of finite lower order, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 33(1969), 414–454 (en russe).
[5] M. TSUZUKI AND T. MISU, A remark on a conjecture of Paley, Proc. Japan Acad., 45(1969), 429–432.
[6] G. VALIRON, Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes, Mono. L'Enseign. math., No. 8, Genève, 1960.
[7] H. WITTICH, Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, Springer Verlag, 1955.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE TÔHOKU
SENDAI, JAPON