Tôhoku Math. Journ.
22(1970), 566-596.

DAS ANFANGSWERTVERHALTEN VON EVOLUTIONSGLEICHUNGEN IN BANACHRÄUMEN. TEIL I: APPROXIMATIONSEIGENSCHAFTEN VON EVOLUTIONSOPERATOREN*)

W. KÖHNEN

(Received January 5, 1970)

1. Einfuhrung und bekannte Resultate. Gegeben sei ein komplexer Banachraum $\mathbf{X}$ mit den Elementen $f, g, \cdots$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|$, ferner ein linearer im allgemeinen unbeschränkter Operator A in $\mathbf{X}$. Ist A abgeschlossen und dicht definiert in $\mathbf{X}$ und existiert die Resolvente $R(\lambda, A) \equiv (\lambda I-A)^{-1}$ von A für alle komplexen Zahlen λ aus dem Bereich $\sum = \{\lambda; |\arg\lambda| \leqq \theta, \theta > \pi/2\}$ und erfüllt sie in $\sum$ die Ungleichung

$$\|R(\lambda;\ A)\| \leqq M/(1+|\lambda|)\,, \tag{1.1}$$

so erzeugt A eine Halbgruppe $\{\exp(tA)\,;\, 0 \leqq t < \infty\}$ von Operatoren, die stark stetig für alle $t \in [0, \infty)$ ist, mit den Eigenschaften

$$\|\exp(tA)\| \leqq Me^{-\eta t} \qquad (0 \leqq t < \infty) \tag{1.2}$$

und

$$\|A\exp(tA)\| \leqq Le^{-\eta t}t^{-1} \qquad (0 < t < \infty)\,. \tag{1.3}$$

Dabei sind M, L und η positive Konstanten (siehe z.B.: T. Kato[15, S. 487 ff.] und E. Hille-R. S. Phillips [12, S. 383 ff.]).

Wegen der starken Stetigkeit von $\exp(tA)$ im Punkte $t=0$, d. h. wegen $\lim_{t\to 0+}\|\exp(tA)f-f\|=0$ für alle $f \in \mathbf{X}$, können wir nun sagen, daß jedes Element $f \in \mathbf{X}$ im Sinne der Norm des Raumes $\mathbf{X}$ von der Halbgruppe $\{\exp(tA)\,;\, 0 \leqq t < \infty\}$ für kleine t approximiert wird. Man spricht deshalb auch von der Halbgruppe $\{\exp(tA)\,;\, 0 \leqq t < \infty\}$ als einem Approximationsprozeß an die Identität I im starken Sinne.

---

*) Dies ist der erste Teil der Dissertation des Autors vom Dezember 1969 an der RWTH Aachen.

In einer Reihe von Arbeiten ist nun insbesondere von P. L. Butzer und H. Berens das Verhalten der Größen $\|\exp(tA)f-f\|$ und $\|A\exp(tA)f\|$ in Abhängigkeit von f beim Grenzübergang $t\rightarrow 0+$ diskutiert worden. Diese Untersuchungen sind sowohl mit Mitteln der klassischen Funktionalanalysis als auch im Rahmen der Theorie der intermediären Räume in der von J. Peetre entwickelten Form durchgeführt worden. Grundlegend waren dabei die Arbeiten von P. L. Butzer (siehe [4], [5], [6] sowie P. L. Butzer-H. Berens [7] und die dort zitierte Literatur). Das folgende Resultat, das P. L. Butzer [4] im Jahre 1956 zuerst bewiesen hat, war Ausgangspunkt vieler weiterer Untersuchungen:

Ist $\mathbf{X}$ *reflexiv, so sind für ein* $f\in\mathbf{X}$ *die Aussagen*

i) $\|\exp(tA)f-f\| = O(t) \qquad (t\rightarrow 0+)$

und

ii) $f\in\mathbf{D}(A)$

äquivalent. ($\mathbf{D}(A)$ *ist Definitionsbereich von* A). *Aus*

$$\|\exp(tA)f-f\| = o(t) \qquad (t\rightarrow 0+)$$

folgt stets $\exp(tA)f=f$ *für alle* $t\geqq 0$, *gleichgültig ob* $\mathbf{X}$ *reflexiv ist oder nicht.*

Dieses Theorem zeigt, daß Halbgruppen von Operatoren in ihrem Approximationsverhalten eine Besonderheit aufweisen, die nach J. Favard unter dem Namen Saturation bekannt ist. Dies bedeutet, daß für ein Element $f\in\mathbf{X}$- abgesehen von gewissen "trivialen" Elementen aus $\mathbf{X}$- der Ausdruck $\|\exp(tA)f-f\|$ höchstens mit der Ordnung $O(t)$ gegen Null strebt für $t\rightarrow 0+$. Die Menge der Elemente $f\in\mathbf{X}$, für die $\|\exp(tA)f-f\|$ genau mit der "optimalen" Ordnung $O(t)$ konvergiert, heißt Saturations oder Favardklasse des Approximationsverfahrens $\{\exp(tA)\,;\ 0\leqq t<\infty\}$. Wie wir aus dem eben zitierten Satz von P. L. Butzer entnehmen, fällt bei reflexivem $\mathbf{X}$ die Favardklasse von $\{\exp(tA)\,;\ 0\leqq t<\infty\}$ mit $\mathbf{D}(A)$ zusammen. Für eine eingehende Diskussion des Begriffes "Saturation" verweisen wir auf P. L. Butzer-H. Berens [7, S .86-88].

Die Funktion $u(t)=\exp(tA)f$ ist nun bekanntlich für ein fest vorgegebenes $f\in\mathbf{X}$ eindeutige starke Lösung des Anfangswertproblems der Evolutionsgleichung

$$\frac{du}{dt}-Au(t)=0 \qquad u(0)=f,\ (0<t<\infty)\,. \tag{1.4}$$

Dabei verstehen wir unter einer starken Lösung des Problems (1. 4) eine Funktion

$u=u(t)$ mit Werten in $\mathbf{X}$, die stark stetig in $0 \leqq t < \infty$ und stark stetig differenzierbar in $0 < t < \infty$ ist und (1.4) erfüllt. (T. Kato [15, S. 486 ff.], E. Hille-R. S. Phillips [12, S. 617 ff.] und P. L. Butzer-H. Berens [7, S. 60 ff.]). Die erwähnten Approximationssätze können daher interpretiert werden als Aussagen darüber, mit welcher Ordnung die Lösung des Problems (1.4) ihren Anfangswert f in Abhängigkeit von dessen strukturellen Eigenschaften approximiert.

In der vorliegenden Arbeit werden nun solche approximationstheoretische Fragen für starke Lösungen des Anfangswertproblems allgemeinerer Evolutionsgleichungen

$$\frac{du}{dt} - A(t)u(t) = F(t) \qquad (0 < t \leqq T, T > 0) \tag{1.5}$$

$$u(0) = f, f \in \mathbf{X}$$

beleuchtet, wobei also jetzt im Gegensatz zu (1.4) A von t abhängig ist und die Differentialgleichung das inhomogene Glied $F(t)$ besitzt.

Existenz-und Eindeutigkeitssätze für das Problem (1.5) sind von mehreren Autoren unter verschiedenen Bedingungen an $A(t)$ und $F(t)$ aufgestellt worden. Für einen diesbezüglichen Überblick verweisen wir auf V. V. Nemytskii-M. M. Vainberg-R. S. Gusarova [21], S. G. Krejn [16], T. Kato [13, 14], K. Yosida [30, Kap. XIV] und R. W. Carroll [9]. Wir betrachten in dieser Arbeit nur starke Lösungen des Problems (1.5) und sprechen deshalb auch kurz von "Lösungen". Dadurch werden verallgemeinerte oder schwache Lösungen, wie sie z. B. J. L. Lions [18] für das Problem (1.5) im Hilbertraum untersucht hat, im allgemeinen nicht mit erfaßt.

Bei unseren Untersuchungen beschränken wir uns auf die Lösungen des Problems (1.5), die unter den Bedingungen von H. Tanabe [26], [27], [28] und P. E. Sobolevskij [24] sowie H. Tanabe [28] und M. Z. Solomjak [25] erhalten worden sind, weil diese besonders zahlreiche und instruktive Anwendungsbeispiele zulassen. Die Theorie wird im Rahmen der intermediären Räume aufgebaut.

Wir stellen nun zunächst bekannte Resultate über Evolutionsgleichungen in Banachräumen sowie über intermediäre Räume zusammen, soweit diese für unsere Untersuchungen benötigt werden. Aus der Theorie der Evolutionsgleichungen sind folgende Aussagen bekannt:

SATZ 1.1 (H. Tanabe [28] und P. E. Sobolevskij [24]). *Für jedes* $t \in [0, T]$, $T > 0$, *sei* $A(t)$ *ein linearer, abgeschlossener Operator mit* $\mathbf{D}(A(t))$ *dicht in* $\mathbf{X}$. $\mathbf{D}(A(t))$ *sei unabhängig von* t, *und in* $\sum = \{\lambda ;\ |\arg \lambda| \leqq \theta, \theta > \pi/2\}$ *gelte*

$$\|R(\lambda ;\ A(t))\| \leqq M/(1 + |\lambda|)\,, \tag{1.6}$$

wobei M *unabhängig von* λ *und* t *ist. Ferner gelte für alle* $t, r, s \in [0, T]$

(1.7) $$\|(A(t)-A(r))A(s)^{-1}\| \leqq K(s)\,|t-r|^{\rho}$$

für irgendein ρ *mit* $0<\rho\leqq 1$. *Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Evolutionsoperator* $U(t,s)$ *mit den folgenden Eigenschaften*:

(1.8) 1) $U(t,s)$ *gehört zu* $\mathfrak{E}(\mathbf{X})$*) *und ist stark stetig in* $0\leqq s\leqq t\leqq T$;

(1.9) 2) $U(t,s)=U(t,r)U(r,s)$ *in* $0\leqq s\leqq r\leqq t\leqq T$;
$U(t,t)=I \quad (t\in[0,T])$;

(1.10) 3) $U(t,s)$ *ist stark stetig differenzierbar bezgl.* t *in* $0\leqq s<t\leqq T$ *mit* $(\partial/\partial t)U(t,s)=A(t)U(t,s)$ *und* $\|A(t)U(t,s)\|\leqq C(t-s)^{-1}$, *wobei* C *höchstens von* M, θ, K, ρ *und* T *abhängt*;

(1.11) 4) *für alle* $f\in D(A(s))$ *gilt in* $0\leqq s<t\leqq T$
$-(\partial/\partial s)U(t,s)f=U(t,s)A(s)f$**).

Zu den Voraussetzungen dieses Satzes ist zu bemerken, daß die Konstante $K(s)$ in (1.7) unabhängig von s gewählt werden kann. (1.6) impliziert, daß $A(t)$ für jedes $t\in[0,T]$ eine stark stetige Halbgruppe von Operatoren erzeugt, welche die Bedingungen (1.2) und (1.3) mit von t unabhängigen Konstanten L and η erfüllt. Ferner sei erwähnt, daß es genügen würde, (1.6) für $\mathrm{Re}\,\lambda\geqq 0$ zu fordern, da sich hieraus nämlich durch Potenzreihenentwicklung der Resolventen (1.6) auch im Gebiet $\sum$ ergibt.

Wir vereinbaren nun für das Folgende, daß wir unter C (nicht notwendig gleiche) Konstanten verstehen wollen, die höchstens von M, θ, K, ρ, T sowie von später noch auftretenden Exponenten α, β und γ abhängen.

Weiter benötigen wir den folgenden Hilfssatz über die Konstruktion der Operatoren $U(t,s)$.

LEMMA 1.2 (H. Tanabe [28] und P. E. Sobolevskij [24]). *Unter den Voraussetzungen von Satz* 1.1 *gilt*:

(1.12) $$U(t,s)=\exp((t-s)A(s))+W(t,s)\,,$$
$$W(t,s)=\int_s^t \exp((t-u)A(u))R(u,s)du\,,$$

wobei sich $R(t,s)$ *als Lösung der Integralgleichung*

*) Mit $\mathfrak{E}(\mathbf{X})$ bezeichnen wir die Banachalgebra der Endomorphismen von $\mathbf{X}$.

**) Alle in dieser Arbeit vorkommenden Ableitungen sind stets Ableitungen in der Norm des Raumes $\mathbf{X}$.

$$\begin{cases} R(t, s) - \int_s^t R_1(t, u)R(u, s)du = R_1(t, s) \\ R_1(t, s) = (A(t) - A(s))\exp((t - s)A(s)) \end{cases} \tag{1.13}$$

ergibt. (1. 13) *kann durch eine sukzessive Approximationsmethode gelöst werden, und* $R(t, s)$ *erfüllt auch*

$$R(t, s) - \int_s^t R(t, u)R_1(u, s)du = R_1(t, s)\,, \tag{1.14}$$

wobei $R(t, s)$ *stark stetig in* $0 \leqq s < t \leqq T$ *ist und dort die Ungleichung*

$$\|R(t, s)\| \leqq C(t - s)^{\rho - 1} \tag{1.15}$$

erfüllt.

Die Voraussetzung der Hölderstetigkeit von $A(t)A(s)^{-1}$, die in Formel (1. 7) von Satz 1. 1 verlangt wird, kann abgeschwächt werden, wenn man eine gestörte Gleichung betrachtet. Dazu definieren wir zunächst gebrochene Potenzen der Operatoren-$A(t)$. Wegen (1. 6) ist folgende Definition sinnvoll (P. E. Sobolevskij [24] und S. G. Krejn [16, S. 133-158]) : Für $\alpha > 0$ setzen wir

$$(-A(t))^{-\alpha} = [\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_0^\infty \exp(uA(t))u^{\alpha-1}du \ \ und \ \ (-A(t))^{\alpha} = [(-A(t))^{-\alpha}]^{-1}\,.$$

Für eine allgemeinere Definition gebrochener Potenzen von Halbgruppenerzeugern siehe u. a. U. Westphal [29]. Es gilt nun der folgende Störungssatz, der für nicht von t abhängiges A auf M. Z. Solomjak [25] zurückgeht und von H. Tanabe [28] auf die unten stehende Form verallgemeinert wurde.

SATZ 1. 3 (H. Tanabe [28]). *Es seien die Voraussetzungen von Satz* 1. 1 *erfüllt. Zusätzlich gebe es für jedes* $t \in [0, T]$ *einen linearen Operator* $B(t)$ *in* $\mathbf{X}$ *sowie positive Konstante* β *und* γ *mit* $\beta + \gamma < 1$, *so daß die Operatoren* $B(t)(-A(t))^{-\beta}$ *und* $(-A(t))^{\gamma}B(t)(-A(t))^{-\beta-\gamma}$ *zu* $\mathfrak{E}(\mathbf{X})$ *gehören und stark stetig auf* $[0, T]$ *sind. Es existiert dann ein eindeutig bestimmter Evolutionsoperator* $V(t, s)$ *mit den Eigenschaften* :

(1. 16) 1) *und* 2) *wie* $U(t, s)$ *in Satz* 1. 1 ;

(1. 17) 3) $V(t, s)$ *ist stark stetig differenzierbar bzgl.* t *in* $0 \leqq s < t \leqq T$ *mit* $(\partial/\partial t)V(t, s) = (A(t) + B(t))V(t, s)$ *und* $\|(\partial/\partial t)V(t, s)\| \leqq C(t-s)^{-1}$, $\|A(t)V(t, s)\| \leqq C(t-s)^{-1}$, $\|B(t)V(t,s)\| \leqq C(t-s)^{-\beta}$;

(1.18) 4) *für alle* $f \in D(A(s)+B(s))$ *gilt in* $0 \leqq s < t \leqq T$
$$-(\partial/\partial s)V(t,s)f = V(t,s)(A(s)+B(s))f.$$

Aus der Theorie der intermediären Räume benötigen wir die folgenden Begriffsbildungen: Es seien $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ zwei Banachräume, die derart in einem linearen Hausdorffraum $\mathfrak{X}$ enthalten sind, daß die Identitätsabbildung von $\mathbf{X}_i$ $(i=1,2)$ in $\mathfrak{X}$ stetig ist. Wir schreiben dafür $\mathbf{X}_i \subset \mathfrak{X}$ $(i=1,2)$. Man kann zeigen (siehe z. B. P. L. Butzer-H. Berens [7, *S.* 165]), daß die algebraische Summe $\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2$ (d. h. die Menge aller Elemente $f \in \mathfrak{X}$ der Form $f=f_1+f_2$, $f_1 \in \mathbf{X}_1$, $f_2 \in \mathbf{X}_2$) und der Durchschnitt $\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2$ unter der Norm $\|f\|_{\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2} = \inf_{f=f_1+f_2}(\|f\|_{\mathbf{X}_1} + \|f_2\|_{\mathbf{X}_2})$*) bzw. $\|f\|_{\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2} = \max(\|f\|_{\mathbf{X}_1}, \|f\|_{\mathbf{X}_2})$ Banachräume bilden, für die gilt

$$\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2 \subset \mathbf{X}_i \subset \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \subset \mathfrak{X} \qquad (i=1,2).$$

Jeder Banachraum $\mathbf{X} \subset \mathfrak{X}$, der die Relation

$$\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2 \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$$

erfüllt, heißt intermediärer Raum von $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$. Es gibt zahlreiche Methoden zur Erzeugung von intermediären Räumen (siehe z. B. J. Peetre [22], N. Aronszajn-E. Gagliardo [1] und J. L. Lions-J. Peetre [19]). Wir benutzen die K-Räume, die von J. Peetre [22] konstruiert worden sind und die wie folgt erklärt sind: Wir definieren auf $\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2$ die Funktionennorm

$$K(t\,;f) = \inf_{f=f_1+f_2}(\|f\|_{\mathbf{X}_1} + t\|f_2\|_{\mathbf{X}_2}) \qquad (0<t<\infty). \tag{1.19}$$

Unter $(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)_{\theta,q;K}$, $-\infty<\theta<+\infty$, $1 \leqq q \leqq \infty$, verstehen wir nun die Menge der Elemente $f \in \mathbf{X}+\mathbf{X}_2$, für die $\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t\,;f))^q dt/t < \infty$, $1 \leqq q < \infty$, bzw. $\operatorname*{wes\,sup}_{0<t<\infty}(t^{-\theta}K(t\,;f)) < \infty$, $q=\infty$, ist. Für $0<\theta<1$, $1 \leqq q < \infty$ bzw. $0<\theta \leqq 1$, $q=\infty$ wird unter der Norm

$$\|f\|_{\theta,q;K} = \begin{cases} \left\{\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t\,;f))^q dt/t\right\}^{1/q} & (1 \leqq q < \infty) \\ \operatorname*{wes\,sup}_{0<t<\infty}(t^{-\theta}K(t\,;f)) & (q=\infty) \end{cases} \tag{1.20}$$

$(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)_{\theta,q;K}$ ein intermediärer Raum von $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$.

Eine wichtige Rolle spielt in unseren Überlegungen noch der Begriff

---

*) $\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{X}_i}$ bedeutet die Norm des Elementes f bezüglich des Raumes $\mathbf{X}_i$.

der relativen Vervollständigung, der von E. Gagliardo [10] stammt und dessen Bedeutung in der Saturationstheorie von H. Berens [3] erkannt wurde. Die "relative Vervollständigung" ist folgendermaßen erklärt: Es sei $\mathbf{Y}$ ein normalisierter Banachunterraum von $\mathbf{X}$ (d. h. es gilt für alle $f\in Y$ $\|f\|_{\mathbf{X}}\leqq\|f\|_{\mathbf{Y}}$), dann verstehen wir unter der relativen Vervollständigung $\tilde{\mathbf{Y}}^{\mathbf{X}}$ von $\mathbf{Y}$ bezüglich $\mathbf{X}$ die Menge aller Elemente $f\in\mathbf{X}$, die in der $\mathbf{X}$-Abschließung einer beliebigen $\mathbf{Y}$-beschränkten Kugel liegen; d. h. es ist $f\in\tilde{\mathbf{Y}}^{\mathbf{X}}$ genau dann, wenn es ein $R>0$ und eine Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathbf{Y}$ gibt, so daß $\|f_n\|_{\mathbf{Y}}\leqq R$ für $n=1,2,\cdots$ und $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{\mathbf{X}}=0$ gilt.

Das folgende Theorem stellt u. a. einen Zusammenhang zwischen den K-Räumen und der "relativen Vervollständigung" her.

SATZ 1.4. *Ist* $\mathbf{Y}$ *ein normalisierter Banachunterraum von* $\mathbf{X}$, *so ist unter der Norm*

$$\|f\|_{\tilde{\mathbf{Y}}^{\mathbf{X}}}=\inf\{\sup_{n=1,2,\cdots}\|f_n\|_{\mathbf{Y}}:\ \{f_n\}\subset\mathbf{Y}\ mit\ f_n\to f\ in\ \mathbf{X}\}$$

$\tilde{\mathbf{Y}}^{\mathbf{X}}$ *ein intermediärer Raum von* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *mit den Eigenschaften*

i) $\tilde{\mathbf{Y}}^{\mathbf{X}}\cong(\mathbf{X},\mathbf{Y})_{1,\infty;K}$ *);

ii) $\tilde{\mathbf{Y}}^{\mathbf{X}}\cong\mathbf{Y}$, *falls* $\mathbf{Y}$ *reflexiv ist.*

Den Beweis der Banachraumeigenschaft von $\tilde{\mathbf{Y}}^{\mathbf{X}}$ und den Beweis von ii) findet man bei. N. Aronszajn-E. Gagliardo [1]; Aussage i) ist in H. Berens [3] bewiesen.

Wie schon gesagt, betrachten wir in dieser Arbeit das Verhalten der Größe $\|u(t;f)-f\|$ beim Grenzübergang $t\to0+$, wenn $u(t;f)$ Lösung des Anfangswertproblems (1.5) ist. Die Ergebnisse gliedern sich in zwei Teile. In Teil I untersuchen wir die Operatoren $U(t,s)$ bzw. $V(t,s)$ (mit der Störung $B(t)$), die dem homogenen Problem (1.5) entsprechen, und in Teil II den inhomogenen Fall zusammen mit höheren Ableitungen von $u(t;f)$ sowie Anwendungsbeispiele. Wir werden zeigen, daß sich in beiden Fällen $\|u(t;f)-f\|$ für $t\to0+$ im wesentlichen so verhält wie $\|\exp(tA(0))f-f\|$ für $t\to0+$, wobei ja $\exp(tA(0))f$ Lösung des Anfangswertproblems (1.4) ist. Dies bedeutet, daß die Approximation an die Identität eine Invariante beim Übergang von (1.4) zu (1.5) ist, falls die beiden Differentialgleichungen in der erwähnten Weise zueinander in Beziehung stehen. Ein erster Schritt zur Beantwortung der Frage, inwieweit Lösungen des Anfangswertproblems (1.4) in ihrem Approximationsverhalten stabil (im Sinne von Hille-Phillips[12, S. 388]) gegenüber Störungen sind, wurde in der Arbeit [8] von

*) Das Zeichen "$\cong$" besagt, daß die Räume gleich sind und äquivalente Normen haben.

P. L. Butzer und W. Köhnen getan. Darin wurde gezeigt, daß zwei beliebige in $0 \leqq t < \infty$ stark stetige Halbgruppen $\{\exp(tA)\,;\, 0 \leqq t < \infty\}$ und $\{\exp(tA')\,;\, 0 \leqq t < \infty\}$ dasselbe Approximationsverhalten aufweisen, wenn die Definitionsbereiche $\mathbf{D}(A)$ und $\mathbf{D}(A')$ ihrer Erzeuger zusammenfallen. Die entscheidenen über dieses Resultat hinausgehenden Ergebnisse der vorliegenden Arbeit bestehen nun im wesentlichen darin, daß das Approximationsverhalten nicht nur gegenüber einer ortsabhängigen Störung, sondern auch gegenüber einer hinreichend "glatten" zeitabhängigen Störung stabil ist. Das Approximationsverhalten einer Schar von Operatoren, die ebenfalls selbst keine Halbgruppe bildet, jedoch durch Störung einer Halbgruppe entstanden ist, wird auch in einer Arbeit von J. Löfström [20] betrachtet. Diese Operatorschar hat aber keinerlei Bezug zur Differentialgleichung (1. 5).

Im einzelnen untersuchen wir in Teil I dieser Arbeit zunächst die Operatoren $U(t, s)$ aus Satz 1. 1 und zeigen u. a., daß sie für $t \to s+$ dasselbe Approximationsverhalten aufweisen wie die Operatoren $\exp(tA(s))$ für $t \to 0+$. Satz 2. 12 stellt das diesbezüglich wichtigste Resultat dar. Im darauffolgenden Abschnitt können wir dann, auf den Ergebnissen des Vorangegangenen aufbauend, die Frage der "Approximationsinvarianz" zwischen den Operatoren $V(t, s)$ aus Satz 1. 3 und $\exp(tA(s))$ im wesentlichen positiv beantworten (Satz 3. 7).

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden die in Teil I erzielten Ergebnisse zunächst dazu benutzt, die oben erwähnten Approximationsaussagen für Lösungen $u(t\,;\,f)$ von (1. 5) im inhomogenen Fall zu gewinnen. Mit Hilfe dieser Resultate untersuchen wir dann das Anfangswertverhalten von konkreten Differentialgleichungsproblemen vom parabolischen Typ, die physikalische Ausgleichsvorgänge beschreiben, wie z. B. Phänomene der Wärmeleitung, der elektrischen Leitfähigkeit und der Diffusion. Bezogen auf solche Ausgleichsvorgänge sind unsere Resultate interpretierbar als Beschreibung der Einflußnahme einer wohlbestimmten Störung auf den Ausgleichsvorgang.

Der Autor möchte Herrn Professor Dr. P.L. Butzer seinen tiefempfundenen Dank aussprechen für die freundlichen Ratschläge und die wohlwollende Unterstützung während der Fertigstellung dieser Arbeit. Ferner dankt er Frl. Dr. U. Westphal für manchen kritischen Hinweis und Verbesserungsvorschlag.

2. Approximationssätze für die Operatoren $U(t, s)$*). Gegeben sei die Schar der Operatoren $A(a)$, $0 \leqq a \leqq T$, sowie der Evolutionsoperator $U(t, s)$ aus Satz 1. 1. Da ja für jedes feste $a \in [0, T]$ $A(a)$ Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $\{\exp(tA(a))\,;\, 0 \leqq t < \infty\}$ von Operatoren ist, können wir die in Butzer-Berens [7, Chapter III] mittels der Theorie der intermediären Räume gemachten Approximationsaussagen über Halbgruppenoperatoren unmittelbar anwenden: Für jedes feste $a \in [0, T)$ bilden die Teilmengen von $\mathbf{X}$, für die

*) Teilresultate dieses Abschnittes bildeten den Inhalt eines Vortrages, den der Autor während der Jahrestagung 1969 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung am 22. September 1969 in Darmstadt gehalten hat.

$$(2.1)\quad \|f\|_{\alpha,q;A(a)}=\begin{cases}\|f\|+\left\{\int_0^T(t^{-\alpha}\|\exp(tA(a))f-f\|)^q dt/t\right\}^{1/q} & (1\leqq q<\infty, 0<\alpha<1)\\ \|f\|+\sup_{0<t\leqq T}(t^{-\alpha}\|\exp(tA(a))f-f\|) & (q=\infty, 0<\alpha\leqq 1)\end{cases}$$

endlich ist, unter diesen Normen Banachräume, die wir mit $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}$ bezeichnen. Mit $\mathbf{X}'_{\alpha,q;A(a)}$ bezeichnen wir analog die Unterräume von $\mathbf{X}$, für deren Elemente

$$(2.2)\quad \|f\|'_{\alpha,q;A(a)}=\begin{cases}\|f\|+\left\{\int_0^T(t^{1-\alpha}\|A(a)\exp(tA(a))f\|)^q dt/t\right\}^{1/q} & (1\leqq q<\infty, 0<\alpha<1)\\ \|f\|+\sup_{0<t\leqq T}(t^{1-\alpha}\|A(a)\exp(tA(a))f\|) & (q=\infty, 0<\alpha\leqq 1)\end{cases}$$

endlich ist. Auch diese Räume sind unter den angegebenen Normen Banachunterräume von $\mathbf{X}$. Ein wichtiges Ergebnis aus der Approximationstheorie von Halbgruppen von Operatoren, das H. Berens [2] zuerst bewiesen hat, ist die Relation

$$(2.3)\quad \mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}\cong\mathbf{X}'_{\alpha\,q;A(a)}\,.^{*)}$$

Wir betrachten nun in Verallgemeinerung der Räume $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}$ bzw. $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}$ für ein festes $a\in[0,T)$ und ein festes reelles α die folgenden Teilmengen von $\mathbf{X}$:

$$(2.4)\quad \mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}=\begin{cases}\left\{f: f\in\mathbf{X}, \int_a^T((t-a)^{-\alpha}\|U(t,a)f-f\|)^q dt/(t-a)<\infty\right\} & (1\leqq q<\infty)\\ \{f: f\in\mathbf{X}, \sup_{a<t\leqq T}((t-a)^{-\alpha}\|U(t,a)f-f\|)<\infty\} & (q=\infty)\end{cases}$$

sowie

$$(2.5)\quad \mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}=\begin{cases}\left\{f: f\in\mathbf{X}, \int_a^T((t-a)^{1-\alpha}\|A(t)U(t,a)f\|)^q dt/(t-a)<\infty\right\} & (1\leqq q<\infty)\\ \{f: f\in\mathbf{X}, \sup_{a<t\leqq T}((t-a)^{1-\alpha}\|A(t)U(t,a)f\|)<\infty\} & (q=\infty)\end{cases}$$

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß diese Mengen unter einer geeigneten Norm intermediäre Räume von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{D}(A(a))(\mathbf{D}(A(a))$ versehen mit der Graphennorm $\|f\|_{D(A(a))}=\|f\|+\|A(a)f\|)$ sind und ferner, daß für beliebige $a,b,c,d\in[0,T)$

$$(2.6)\quad \mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}\cong\mathbf{X}_{\alpha,q;U(b)}\cong\mathbf{X}'_{\alpha,q;U(c)}\cong\mathbf{X}_{\alpha,q;A(d)}$$

gilt; darüberhinaus zeigen wir, daß für jedes feste $a\in[0,T)$ das Approximations-

*) In [2], [7] und [23] werden etwas modifizierte Räume betrachtet; dort läuft die Integrationsvariable nicht von 0 bis T, sondern von 0 bis ∞. Trivialerweise sind die dort betrachteten Räume den unseren äquivalent.

verfahren $\{U(t, a)\,;\ t \to a+\}$ die Saturationseigenschaft besitzt.

Man überzeugt sich leicht davon, daß in dem Spezialfall $A(t) = A(a)$ für alle $t \in [0, T]$, $a \in [0, T)$ fest, $U(t, a) = \exp((t-a)A(a))$ ist. Durch Substitution in den Integralen in (2. 4) und (2. 5) erkennt man dann, daß in diesem Spezialfall die Räume $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}$ mit den Räumen $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}$ und die Räume $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}$ mit den Räumen $\mathbf{X}'_{\alpha,q;U(a)}$ zusammenfallen, die Relation $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)} \cong \mathbf{X}'_{\alpha,q;U(a)}$ also eine direkte Verallgemeinerung von (2. 3) ist.

Die Beweise der nun folgenden Aussagen führen wir stets nur für den Fall $a = 0$. Für die anderen Werte von $a \in (0, T)$ lassen sie sich ganz analog übertragen.

LEMMA 2. 1. *Für* $1 \leqq q \leqq \infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$ *sind unter den Normen*

$$\|f\|_{\alpha,q;U(a)} = \|f\| + \left\{\int_a^T ((t-a)^{-\alpha}\|U(t, a)f - f\|)^q dt/(t-a)\right\}^{1/q} \tag{2. 7}$$

bzw.

$$\|f\|'_{\alpha,q;U(a)} = \|f\| + \left\{\int_a^T ((t-a)^{1-\alpha}\|A(t)U(t, a)f\|^q dt(t-a)\right\}^{1/q} \tag{2. 8}$$

(*die Modifikation im Falle* $q = \infty$ *ist evident*) *die Räume* $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}$ *bzw.* $\mathbf{X}_{\alpha\, q;U(a)}$ *für jedes feste* $a \in [0, T)$ *Banachräume.*

BEWEIS. Daß die Räume $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}$ bzw. $\mathbf{X}'_{\alpha,q;U(a)}$ unter den angegebenen Normen die Axiome eines normierten Raumes erfüllen, verifiziert man ohne Schwierigkeit. Wir müssen also noch die Vollständigkeit zeigen. Sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(0)}$, so folgt wegen der Vollständigkeit von $\mathbf{X}$, daß es ein $f \in \mathbf{X}$ gibt, so daß $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ ist. Wegen der Vollständigkeit der Räume $\mathbf{B}_q((0, T)\,;\ \mathbf{X}\,;\ dt/t)(\mathbf{B}_q((0, T)\,;\ \mathbf{X}\,;\ dt/t)$ ist der Raum der bezüglich des Haarschen Maßes dt/t auf $(0, T)$ zur q-ten Potenz im Bochnerschen Sinne integrierbaren bzw. wesentlich beschränkten Funktionen; siehe Hille-Phillips [12, S. 88 f.]) gibt es eine Funktion $g(t) \in \mathbf{B}_q$, so daß

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^T (t^{-\alpha}\|U(t, 0)f_n - f_n - g(t)\|)^q dt/t\right\}^{1/q} = 0$$

bzw. $\lim\limits_{n\to\infty}\ \operatorname*{wes\,sup}\limits_{0<t\leqq T}\ (t^{-\alpha}\|U(t, 0)f_n - f_n - g(t)\|) = 0$ ist. Im Falle $q = \infty$ entnimmt man hieraus sofort, daß $g(t) = U(t, 0)f - f$ f. ü. auf $(0, T)$ gilt. Im Falle $1 \leqq q < \infty$ folgt zunächst, daß es eine Teilfolge $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ von $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ gibt, für die $\lim\limits_{j\to\infty}\|U(t, 0)f_{n_j} - f_{n_j}\| = \|g(t)\|$ für fast alle $t \in (0, T)$ gilt. Hieraus gewinnt man nun, daß auch im Falle

$1 \leqq q < \infty$ $g(t) = U(t, 0)f - f$ f. ü. auf $(0, T)$ erfüllt ist. Damit ist die Vollständigkeit der Räume $\mathbf{X}_{\alpha, q; U(a)}$ gezeigt. Die Vollständigkeit der Räume $\mathbf{X}'_{\alpha, q; U(a)}$ ergibt sich ganz analog.

Das folgende Lemma zeigt nun, daß die Räume $\mathbf{X}_{\alpha, q; U(a)}$ für $0 \leqq \alpha < 1$, $1 \leqq q < \infty$ bzw. $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $q = \infty$ intermediäre Räume von $\mathbf{D}(A(a))$ und $\mathbf{X}$ sind.

LEMMA 2.2. *Für* $a \in [0, T)$, $0 \leqq \alpha < 1$, $1 \leqq q < \infty$ *bzw.* $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $q = \infty$ *gilt*

$$\mathbf{D}(A(a)) \subset \mathbf{X}_{\alpha, q; U(a)} \subset \mathbf{X}\,. \tag{2.9}$$

BEWEIS. Die Inklusion $\mathbf{X}_{\alpha, q; U(a)} \subset \mathbf{X}$ ist trivial. Sei $f \in \mathbf{D}(A(0))$, so gilt, weil $\mathbf{D}(A(t))$ unabhängig von t ist, für $0 \leqq s < t \leqq T$ die Gleichung $U(t, s)A(s)f = U(t, s)A(s)A(0)^{-1}A(0)f$. Daraus folgt wegen (1.7), daß $U(t, s)A(s)f$ stetig in der Norm von $\mathbf{X}$ bezüglich $s \in [0, t]$ ist. Mithin erhalten wir auf Grund von (1.11)

$$U(t, 0)f - f = -\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} U(t, s)f\, ds = \int_0^t U(t, s)A(s)f\, ds\,,$$

woraus sich $\|U(t, 0)f - f\| \leqq Ct\|A(0)f\|$ ergibt. Dies liefert im Falle $1 \leqq q < \infty$

$$\left\{\int_0^T (t^{-\alpha}\|U(t, 0)f - f\|)^q dt/t\right\}^{1/q} \leqq C\|A(0)f\| \left\{\int_0^T t^{(1-\alpha)q} dt/t\right\}^{1/q} \leqq C\|A(0)f\|$$

und im Falle $q = \infty$

$$\sup_{0 < t \leqq T} (t^{-\alpha}\|U(t, 0)f - f\|) \leqq \sup_{0 < t \leqq T} t^{1-\alpha} C\|A(0)f\|\,,$$

woraus dann schließlich $\|f\|_{\alpha, q; U(0)} \leqq C\|f\|_{\mathbf{D}(A(0))}$ folgt.

Es sei noch bemerkt, daß für $a \in [0, T)$ und $\beta \geqq \alpha > 0$, $1 \leqq q \leqq \infty$ offenbar die Inklusion

$$\mathbf{X}_{\beta, q; U(a)} \subset \mathbf{X}_{\alpha, q; U(a)} \tag{2.10}$$

erfüllt ist.

In unseren weiteren Untersuchungen wird nun der folgende Hilfssatz des öfteren benötigt.

LEMMA 2.3. *Für* $a \in [0, T)$, $a < t \leqq T$ *sowie* $0 < \alpha \leqq 1$ *und* $0 < \rho \leqq 1$ *gilt*

i) $(t-a)^{1-\alpha-\rho}\|R(t,a)f\|\leqq C\|f\|'_{\alpha,\infty;A(a)}$;

ii) $(t-a)^{-\alpha-\rho}\|W(t,a)f\|\leqq C\|f\|_{\alpha,\infty;A(a)}$.

BEWEIS. Es ist zunächst

$$t^{1-\alpha}\|R_1(t,0)f\|\leqq t^{1-\alpha}\|(A(t)-A(0))A(0)^{-1}\|\|A(0)\exp(tA(0))f\|$$
$$\leqq Kt^{1+\rho-\alpha}\|A(0)\exp(tA(0))f\|\leqq Kt^{\rho}\sup_{0<t\leqq T}t^{1-\alpha}\|A(0)\exp(tA(0))f\|,$$

also folgt $\|R_1(t,0)f\|\leqq Kt^{\rho+\alpha-1}\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}$. Aussage i) folgt aus dieser Ungleichung, (1. 14) und (1. 15) sofort.

Aus der Abschätzung

$$\|W(t,0)f\|\leqq\int_0^t\|\exp((t-u)A(u))\|\|R(u,0)f\|du\leqq Ct^{\alpha+\rho}\|f\|_{\alpha,\infty;A(0)}$$

folgt schließlich Aussage ii).

Wir können nun den ersten wichtigen Satz beweisen.

SATZ 2. 4. *Für* $a\in[0,T)$ *und* $0<\alpha<1$, $1\leqq q<\infty$ *bzw.* $0<\alpha\leqq 1$, $q=\infty$ *gilt*

$$\mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}\cong\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}\cong(\mathbf{X},\mathbf{D}(A(a)))_{\alpha,q;K}\,. \tag{2.11}$$

BEWEIS. Die Relation $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(0)}\cong(\mathbf{X},\mathbf{D}(A(0)))_{\alpha,q;K}$ ist von J. Peetre bewiesen worden. Für einen Beweis sei auf P. L. Butzer-H. Berens [7, S. 191 ff.] verwiesen. Es genügt also zu zeigen, daß $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(0)}\cong\mathbf{X}_{\alpha,q;U(0)}$ gilt.Für die im Satz angegebenen Werte von α und q haben wir die Einschließungsrelation $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(0)}\subset\mathbf{X}_{\alpha,\infty;A(0)}$ (siehe J. L. Lions-J. Peetre [19]). Hieraus ergibt sich wegen (2. 3)

$$\mathbf{X}_{\alpha,q;A(0)}\subset\mathbf{X}'_{\alpha,\infty;A(0)}\,, \tag{2.12}$$

woraus wir mit Lemma 2. 3 $\|W(t,0)f\|\leqq Ct^{\alpha+\rho}\|f\|_{\alpha,q;A(0)}$ erhalten. Mit der letzten Beziehung folgt aber sofort

$$\mathbf{X}_{\alpha\ q;A(0)}\subset\mathbf{X}_{\alpha,q;U(0)}\,. \tag{2.13}$$

Umgekehrt sei nun $f\in\mathbf{X}_{\alpha,q;U(0)}$. Da wir wegen (1. 15) die Abschätzung $\|W(t,s)\|$

$\leqq C(t-s)^{\rho}$ haben, ist für alle $f\in \mathbf{X}$

$$\|\exp(tA(0))f-f\| \leqq \|U(t,0)f-f\|+Ct^{\rho}\|f\| \tag{2.14}$$

Hieraus entnimmt man für den Fall, daß $\alpha<\rho/2$ ist, $f\in \mathbf{X}_{\alpha,q;A(0)}$. Ist nun $\alpha\geqq\rho/2$, so läßt sich eine ganze nicht negative Zahl n_0 finden, so daß

$$n_0\rho+\rho/(n_0+2)\leqq\alpha<(n_0+1)\rho+\rho/(n_0+2) \tag{2.15}$$

gilt. Damit folgt aus $f\in \mathbf{X}_{\alpha,q;U(0)}$ zunächst $f\in \mathbf{X}_{n_0\rho+\rho/(n_0+2),q;U(0)}$. Hieraus erhalten wir trivialerweise $f\in \mathbf{X}_{\rho/2,q;U(0)}$, woraus sich weiter wegen (2.14) und (2.12) $f\in \mathbf{X}'_{\rho/2,\infty;A(0)}$ ergibt. Damit gewinnen wir unter Benutzung von Lemma 2.3 für alle $f\in \mathbf{X}_{\alpha,q;U(0)}$ die Abschätzung

$$\|\exp(tA(0))f-f\| \leqq \|U(t,0)f-f\| + Ct^{\rho+\rho/2}\|f\|'_{\rho/2,\infty;A(0)},$$

woraus man $f\in \mathbf{X}_{\rho+\rho/3;q;A(0)}$ entnimmt. Die letzte Aussage hat aber wegen (2.12) und Lemma 2.3 die Ungleichung

$$\|\exp(tA(0))f-f\| \leqq \|U(t,0)f-f\| + Ct^{2\rho+\rho/3}\|f\|'_{\rho+\rho/3,\infty;A(0)},$$

zur Folge, woraus wir $f\in \mathbf{X}_{2\rho+\rho/4,q;A(0)}$ erhalten. Es ist klar, wie wir dieses Verfahren fortzusetzen haben, so daß wir schließlich $f\in \mathbf{X}_{n_0\rho+\rho/(n_0+2),q;A(0)}$ erhalten. Dies letztere impliziert die Ungleichung

$$\|\exp(tA(0))f-f\| \leqq \|U(t,0)f-f\|+Ct^{(n_0+1)\rho+\rho/(n_0+2)}\|f\|'_{n_0\rho+\rho/(n_0+2),\infty;A(0)},$$

aus der wir dann $f\in \mathbf{X}_{\alpha,q;A(0)}$ schließen. Mittels Lemma 2.1 und (2.13) ergibt sich daraus auf Grund des Satzes von Banach über die Beschränktheit des inversen Operators die Inklusion

$$\mathbf{X}_{\alpha,q;U(0)}\subset \mathbf{X}_{\alpha,q;A(0)}. \tag{2.16}$$

Dies zusammen mit (2.13) liefert die Behauptung $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(0)}\cong \mathbf{X}_{\alpha,q;A(0)}$.

Auf den Räumen $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}$ kann für $0<\alpha<1$, $1\leqq q<\infty$ bzw. $0<\alpha\leqq1$, $q=\infty$ durch

$$\|f\|^{\sim}_{\alpha,q;A(a)}=\|f\|+\left\{\int_0^T (t^{-\alpha}\sup_{0\leqq\tau\leqq t}\|\exp(\tau A(a))f-f\|)^q dt/t\right\}^{1/q}$$

(Modifikation im Falle $q=\infty$ ist evident) eine zu (2.1) äquivalente Norm eingeführt werden (siehe P. L. Butzer-H. Berens [7, S. 194]). Wir zeigen, daß entsprechendes auch für die Räume $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}$ möglich ist.

SATZ 2.5. *Für* $0<\alpha<1$, $1\leqq q<\infty$ *bzw.* $0<\alpha\leqq 1$, $q=\infty$ *ist auf* $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}$ *eine zu* (2.7) *äquivalente Norm gegeben durch*

$$\text{(2.17)}\quad \|f\|^{\sim}_{\alpha,q;U(a)}=\begin{cases}\|f\|+\left\{\int_a^T((t-a)^{-\alpha}\sup_{a\leqq\tau\leqq t}\|U(\tau,a)f-f\|)^q dt/(t-a)\right\}^{1/q} & (1\leqq q<\infty)\\ \|f\|+\sup_{a<t\leqq T}((t-a)^{-\alpha}\sup_{a\leqq\tau\leqq t}\|U(\tau,a)f-f\|) & (q=\infty)\,.\end{cases}$$

BEWEIS. Aus dem Beweis von Lemma 2.2 entnimmt man, daß für alle $t\in[0,T]$ und alle $f\in\mathbf{D}(A(0))$ die Abschätzung $\|U(t,0)f-f\|\leqq Ct\|f\|_{\mathbf{D}(A(0))}$ erfüllt ist. Ferner gilt für alle $t\in[0,T]$ und alle $f\in\mathbf{X}$ $\|U(t,0)f-f\|\leqq C\|f\|$. Ist nun $f\in\mathbf{X}$ mit $f=f_1+f_2$, $f_1\in\mathbf{X}, f_2\in\mathbf{D}(A(0))$ gegeben, so erhalten wir damit

$$\|U(t,0)f-f\|\leqq C\inf_{f=f_1+f_2}(\|f_1\|+t\|f_2\|_{\mathbf{D}(A(0))})\,.$$

Benutzen wir nun die Ungleichung

$$\inf_{f=f_1+f_2}(\|f_1\|+t\|f_2\|_{\mathbf{D}(A(0))}\leqq C(\sup_{0\leqq\tau\leqq t}\|\exp(\tau A(0))f-f\|+t\|f\|)$$

(siehe P. L. Butzer-H. Berens [7, S. 193]), deren linke Seite monoton in t wächst, so können wir

$$\sup_{0\leqq\tau\leqq t}\|U(\tau,0)f-f\|\leqq C(\sup_{0\leqq\tau\leqq t}\|\exp(\tau A(0))f-f\|+t\|f\|)$$

schließen. Hieraus ergibt sich dann, da durch $\|\cdot\|^{\sim}_{\alpha,q;A(0)}$ eine zu (2.1) äquivalente Norm auf $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(0)}$ definiert ist, wegen Satz 2.4 die Aussage unseres Satzes.

Obwohl für die Anwendungen nicht so bedeutend, betrachten wir noch der Vollständigkeit halber die Räume $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}$ für diejenigen Werte von α $(-\infty<\alpha<\infty)$, über die in Satz 2.4 noch nichts ausgesagt ist. Mit Hilfe der Abschätzung (2.14) ist $\mathbf{X}_{0,q;U(a)}\cong\mathbf{X}_{0,q;A(a)}(1\leqq q<\infty)$. Trivialerweise gilt für $\alpha<0$, $1\leqq q<\infty$ bzw. $\alpha\leqq 0$, $q=\infty$ die Aussage $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}\cong\mathbf{X}$. Weiter haben wir:

SATZ 2.6. *Für* $1\leqq q<\infty$ *und* $a\in[0,T)$ *gilt*

$$\mathbf{X}_{1,q;A(a)}\cong\mathbf{X}_{1,q;U(a)}\,.$$

BEWEIS. Ist $f\in\mathbf{X}_{1,q;A(0)}$, so folgt $f\in\mathbf{X}_{\bar\alpha,q;U(0)}$ mit $\bar\alpha<1$ und $\bar\alpha+\rho>1$. Daraus ergibt sich mit (2.12) und Lemma 2.3

$$\|W(t,0)f\| \leqq Ct^{\bar{\alpha}+\rho}\|f\|_{\bar{\alpha},\infty;A(0)}$$

$$\leqq Ct^{\bar{\alpha}+\rho}\|f\|_{\bar{\alpha},q;A(0)} \leqq Ct^{\bar{\alpha}+\rho}\|f\|_{1,q;A(0)}\,,$$

was die Inklusion $\mathbf{X}_{1,q;A(0)} \subset \mathbf{X}_{1,q;U(0)}$ nach sich zieht. Ist umgekehrt $f \in \mathbf{X}_{1,q;U(0)}$, so folgt $f \in \mathbf{X}_{\bar{\alpha},q;U(0)}$, woraus sich mit Satz 2.4 $f \in \mathbf{X}_{\alpha,q;A(0)}$ ergibt. Die Anwendung von (2.12), Lemma 2.3 und Satz 2.4 liefert weiter

$$\|W(t,0)f\| \leqq Ct^{\bar{\alpha}+\rho}\|f\|_{\bar{\alpha},q;U(0)} \leqq Ct^{\bar{\alpha}+\rho}\|f\|_{1,q;U(0)}\,.$$

Damit ist dann auch $\mathbf{X}_{1,q;U(0)} \subset \mathbf{X}_{1,q;A(0)}$ bewiesen.

Wir bemerken ferner, daß aus $f \in \mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}$ für $\alpha \geqq 1, 1 \leqq q < \infty$ bzw. $\alpha > 1$, $q = \infty$ die Aussage $A(a)f = 0$ folgt (siehe H. Berens [3, S. 23 u. S. 45]). Damit ist klar, daß für $\alpha \geqq 1$, $1 \leqq q < \infty$ bzw. $\alpha > 1$, $q = \infty$ die Räume $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}$ "triviale" Räume sind, nämlich die Nullräume von $A(a)$. Insgesamt wird dadurch offensichtlich, daß durch Satz 2.4 mit Ausnahme der Werte $\alpha = 0$, $1 \leqq q < \infty$ die interessanten Räume erfaßt sind.

Wir kommen nun zu einer Saturationsaussage für das Approximationsverfahren $\{U(t,a)\,;\ t \to a+\,;\ a \in [0,T)\}$, der zweiten wichtigen Aussage dieses Abschnittes.

SATZ 2.7. *Für $a \in [0,T)$ gilt:*

a) *Aus $\|U(t,a)f - f\| = o(t-a)$, $t \to a+$, folgt $A(a)f = 0$.*

b) *Für ein $f \in \mathbf{X}$ sind die folgenden Aussagen untereinander äquivalent:*

i) $\|U(t,a)f - f\| = O(t-a) \qquad (t \to a+)\,;$

ii) $f \in \widetilde{\mathbf{D}(A(a))}^{\mathbf{X}}$.

BEWEIS. a) Aus der gemachten Voraussetzung folgt, daß $f \in \mathbf{X}_{1,\infty;U(a)}$. Daraus findet man durch sukzessive Anwendung von Satz 2.4, (2.12) und Lemma 2.3 die Abschätzung $\|W(t,0)f\| \leqq Ct^{1+\rho}\|f\|'_{1,\infty;A(0)}$. Also folgt $\|\exp(tA(0))f - f\| = o(t)$ $(t \to 0+)$, d.h. $A(0)f = 0$.

b) Diese Äquivalenz ist eine unmittelbare Folge von Satz 2.4 und Satz 1.4 i), wenn wir in letzterem für $\mathbf{Y}$ den Raum $\mathbf{D}(A(a))$ einsetzen.

BEMERKUNG. Ist $\mathbf{X}$ reflexiv, so ist auch $\mathbf{D}(A(a))$ reflexiv. Mit Hilfe von Satz 1.4 erhalten wir dann, daß $\widetilde{\mathbf{D}(A(a))}^{\mathbf{X}} = \mathbf{D}(A(a))$ ist. Bei reflexivem $\mathbf{X}$ kann also die Saturationsklasse des Approximationsverfahrens $\{U(t,a)\,;\ t \to a+, a \in [0,T)\}$

unmittelbar bestimmt werden, wenn die Schar der Operatoren $A(t)$ gegeben ist.

Zu Satz 2. 7 und der voranstehenden Bemerkung sind noch einige zusätzliche Erläuterungen und Ergänzungen angebracht.

Zunächst folgt aus $A(a)f=0$ natürlich $f=0$. Da wegen der Endlichkeit des Intervalls $[0, T]$ die Bedingung $0 \in \rho(A(a))$ ($\rho(A(a))$ ist Resolventenmenge von $A(a)$) unwesentlich für die Gültigkeit von Satz 1. 1 ist, haben wir die auch im Falle $0 \notin \rho(A(a))$ richtige Form $A(a)f=0$ vorgezogen (siehe Teil II, Abschnitt 5 dieser Arbeit).

Satz 2. 7 besagt in Worten ausgedrückt, daß es Elemente $f \in \mathbf{X}$ gibt und zwar genau die Elemente $f \in \mathbf{X}$, die zu $\widetilde{\mathbf{D}(A(a))}^{\mathbf{X}}$ gehören, für die $U(t, a)$ für $t \to a+$ die Identität von der bestmöglichen Ordnung approximiert. Diese bestmögliche Ordnung ist $O(t\text{-}a)$. Es gibt höchstens noch "triviale" Elemente, die Elemente des Nullraumes von $A(a)$, für die wir eine bessere Approximationsordnung erwarten können. Satz 2. 7 besagt weiter, daß für alle Elemente $f \in \widetilde{\mathbf{D}(A(0))}^{\mathbf{X}}$-und nur für diese die Normableitung der Lösung des homogenen Problems (1. 5) ($F(t)=0$) im Anfangszeitpunkt $t=0$ des Prozesses (in der Norm) beschränkt bleibt. Im zweiten Teil dieser Arbeit interpretieren wir diesen Sachverhalt physikalisch an konkreten Beispielen.

Der Kette von Approximationsverfahren, von denen bekannt ist, daß sie die Saturationseigenschaften besitzen, wird durch Satz 2. 7 ein weiteres Glied hinzugefügt. Als Basis hierfür kann das eingangs zitierte Resultat von P. L. Butzer aus dem Jahre 1956 angesehen werden, wo er erkannte, daß eine bezüglich t auf $[0, \infty)$ stark stetige Halbgruppe $\{\exp(tA); 0 \leqq t < \infty\}$ von Operatoren die Saturationseigenschaft besitzt, und er gleichzeitig für reflexive Räume die Saturationsklasse zu $\mathbf{D}(A)$ bestimmte. Der Saturationssatz von P. L. Butzer wurde dann 1960 von K. de Leeuw [17] auf duale Halbgruppen übertragen. Schließlich erkannte H. Berens [3] im Jahre 1968, indem er Satz 1. 4 benutzte, daß die Saturationsklasse der Halbgruppe $\{\exp(tA); 0 \leqq t < \infty\}$ durch $\widetilde{\mathbf{D}(A)}^{X}$ charakterisiert werden kann. Beachtet man nun, daß, wie eingangs erwähnt, eine holomorphe Halbgruppe eindeutige Lösung des Problems (1. 4) ist, also Greenscher Operator des Problems (1. 5) bei von t unabhängigen "$A(t)$", so erweitert Satz 2. 7 die zitierten Resultate auf den Greenschen Operator des Problems (1. 5) bei von t abhängigem "$A(t)$", der jetzt keine Halbgruppe mehr bildet.

Wir kommen nun zu dem dritten Fragenkreis dieses Abschnitts, der zunächst einmal kurz skizziert sei: Die Charakterisierung der Räume $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}$ durch $\mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}$, d. h. die Relation (2. 3), wird in der Approximationstheorie als "Charakterisierung vom Zamanskyschen Typ" bezeichnet (vergl. H. Berens [2] und J. Peetre [23]). Wir wollen im folgenden zeigen, daß auch unsere allgemeinen Räume $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}$ eine Charakterisierung dieses Typs zulassen. Wir können nämlich, wie zu Beginn dieses

Abschnittes erwähnt, die Relation $\mathbf{X}_{\alpha,q;\,U(a)} \cong \mathbf{X}'_{\alpha,q;U(a)}$ zeigen. Zuvor benötigen wir noch zwei Hilfssätze. Einen Beweis des nun folgenden ersten Hilfssatzes findet man in H. Tanabe [28], wo dieser eine zentrale Rolle beim Beweis von Satz 1. 1 spielt.

LEMMA 2. 8. *Für* $0 \leqq s < t \leqq T$ *gelten die folgenden Aussagen*:

$$A(t)W(t, s) = \int_s^t A(t)[\exp((t-u)A(u)) - \exp((t-u)A(t))]R(u, s)du \tag{2.18}$$
$$+ [\exp((t-s)A(t)) - I]R(t, s) + \int_s^t A(t)\exp((t-u)A(t))[R(u, s) - R(t, s)]du$$

$$\|A(t)(\exp((t-s)A(t) - \exp((t-s)A(s))\| \leqq C(t-s)^{\rho-1}, \tag{2.19}$$

$$\|A(t)W(t, s)\| \leqq C(t-s)^{\rho-1}, \tag{2.20}$$

wobei $0 < \rho \leqq 1$ *ist.*

LEMMA 2. 9. *Es gilt für* $a \in [0, T)$, $a < t \leqq T$ *sowie* $0 < \alpha \leqq 1$ *und* $0 < \rho \leqq 1$

$$(t-a)^{1-\alpha-\rho}\|A(t)W(t, a)f\| \leqq C\|f\|'_{\alpha,\infty;A(a)}.$$

BEWEIS: Wir gehen von (2. 18) aus und schätzen die einzelnen Terme ab. Mit Lemma 2. 3 erhalten wir

$$\|[\exp(tA(t)) - I]R(t, 0)f\| \leqq Ct^{\alpha+\rho-1}\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}. \tag{2.21}$$

Mit (2. 19) und Lemma 2. 3 bekommen wir weiter

$$\left\|\int_0^t A(t)[\exp((t-u)A(t)) - \exp((t-u)A(u))]R(u, 0)f\, du\right\| \tag{2.22}$$
$$\leqq C\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}\int_0^t (t-u)^{\rho-1}u^{\alpha+\rho-1}du = CB(\rho+\alpha, \rho)t^{2\rho+\alpha-1}\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}.$$

Aus der Definition von $R_1(t, s)$ folgt weiter für $0 < u < t \leqq T$

$$R_1(u, 0)f - R_1(u, 0)f$$
$$= [A(t) - A(u)]\exp(tA(0))f + [A(u) - A(0)][\exp(tA(0)f - \exp(uA(0))f].$$

Da der letzte Term hier gleich

$$(A(u)-A(0))A(0)^{-1}\int_u^t A(0)^2\exp\,(vA(0))\,f\,dv$$

$$=(A(u)-A(0))A(0)^{-1}\int_u^t A(0)\exp((v/2)A(0))A(0)\exp((v/2)A(0))\,f\,dv$$

ist, erhalten wir also in $0<u<t\leqq T$

$$\|R_1(t,0)f-R_1(u,0)f\|\leqq C\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}\,[(t-u)^\rho t^{\alpha-1}+u^\rho\int_u^t v^{\alpha-2}dv]\,.$$

Für $0<\alpha<1$ ist aber

$$\int_u^t v^{\alpha-2}dv=C(u^{\alpha-1}-t^{\alpha-1})<Ct^{-1}u^{\alpha-1}(t-u)\,,$$

und für $\alpha=1$ ist $\int_u^t v^{\alpha-2}dv\leqq Cu^{-1}(t-u)$.

Für $0<\alpha<1$ liefert dies

$$\left\|\int_0^t A(t)\exp((t-u)A(t))[R_1(t,0)-R_1(u,0)]f\,du\right\|$$

$$\leqq C\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}\left\{t^{\alpha-1}\int_0^t (t-u)^{\rho-1}du+t^{\rho-1}\int_0^t u^{\alpha-1}du\right\}$$

$$\leqq C\|f\|_{\alpha,\infty;A(0)}\ t^{\alpha+\rho-1}\,.$$

Im Falle $\alpha=1$ steht hier im zweiten Glied der Klammer auf der rechten Seite nur $\int_0^t u^{\rho-1}du$, woraus also dann dieselbe Abschätzung für $\alpha=1$ folgt. Wieder mit Lemma 2. 3 erhalten wir weiter

$$\left\|\int_0^t A(t)\exp((t-u)A(t))\left(\int_u^t R_1(t,v)R(v,0)f\,dv\right)du\right\|$$

$$\leqq C\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}\int_0^t (t-u)^{-1}\left(\int_u^t (t-v)^{\rho-1}v^{\rho+\alpha-1}dv\right)du$$

$$\leqq C\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}\, t^{\alpha}\int_0^t (t-u)^{-1}\left(\int_u^t (t-v)^{\rho-1}v^{\rho-1}dv\right)du$$

$$\leqq CB(\rho,\rho)t^{\alpha-1}\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}\int_0^t (t-u)^{2\rho-1}du = Ct^{\alpha+2\rho-1}\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}.$$

Beachten wir nun (H. Tanabe [28]), daß für $0\leqq s<u<t\leqq T$ die Ungleichung

$$\|R_1(t,s)-R_1(u,s)\|\leqq C\left\{\frac{(t-u)^{\rho}}{t-s}+\frac{(t-u)}{(t-s)(u-s)^{1-\rho}}\right\}$$

sowie die Abschätzungen

$$\int_s^u \frac{(t-u)^{\rho}}{(t-v)\,(v-s)^{1-\rho}}dv\leqq C\frac{(t-u)^{\rho}}{(t-s)^{1-\rho}}\left(\log\frac{t-s}{t-u}+1\right)$$

und

$$\int_s^u \frac{t-u}{(t-v)(u-v)^{1-\rho}\,(v-s)^{1-\rho}}dv$$

$$\leqq C\left\{\frac{t-u}{(t-s)(u-s)^{1-2\rho}}+\frac{(t-u)^{\rho}(u-s)^{\rho}}{t-s}+\frac{(t-u)^{\rho}}{(t-s)^{1-\rho}}\right\}$$

erfüllt sind, so erhalten wir mittels Lemma 2.3

$$\left\|\int_0^t A(t)\exp((t-u)A(t))\int_0^u (R_1(t,v)-R_1(u,v))R(v,0)f\,dv\right\|$$

$$\leqq Ct^{\alpha}\|f\|_{\alpha,\infty;A(0)}\int_0^t (t-u)^{-1}\left\{\int_0^u \frac{(t-u)^{\rho}}{t-v}v^{\rho-1}dv+\int_0^u\frac{(t-u)}{(t-v)(u-v)^{1-\rho}}v^{\rho-1}dv\right\}du$$

$$\leqq Ct^{\alpha}\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}\left\{t^{\rho-1}\int_0^t (t-u)^{\rho-1}\left(\log\frac{t}{t-u}+1\right)+t^{-1}\int_0^t u^{2\rho-1}du\right.$$

$$\left.+\,t^{-1}\int_0^t (t-u)^{\rho-1}u^{\rho}du+t^{\rho-1}\int_0^t (t-u)^{\rho-1}du\right\}$$

$$\leqq Ct^{\alpha+2\rho-1}\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}.$$

Wegen (1.13) liefern die letzten drei Abschätzungen zusammen

$$\left\|\int_0^t A(t)\exp((t-u)A(t))(R(t,0)-R(u,0))f\,du\right\|\leqq Ct^{\alpha+\rho-1}\|f\|'_{\alpha,\infty;A(0)}. \tag{2.23}$$

Aus (2. 21), (2. 22) und (2. 23) ergibt sich nun die Aussage des Lemmas.

Damit sind die Hilfsmittel bereitgestellt, um eine "Charakterisierung vom Zamanskyschen Typ" zu beweisen.

SATZ 2. 10. *Für* $a \in [0, T)$ *und* $0 < \alpha < 1$, $1 \leqq q < \infty$ *bzw.* $0 < \alpha \leqq 1$, $q = \infty$ *gilt*

$$\mathbf{X}_{\alpha, \infty; U(a)} \cong \mathbf{X}'_{\alpha, q; U(a)} .$$

BEWEIS. Es sei $f \in \mathbf{X}_{\alpha, q; U(0)}$. Wegen Lemma 2. 9, (2. 12) und Satz 2. 4 erhalten wir

$$\|A(t)W(t, 0)f\| \leqq Ct^{\alpha+\rho-1}\|f\|'_{\alpha, \infty; A(0)} \leqq Ct^{\alpha+\rho-1}\|f\|_{\alpha, q; U(0)} .$$

Beachten wir weiter die Abschätzung

$$\|A(t)U(t, 0)f\| \leqq C\|A(0)\exp(tA(0))f\| + \|A(t)W(t, 0)f\|,$$

so bekommen wir unter Verwendung von Formel (2. 3) und Satz 2. 4 die Inklusion

$$\mathbf{X}_{\alpha, q; U(0)} \subset \mathbf{X}'_{\alpha, q; U(0)} . \tag{2. 24}$$

Sei nun umgekehrt $f \in \mathbf{X}'_{\alpha, q; U(0)}$. Wegen (2. 20) gilt für alle $f \in \mathbf{X}$

$$\|A(0)\exp(tA(0))f\| \leqq C(t^{\rho-1}\|f\| + \|A(t)U(t, 0)f\|) . \tag{2. 25}$$

Ist nun $\alpha < \rho/2$, so ergibt sich hieraus sofort $f \in \mathbf{X}'_{\alpha, q; A(0)}$, woraus mit (2. 3) und Satz 2. 4 unmittelbar $f \in \mathbf{X}_{\alpha, q; U(0)}$ folgt. Ist aber $\alpha \geqq \rho/2$, so läßt sich eine ganze nicht negative Zahl n_0 angeben, so daß die Ungleichung (2. 15) erfüllt ist. Die weitere Schlußweise verläuft nun ganz analog wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 2. 4, so daß wir die Inklusion

$$\mathbf{X}_{\alpha, q; U(0)} \subset \mathbf{X}_{\alpha, q; U(0)} \tag{2. 26}$$

erhalten. (2.24) und (2.26) zusammen ergeben die Behauptung.

Von Interesse ist nun noch die Frage, welche Beziehungen zwischen den Räumen $\mathbf{X}_{\alpha, q; U(a)}$ (bzw. $\mathbf{X}_{\alpha, q; U(a)}$) für verschiedene $q (1 \leqq q \leqq \infty)$ und für verschiedene $a (a \in [0, T))$ bestehen. Bei konstantem $a \in [0, T)$ haben wir den folgenden Satz.

SATZ 2. 11. *Für* $\beta \geqq \alpha > 0$, $1 \leqq p \leqq q \leqq \infty$ *und* $a \in [0, T)$ *gilt*

i) $\mathbf{X}_{\beta,p;U(a)} \subset \mathbf{X}_{\alpha;q,U(a)}$,

ii) $\mathbf{X}'_{\beta,p;U(a)} \subset \mathbf{X}'_{\alpha,q;U(a)}$.

BEWEIS. Der Beweis der ersten Inklusion ergibt sich aus Satz 2.4 und dem folgenden auf J. L. Lions-J. Peetre [19] zurückgehenden Theorem: Für $\beta \geqq \alpha > 0$, $1 \leqq p \leqq q \leqq \infty$ gilt $\mathbf{X}_{\beta,p;A(a)} \subset \mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)}$. Wegen Satz 2.10 ist damit auch die zweite Aussage evident.

Es läßt sich weiter zeigen, daß für verschiedene $a \in [0, T)$ die Räume $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}$ gleich sind. Wir geben diesen Sachverhalt in einer Form an, die die zentralen Sätze 2.4 und 2.10 als Spezialfälle enthält.

SATZ 2.12. *Für beliebige* $a, b, c, d \in [0, T)$ *und* $0 < \alpha < 1$, $1 \leqq q < \infty$ *bzw.* $0 < \alpha \leqq 1$, $q = \infty$ *gilt*

$$\mathbf{X}_{\alpha,q;A(a)} \cong \mathbf{X}_{\alpha,q;U(b)} \cong \mathbf{X}'_{\alpha,q;U(c)} \cong \mathbf{X}'_{\alpha,q;A(d)} .$$

BEWEIS. Wir benutzen das folgende von P. L. Butzer-W. Köhnen [8] bewiesene Theorem: Sind A_1 und A_2 Erzeuger von bezüglich $t \in [0, \infty)$ stark stetigen Halbgruppen von Operatoren $\{\exp(tA_1); 0 \leqq t < \infty\}$ bzw. $\{\exp(tA_2); 0 \leqq t < \infty\}$ und gilt $\mathbf{D}(A_1) \subset \mathbf{D}(A_2)$, so folgt für die oben angegebenen Werte von α und q, daß $\mathbf{X}_{\alpha,q;A_1} \subset \mathbf{X}_{\alpha,q;A_2}$ gilt. Da in unserem Falle $\mathbf{D}(A(t))$ unabhängig von t ist, ergibt sich damit zunächst $\mathbf{X}_{\alpha,q\,A(a)} \cong \mathbf{X}_{\alpha,q;A(b)}$ für beliebige $a, b \in [0, T)$. Zusammen mit (2.3), Satz 2.4 und Satz 2.10 erhalten wir damit die Aussage unseres Satzes.

3. Approximationssätze für die Operatoren $V(t, s)$. In diesem Abschnitt untersuchen wir nun das Approximationsverhalten der Operatoren $V(t, s)$ aus Satz 1.3, und zeigen, aufbauend auf den bisher erzielten, Resultaten, daß es im wesentlichen auch auf das der Halbgruppen $\{\exp(tA(a)); 0 \leqq t < \infty\}$; $a \in [0, T)$ zurückgeführt werden kann. Analog zu (2.4) betrachten wir für $a \in [0, T)$, $-\infty < \alpha < \infty$, zunächst die folgenden Teilmengen von $\mathbf{X}$.

$$(3.1) \quad \mathbf{X}_{\alpha,q;V(a)} = \begin{cases} \left\{f : f \in \mathbf{X}, \int_a^T ((t-a)^{-\alpha} \|V(t, a)f - f\|^q dt/(t-a) < \infty \right\} (1 \leqq q < \infty) \\ \{f : f \in \mathbf{X}, \sup_{a < t \leqq T} ((t-a)^{-\alpha} \|V(t, a)f - f\|) < \infty \quad (q = \infty) . \end{cases}$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, daß die Mengen (3.1), mit den entsprechenden Normen versehen, intermediäre Räume von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{D}(A(a) + B(a)) = \mathbf{D}(A(a))$ sind, daß im Falle $0 < \alpha < 1$, $1 \leqq q < \infty$ bzw. $0 < \alpha \leqq 1$, $q = \infty$ für beliebige $a, b \in [0, T)$ die Aquivalenz $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)} \cong \mathbf{X}_{\alpha,q;V(b)}$ erfüllt ist und daß bei reflexivem $\mathbf{X}$ das

Approximationsverfahren $\{V(t,a), t \to a+, a \in [0,T)\}$ die Saturationseigenschaft besitzt. Wie im vorangegangenen Abschnitt beweisen wir alle Aussagen wieder nur für den Fall $a=0$. Wir benötigen zunächst einige Hilfssätze, in denen die Operatoren $A(t)$ und $B(t)$, $0 \leqq t \leqq T$, die Voraussetzungen von Satz 1.3 erfüllen mögen.

LEMMA 3.1. *Es sei* $0<\delta'<1$, *und* $B(t)(-A(t))^{-\delta'}$ *gehöre zu* $\mathfrak{E}(\mathbf{X})$ *für alle* $t \in [0,T]$ *und sei stark stetig auf* $[0,T]$, *dann folgt*:

i) $B(t)A(t)^{-1}$ *ist stark stetig auf* $[0,T]$;

ii) $\|B(t)\exp(\tau A(s)\| \leqq C\tau^{-\delta}$ *für alle* $s, t \in [0,T]$, $0<\tau<\infty$ *und* $\delta > \delta$;

iii) *der Operator* $A(t)+B(t)$ *mit* $\mathbf{D}(A(t)+B(t))=\mathbf{D}(A(t))$ *ist für* $t \in [0,T]$ *Erzeuger einer bzgl.* $\tau \in [0,\infty)$ *stark stetigen Halbgruppe* $\{\exp(\tau(A(t)+B(t))$; $0 \leqq \tau < \infty\}$ *von Operatoren.*

BEWEIS. Wir haben zunächst für $t, s \in [0,T]$

$$((-A(t))^{\delta'} - (-A(s))^{\delta'})A(0)^{-1}$$
$$= (-A(t))^{\delta'-1}(A(s)-A(t))A(0)^{-1} + ((-A(s))^{\delta'-1} - (-A(t))^{\delta'-1})A(s)A(0)^{-1}.$$

Beachten wir die Formel

$$\|\exp(\tau A(t)) - \exp(\tau A(s))\| \leqq Ce^{-\eta\tau}|t-s|^{\rho} \quad (s, t \in [0,T], \tau \geqq 0)$$

(siehe P. E. Sobolevskij [24]), so erhalten wir

$$\|(-A(s))^{\delta'-1} - (-A(t))^{\delta'-1}\|$$
$$\leqq [\Gamma(1-\delta')]^{-1}\int_0^\infty \|\exp(\tau A(s)) - \exp(\tau A(t)\|\tau^{-\delta'}d\tau \leqq C|t-s|^{\rho}$$

und folglich $\|((-A(t))^{\delta'}-(-A(s))^{\delta})A(0)^{-1}\| \leqq C|t-s|^{\rho}$. Die evidente Relation

$$B(t)A(t)^{-1} = B(t)(-A(t))^{-\delta'}(-A(t))^{\delta'}A(0)^{-1}A(0)A(t)^{-1}$$

liefert damit sofort Aussage i). Beachten wir die folgenden beiden Relationen (siehe P. E. Sobolevskij [24])

$$\|(-A(t))^{\beta}\exp(\tau A(t))\| \leqq C(\beta)e^{-\delta\tau}\tau^{-\beta} \quad (\beta \geqq 0;\ t \in [0,T];\ \tau > 0)$$

und

$$\|(-A(t))^{\alpha}(-A(s))^{-\beta}\| \leqq C(\alpha,\beta) \quad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1;\ s, t \in [0,T]),$$

so bekommen wir weiter

$$\begin{aligned}&\|B(t)\exp(\tau A(s))\|\\&\quad=\|B(t)(-A(t))^{-\delta'}(-A(t))^{\delta'}(-A(s))^{-\delta}(-A(s))^{\delta}\exp(\tau A(s))\|\\&\quad\leqq C\|(-A(s))^{\delta}\exp(\tau A(s))\|C\leqq\tau^{-\delta}.\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich nach einem bekannten Störungssatz für Halbgruppen von Operatoren von R. S. Phillips (siehe E. Hille-R. S. Phillips [12, S. 400]) aus i) und ii) die Aussage iii).

LEMMA 3.2. *Es gilt für* $0\leqq a<t\leqq T$

$$V(t,a)-U(t,a)=\int_a^t V(t,s)B(s)U(s,a)ds\,.$$

BEWEIS. Für $a<s<t\leqq T$ haben wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(V(t,s)U(s,a))&=V(t,s)A(s)U(s,a)-V(t,s)(A(s)+B(s))U(s,a)\\&=-V(t,s)B(s)U(s,a)\,.\end{aligned}$$

Nun ist aber $V(t,s)B(s)U(s,a)$ stark stetig bezüglich s in $a<s<t$, wie man aus der Relation

$$V(t,s)B(s)U(s,a)=V(t,s)B(s)A(s)^{-1}A(s)U(s,a)$$

zusammen mit Lemma 3. 1 findet. Also erhalten wir durch Integration die Aussage unseres Lemmas.

Nun können wir einen zu Lemma 2. 1 und Lemma 2. 2 analogen Satz beweisen. Wir erhalten

SATZ 3. 3. *Für* $a\in[0,T)$ *sind unter der Norm*

$$\|f\|_{\alpha,q;V(a)}=\|f\|+\left\{\int_a^T((t-a)^{-\alpha}\|V(t,a)f-f\|)^q dt/(t-a)\right\}^{1/q}$$

($q=\infty$ *entsprechend*) *für* $-\infty<\alpha<\infty$, $1\leqq q\leqq\infty$ *die Räume* $\mathbf{X}_{\alpha,q;V(a)}$ *Banachräume und für* $0\leqq\alpha<1$, $1\leqq q<\infty$ *bzw.* $0\leqq\alpha\leqq1$, $q=\infty$ *gilt*

$$\mathbf{D}(A(a)+B(a)) \subset \mathbf{X}_{\alpha,q;V(a)} \subset \mathbf{X}\,.$$

BEWEIS. Der Beweis der Banachraumeigenschaft läuft genauso wie in Lemma 2. 1. Die Einbettungsrelation vergleichen wir mit Lemma 2. 2. Wegen Lemma 3. 1 i) ist für $f \in D(A(0)) = D(A(0)+B(0))$

$$V(t,s)(A(s)+B(s))f = V(t,s)(A(s)A(0)^{-1} + B(s)A(0)^{-1})A(0)f$$

stetig in der Norm von $\mathbf{X}$ bezüglich $s \in [0,t]$. Damit ergibt sich

$$V(t,0)f - f = \int_0^t V(t,s)(A(s)A(0)^{-1} + B(s)A(0)^{-1})A(0)f\,ds,$$

woraus $\|V(t,0)f - f\| \leqq Ct\|A(0)f\|$ folgt. Da $A(0)+B(0)$ abgeschlossen ist (Lemma 3. 1 iii)), erhalten wir mit Hilfe des Graphensatzes die Äquivalenz

$$\mathbf{D}(\mathrm{A}(0)) \cong \mathbf{D}(A(0)+B(0)) \tag{3. 2}$$

(siehe T. Kato [15, S. 191]). Folglich ist $\|V(t,0)f - f\| \leqq Ct\|f\|_{D(A(0)+B(0))}$ Hieraus ergibt sich nun genauso wie in Lemma 2. 2 die Aussage unseres Satzes.

Der vorangegangene Beweis läßt im übrigen erkennen, daß auch die Einbettungsrelation

$$\mathbf{D}(A(a)) \subset \mathbf{X}_{\alpha,q;V(a)} \subset \mathbf{X} \tag{3. 3}$$

gültig ist. Um nun die wichtigste Aussage dieses Abschnittes: $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)} \cong \mathbf{X}_{\alpha,q;V(a)}$ $(0<\alpha<1,\ 1\leqq q<\infty$ bzw. $0<\alpha\leqq 1,\ q=\infty\,;\ a\in[0,T))$ zeigen zu können, benötigen wir noch zwei Hilfssätze. Einen Beweis des ersten findet man z. B. in G. H. Hardy-J. E. Littlewood-G. Polya [11].

LEMMA 3. 4. *Es sei* $\alpha>0$, $1\leqq q<\infty$. *Wenn* $h(t)$ *eine nicht negative bezüglich des Maßes* dt/t *meßbare Funktion auf* $(0,\infty)$ *ist, dann gilt*

$$\left\{\int_0^\infty \left(t^{-\alpha}\int_0^t h(u)du/u\right)^q dt/t\right\}^{1/q} \leqq \frac{1}{\alpha}\left\{\int_0^\infty (t^{-\alpha}h(t))^q dt/t\right\}^{1/q}.$$

LEMMA 3. 5. *Gilt* $\|B(t)\exp(\tau A(a))\| \leqq C\tau^{-\delta}$ *für alle* $a, t \in [0,T]$, *alle* $\tau>0$ *und ein festes* $\delta\in[0,1]$, *so folgt aus* $f\in X_{\alpha,\infty;A(a)}(0\leqq\alpha\leqq 1)$ *für* $t\to 0+$

$$\|B(t)\exp(tA(a))f\| = \mathrm{O}\,(t^{\alpha-\delta}),\ \text{falls}\ \delta>\alpha\,;$$

$$\|B(t)\exp(tA(a))f\| = \mathrm{O}(\log(1/t)), \quad \textit{falls } \delta = \alpha;$$

$$\|B(t)\exp(tA(a))f\| = \mathrm{O}(1), \quad \textit{falls } \delta < \alpha.$$

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist für alle $t \in (0, T]$ $\|\exp(tA(0)f - f\| \leqq t^\alpha \|f\|_{\alpha,\infty;A(0)}$. Wir wählen eine natürliche Zahl m_0, so daß $t_{m_0} = 1/2^{m_0} \leqq T$ ist, und setzen für alle natürlichen Zahlen $m > m_0$: $t_m = 1/2^m$. Nun schreiben wir

$$\begin{aligned}\|B(t)\exp(tA(0))f\| \leqq &\|B(t)\exp(t_{m_0}A(0))f\| \\ &+ \|B(t)(\exp(t_mA(0)) - \exp(t_{m_0}A(0)))f\| \\ &+ \|B(t)(\exp(tA(0)) - \exp(t_mA(0)))f\|\end{aligned}$$

und schätzen die beiden letzten Terme auf der rechten Seite ab. Es ist

$$\begin{aligned}&B(t)(\exp(t_mA(0)) - \exp(t_{m_0}A(0)))f \\ &= \sum_{k=m_0+1}^{m} (B(t)(\exp(t_kA(0)) - \exp(t_{k-1}A(0)))f) \\ &= \sum_{k=m_0+1}^{m} (B(t)\exp(t_kA(0))(f - \exp(t_{k-1}A(0))f) \\ &\quad - B(t)\exp(t_{k-1}A(0))(f - \exp(t_kA(0))f)),\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}&\|B(t)(\exp(t_mA(0)) - \exp(t_{m_0}A(0)))f\| \\ &\leqq C\|f\|_{\alpha,\infty;A(0)} \sum_{k=m_0+1}^{m} \left\{ \frac{2^{k\delta}}{2^{(k-1)\alpha}} + \frac{2^{(k-1)\delta}}{2^{k\alpha}} \right\} \\ &< C\|f\|_{\alpha,\infty;A(0)}(2^\delta + 1) \sum_{k=m_0+1}^{m} 2^{(k-1)(\delta-\alpha)}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Wählen wir nun t mit $t_m < t \leqq t_{m-1}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=m_0+1}^{m} 2^{(k-1)(\delta-\alpha)} &= 2 \sum_{k=m_0+1}^{m} \frac{2^{k-2}}{2^{(k-1)(1-\delta+\alpha)}} \\ &\leqq 2\int_{2^{m_0-1}}^{2^{m-1}} \tau^{-(1-\delta+\alpha)}d\tau \leqq 2\int_{2^{m_0-1}}^{1/t} \tau^{-(1-\delta+\alpha)}d\tau\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$= \begin{cases} (2/(\delta-\alpha))(t^{\alpha-\delta}-2^{(m_0-1)(\delta-\alpha)}) & (\delta \neq \alpha) \\ 2(\log(1/t)-\log 2^{m_0-1}) & (\delta=\alpha)\,. \end{cases}$$

Weiter ergibt sich für $t_m < t \leqq t_{m-1}$

$$\begin{aligned} (3.6)\qquad & \|B(t)(\exp(tA(0))-\exp(t_mA(0)))f\| \\ & \leqq \|B(t)\exp(tA(0))\|\,\|\exp(t_mA(0))f-f\| \\ & \quad + \|B(t)\exp(t_mA(0))\|\,\|\exp(tA(0))f-f\| \\ & \leqq C\|f\|_{\alpha,\infty;A(0)}(t^{-\delta}2^{-m\alpha}+2^{m\delta}t^{\alpha}) \leqq C\|f\|_{\alpha,\infty;A(0)}t^{\alpha-\delta}(1+2^{\delta})\,. \end{aligned}$$

(3.4), (3.5) und (3.6) zusammen liefern nun die Aussage des Hilfssatzes.

Dieser letzte Hilfssatz verallgemeinert einen Satz von H. Berens [2], welcher sich aus unserem für $B(t)=A(a)$ für alle $t\in[0,T]$ und $\delta=1$ ergibt. Die Beweismethode geht auf S. N. Bernstein zurück.

Jetzt können wir den ersten wichtigen Satz dieses Abschnitts zeigen, durch den im wesentlichen das Approximationsverhalten der Operatoren $V(t,s)$ auf das der Operatoren $U(t,s)$ des vorangegangenen Abschnitts reduziert wird.

SATZ 3.6. *Für* $0<\alpha<1$, $1\leqq q<\infty$ *bzw.* $0<\alpha\leqq 1$, $q=\infty$ *und* $a\in[0,T)$ *gilt*

$$\mathbf{X}_{\alpha,q;V(a)} \cong \mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}\,.$$

BEWEIS. Wegen Lemma 3.2 und Lemma 3.1 ist

$$\|V(t,0)f-f\| \leqq \|U(t,0)f-f\| + C\int_0^t \|A(v)U(v,0)f\|dv\,,$$

hieraus folgt mit Lemma 3.4 und Satz 2.11

$$\|f\|_{\alpha,q;V(0)} \leqq \|f\|_{\alpha,q;U(0)} + C\|f\|'_{\alpha,q;U(0)} \leqq C\|f\|_{\alpha,q;U(0)}\,.$$

Also erhalten wir

$$(3.7)\qquad \mathbf{X}_{\alpha,q;U(0)} \subset \mathbf{X}_{\alpha,q;V(0)}\,.$$

Bei der Umkehrung betrachten wir nun zunächst die Fälle $\alpha<1$, $1\leqq q\leqq\infty$. Zu vorgegebenem α wählen wir δ mit $\alpha<\delta<1$. Es folgt für alle $f\in\mathbf{X}$ wegen (2.20)

$$\int_0^t \|B(v)U(v,0)f\|dv \leqq \int_0^t \|B(v)\exp(vA(0))f\|dv + C\int_0^t \|A(v)W(v,0)f\|dv$$

$$\leqq C(t^{1-\delta}+t^\rho)\|f\| \leqq Ct^\chi\|f\|$$

mit $x=\min(1-\delta,\rho)$. Lemma 3.2 liefert damit für alle $f\in \mathbf{X}$

$$\|U(t,0)f-f\| \leqq \|V(t,0)f-f\| + Ct^\chi\|f\|. \tag{3.8}$$

Ist nun $\alpha<\chi/2$, so ergibt sich aus (3.8) unmittelbar $f\in \mathbf{X}_{\alpha,q;U(0)}$. Ist aber $\alpha\geqq\chi/2$, so läßt sich eine ganze nicht negative Zahl n_0 finden, so daß die Ungleichung (2.15), mit ρ ersetzt durch x, erfüllt ist. Damit erhalten wir aus $f\in \mathbf{X}_{\alpha,q;V(0)}$ zunächst $f\in \mathbf{X}_{n_0x+x/(n_0+2),q;V(0)}$, woraus trivialerweise $f\in X_{\chi/2,q;V(0)}$ folgt. Das letztere impliziert wegen (3.8) und Satz 2.4 $f\in \mathbf{X}_{\chi/2,q;A(0)}$. Hieraus folgt mit (2.12) und Lemma 3.5

$$\|B(t)\exp(tA(0))f\| = \mathrm{O}(t^{\chi/2-\delta}) \quad (t\to 0+)$$

und mit (2.12) sowie Lemma 2.9

$$\|A(t)W(t,0)f\| \leqq t^{-1+\chi/2+\rho}\|f\|'_{\chi/2,\infty;A(0)}.$$

Also bekommen wir für alle $t\in(0,T]$ und alle $f\in \mathbf{X}_{\alpha,q;V(0)}$

$$\|U(t,0)f-f\| \leqq \|V(t,0)f-f\| + C(f)(t^{(1-\delta)+\chi/2}+t^{\chi/2+\rho}), \tag{3.9}$$

woraus wir $f\in \mathbf{X}_{\chi+\chi/3,q;U(0)}$ entnehmen. Nun ist klar, wie wir, analog wie im Beweis von Satz 2.4, fortzufahren baben, so daß wir

$$\mathbf{X}_{\alpha,q;V(0)} \subset \mathbf{X}_{\alpha,q;U(0)} \quad (\alpha<1) \tag{3.10}$$

erhalten. Es bleibt noch der Fall $\alpha=1$, $q=\infty$. Ist $f\in \mathbf{X}_{1,\infty;V(0)}$, so folgt $f\in \mathbf{X}_{\bar\alpha,\infty;V(0)}$ mit $\delta<\bar\alpha<1$ und $\bar\alpha+\rho>1$. Damit ergibt sich aber für diese Elemente f wegen Lemma 2.9 und Lemma 3.5

$$\|B(t)\exp(tA(0))f\| + \|A(t)W(t,0)f\| = O(1) \quad (t\to 0+).$$

Folglich erhalten wir wegen Lemma 2.10 $f\in \mathbf{X}_{1,\infty;U(0)}$, was dann zusammen mit (3.7) und (3.10) unseren Beweis vervollständigt.

Die Kombination der Sätze 3.6 und 2.12 liefert schließlich:

SATZ 3.7. *Für beliebige* $a,b\in[0,T)$ *und* $0<\alpha<1$, $1\leqq q<\infty$ *bzw.* $0<\alpha\leqq 1$, $q=\infty$ *gilt*

$$\mathbf{X}_{\alpha,q;V(a)} \cong \mathbf{X}_{\alpha,q;A(b)}.$$

(*Insbesondere gilt diese Äquivalenz für* $a=b$).

Mit diesem Satz haben wir also das Approximationsverhalten der Operatoren $V(t, s)$ auf das der, ursprünglich in Satz 1. 1 gegebenen, Schar von Halbgruppenoperatoren $\{\exp(tA(a))\,;\, 0\leqq t<\infty\}$, $a\in[0, T)$ zurückgeführt. Damit ist übrigens auch sofort klar, daß Satz 2. 11 i) gültig bleibt, wenn wir dort den Index $U(a)$ durch $V(a)$ ersetzen.

Es bleibt nun noch die Frage nach der Charakterisierung der Räume $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}$ für die Werte von α und q, die durch Satz 3. 6 bzw. Satz 3. 7 noch nicht erfaßt sind, sowic die Frage nach der Saturationseigenschaft des Approximationsverfahrens $\{V(t, a),\ t\to a+\ ;\ a\in[0, T)\}$ zu beantworten.

Entsprechend (3. 8) gilt für alle $f\in\mathbf{X}$

$$\|V(t, 0)f-f\|\leqq\|U(t, 0)f-f\|+Ct^{\chi}\|f\|,$$

woraus $\mathbf{X}_{0,q;V(a)}\cong\mathbf{X}_{0,q;U(a)}\cong\mathbf{X}_{0,q;A(a)}$, $(1\leqq q<\infty)$, folgt (die letzte Äquivalenz wegen (2. 14)). Für $\alpha<0$, $1\leqq q<\infty$ bzw. $\alpha\leqq 0$, $q=\infty$ ist offensichtlich $\mathbf{X}_{\alpha,q;V(a)}\cong\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}\cong\mathbf{X}$.

Im allgemeinen sind aber nun für $\alpha\geqq 1$, $1\leqq q<\infty$ bzw. $\alpha>1$, $q=\infty$ die Räume $\mathbf{X}_{\alpha,q;V(a)}$ und $\mathbf{X}_{\alpha,q;U(a)}$ nicht äquivalent. Dies sieht man wie folgt ein: Wählt man speziell $A(t)=A$ und $B(t)=B$, (A, B unabhängig von t), so erzeugt neben A auch $A+B$ eine bzgl. $t\in[0,\infty)$ stark stetige Halbgruppe von Operatoren (vgl. Lemma 3. 1 iii)). Ist $\alpha>1$ fest gewählt, so sind die Aussagen $\|\exp(tA)f-f\|=O(t^{\alpha})(t\to 0+)$ und $Af=0$ bzw. $\|\exp(t(A+B))f-f\|=O(t^{\alpha})(t\to 0+)$ und $(A+B)f=0$ äquivalent. Es lassen sich aber leicht Beispiele finden, bei denen aus $Af=0$ nicht$(A+B)f=0$ und aus $(A+B)f=0$ nicht $Af=0$ folgt (siehe Abschnitt 6). Es ist damit auch klar, daß die Aussagen $\|V(t, a)f-f\|=o(t-a)$, $(t\to a+)$ und $\|U(t, a)f-f\|=o(t-a)$, $(t\to a+)$ für ein $f\in X$ im allgemeinen nicht untereinander äquivalent sind.

Die letzte Bemerkung rückt die Saturationsfrage für das Approximationsverfahren $\{V(t, a),\ t\to a+\ ;\ a\in[0, T)\}$ in ein interessantes Licht, da wir diese nun nicht auf die für das Approximationsverfahren $\{U(t, a),\ t\to a+\ ;\ a\in[0, T)\}$ ohne weiteres abwälzen können. Der folgende Satz zeigt, daß wir bei reflexivem $\mathbf{X}$ die Frage positiv beantworten können.

SATZ 3. 8. *Ist* $\mathbf{X}$ *reflexiv und* $a\in[0, T)$, *so gilt*:

a) *Aus* $\|V(t, a)f-f\|=o(t-a)$ $(t\to a+)$ *folgt* $(A(a)+B(a))f=0$.

b) *Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent*:

$$i)\quad \|V(t, a)f-f\|=O(t-a)\quad (t\to a+)\,;$$

$$ii)\quad f\in\mathbf{D}(A(a)+B(a))=\mathbf{D}(A(a)).$$

BEWEIS. a) Aus $\|V(t,0)f-f\|=o(t)$ $(t\to 0+)$ folgt mit Satz 3.7 und Satz 2.4 $f\in(\mathbf{X},\mathbf{D}(A(0)))_{1,\infty;K}$. Weil $\mathbf{X}$ reflexiv ist, ergibt sich daraus mit Satz 1.4 $f\in\mathbf{D}(A(0))$. Dies letztere liefert dann

$$\lim_{t\to 0+}\left\|(1/t)\int_0^t V(t,v)B(v)\exp(v\mathrm{A}(0))f dv-B(0)f\right\|=0\,,$$

wie die Gleichung

$$\begin{aligned}&(1/t)\int_0^t V(t,v)B(v)\exp(vA(0))f\,dv-B(0)f\\&=(1/t)\int_0^t V(t,v)(B(v)A(0)^{-1}\exp(vA(0))A(0)f-B(0)f)dv\\&\quad+(1/t)\int_0^t (V(t,v)-I)B(0)f\,dv\end{aligned}$$

zusammen mit Lemma 3.1 lehrt. Also erhalten wir auf Grund von Lemma 3.2 und Lemma 2.9

$$\lim_{t\to 0+}\|(U(t,0)f-f)/t+B(0)f\|=0$$

und auf Grund von Lemma 2.3

$$\lim_{t\to 0+}\|(U(t,0)f-f)/t-A(0)f\|=0\,,$$

woraus $(A(0)+B(0))f=0$ folgt. b) Diese Aussage ist eine direkte Konsequenz aus Satz 3.6, Satz 2.4 und Satz 1.4.

BEMERKUNG. Aus (3.2) folgt $\widetilde{\mathbf{D}((A(a)+B(a))}^{\mathbf{X}}=\widetilde{\mathbf{D}(A(a))}^{\mathbf{X}}$. Mithin gilt Aussage b) von Satz 3.8 auch bei nichtreflexivem $\mathbf{X}$, wenn wir dort $\mathbf{D}(A(a))$ durch $\widetilde{\mathbf{D}(A(a))}^{\mathbf{X}}$ bzw. $\mathbf{D}(A(a)+B(a))$ durch $\widetilde{\mathbf{D}(A(a)+B(a))}^{\mathbf{X}}$ ersetzen.

Zum Schluß dieses Abschnitts sei darauf hingewiesen, daß für $0<\alpha<1$, $1\leqq q<\infty$ bzw. $0<\alpha\leqq 1$, $q=\infty$ auf $\mathbf{X}_{\alpha,q;V(a)}$ $(a\in[0,T))$ auch eine Norm eingeführt werden kann, die analog zu der Norm in Satz 2.5 gebildet ist und die der bisher auf $\mathbf{X}_{\alpha,q;V(a)}$ betrachteten Norm äquivalent ist. Ferner sei erwähnt, daß auch für das Approximationsverfahren $\{V(t,a),\ t\to a+\ ;\ a\in[0,T)\}$ "Charakterisierungen vom Zamanskyschen Typ" möglich sind.

Wir haben nun die Aufgabe, mit den bisher erzielten Resultaten das Approximationsverhalten der Lösungen der Differentialgleichung (1.5) in Abhängigkeit vom

Anfangswert f für den inhomogenen Fall $F \neq 0$ zu studieren sowie die dann erhaltenen Resultate auf konkrete Differentialgleichungsprobleme anzuwenden. Dies soll im zweiten Teil dieser Arbeit geschehen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] N. ARONSZAJN-E. GAGLIARDO, Interpolation spaces and interpolation methods, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 68(1965), 51–118.

[2] H. BERENS, Approximationssätze für Halbgruppenoperatoren in intermediären Räumen, Schr. Math. Inst. Univ. Münster, 32(1964), 59 S. (Dissertation, Aachen).

[3] H. BERENS, Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen. auf Banachräumen. Lecture Notes in Mathematics, no 64, Springer, Berlin 1968, 90 S.

[4] P. L. BUTZER, Sur la theorie des demi-groupes et classes de saturation de certaines integrales singulières, C. R. Acad. Sci. Paris, 243(1956), 1473–1475.

[5] P. L. BUTZER, Über den Grad der Approximation des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale, Math. Ann., 133(1957), 410–425.

[6] P. L. BUTZER, Zur Frage der Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren, Math. Z, 70(1958), 93–112.

[7] P. L. BUTZER-H. BERENS, Semi-groups of operators and approximation, Grundl. d. math. Wiss., Bd. 145 Springer, Berlin 1967, xi+318 pp.

]8] P. L. BUTZER-W. KÖHNEN, Approximation invariance of semi-group operators under perturbation, J. Approx. Theory, 2(1969), 389–393,

[9] R. W. CARROLL, Abstract methods in partial differential equations, Harper a. Row, New York 1969, ix+374 pp.

[10] E. GAGLIARDO, A unified structure in various families of function spaces. Compactness and closure theorems. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem 1960, S. 237–241, New York 1961.

[11] G. H. HARDY-J. E. LITTLEWOOD-G. POLYA, Inequalities, Combridge, Cambridge University Press 1934, xii+314 pp.

[12] E. HILLE-R. S. PHILLIPS, Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 31, Providence, R. I. 1957. xii+808 pp.

[13] T. KATO, Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces, Nagoya Math. J., 19(1961), 93–125.

[14] T. KATO, Semi-groups and temporally inhomogeneous evolution equations. Equazioni differenziali astratte. Centro Internazionale matematico estivo, Varenna 1963, 40 Seiten, Roma, Edizioni Cremonese.

[15] T. KATO, Perturbation theory for linear operators, Grundl. d. math. Wiss., Bd. 132, Springer, Berlin 1966, xix+592 pp.

[16] S. G. KREJN, Lineare Differentialgleichungen im Banachraum (russisch), Izd. "Nauka", Moskau 1967, 464 S.

[17] K. de LEEUW, On the adjoint semi-group and some problems in the theory of approximation, Math. Z., 73(1960), 219–234.

[18] J. L. LIONS, Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites, Grundl. d. math. Wiss., Bd. 111. Springer, Berlin 1961, ix+292 pp.

[19] J. L. LIONS, -J. PEETRE, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19(1964), 5–68.

[20] J. LÖFSTRÖM, Some theorems on interpolation spaces with applications to approximation in L_p, Math. Ann., 172(1967), 176–196.

[21] V. V. NEMYTSKII-M. M. VAINBERG-R. S. CUSAROVA, Operational differential equation, Progress in Mathematics, Vol. 1, S. 170–230, Plenum Press, New York 1968 (Übersetzung aus dem Russischen).

[22] J. PEETRE, A theory of interpolation of normed spaces, Notes Universidade de Brasilia, 1963, 88 S.
[23] J. PEETRE, On an equivalence theorem of Taibleson (unveroffentlichtes Manuskript), Lund 1964.
[24] P. E. SOBOLEVSKIJ, Über Differentialgleichungen vom parabolischen Typ im Banachraum (russisch), Trudy Moskov. Mat. Obsc., 10(1961), 297–350.
[25] M. Z. SOLOMJAK, Die Anwendung der Halbgruppentheorie auf das Studium von Differentialgleichungen in Banachräumen (russisch), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 122(1958), 766–769.
[26] H. TANABE, A class of the equations of evolution in a Banach space, Osaka Math. J., 11(1959), 121–145.
[27] H. TANABE, Remarks on the equations of evolution in a Banach space, Osaka Math. J., 12(1960), 145–166.
[28] H. TANABE, On the equations of evolution in a Banach space, Osaka Math. J., 12(1960), 363–376.
[29] U. WESTPHAL, Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren. Teil I: Halbgruppenerzeuger; Teil II : Gruppenerezuger, Compositio Math. (im Druck).
[30] K. YOSIDA, Functional analysis, 2, Aufl. Grundl. d. math. Wiss., Bd. 123 Springer, Berlin 1968, xi+465 pp.

LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
TECHNOLOGICAL UNIVERSITY OF AACHEN
AACHEN, WEST GERMANY