Tôhoku Math. Journ.
23(1971), 67-95.

SUR QUELQUES COMBINAISONS LINEAIRES EXCEPTIONNELLES AU SENS DE NEVANLINNA*)

NOBUSHIGE TODA

(Received Sept. 29, 1970)

1. Introduction. Soit $f(z)$ une fonction algébroïde à n branches dans le plan $|z|<\infty$ définie par une équation irréductible

$$A_0(z)f^n + A_1(z)f^{n-1} + \cdots + A_n(z) = 0 \tag{1}$$

où les fonctions $A_0, \cdots, A_n$ sont entières sans zéros communs à toutes telles que au moins un rapport entre elles est transcendant ; c'est-à-dire, $f(z)$ est transcendanet. Cartan [1] a conjecturé que, dans le cas où il n'y a que λ relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $A_0, \cdots, A_n$, pour q valeurs distinctes,

$$(q-n-\lambda-1)T(r,f) < \sum_{i=1}^{q} N_{n-\lambda}(r, a_i) + S(r). \tag{2}$$

Il l'a démontré quand $\lambda=0$ et $\lambda=n-1$. La relation (2) entraîne l'inégalité suivante

$$\sum_{a} \delta(a,f) \leqq n+\lambda+1 \tag{3}$$

tout de suite.

D'autre part, récemment Niino et Ozawa ont conjecturé que si $f(z)$ est entière, c'est-à-dire, $A_0(z)\equiv 1$ et s'il y a $2n-1$ valeurs distinctes finies $\{a_i\}_{i=1}^{2n-1}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{2n-1} \delta(a_i, f) > 2n-2,$$

alors,

*) Ce travail a été fait en partie avec l'aide de la fondation de Sakkokai (The Sakkokai Foundation).

1) il y a $n-1$ valeurs dans $\{a_i\}_{i=1}^{2n-1}$ (soient $a_1, \cdots, a_{n-1}$) qui sont exceptionnelles au sens de Picard;

2) $\delta(a_n, f) = \delta(a_{n+1}, f) = \cdots = \delta(a_{2n-1}, f) > \dfrac{n-1}{n}$

et

3) s'il y a une autre valeur déficiente a_{2n} au sens de Nevanlinna,

$$\delta(a_{2n}, f) < 1 - \delta(a_n, f).$$

Ils ont démontré cette conjecture quand $n = 2, 3$ et 4 dans [5, 6] et on a donné quelques résultats plus générals dans le cas où $n = 2$ ([9]).

Analoguement, on peut donner deux conjectures dans le cas du système. C'est-à-dire, soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan et $X = \{F_i\}_{i \in I}$ un ensemble de combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficinets constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. On peut espérer démontrer l'inégalité

$$(2') \qquad (q - n - \lambda - 1)T(r, f) < \sum_{i=1}^{q} N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r)$$

quand il n'existe que λ relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctons $f_0, \cdots, f_n$, où $\{F_i\}_{i=1}^{q}$ est un sous-ensemble quelconque de X, donc, l'inégalité

$$(3') \qquad \sum_{F \in X} \delta(F) \leqq n + \lambda + 1.$$

Au lieu de la conjeture de Niino-Ozawa, on espère démontrer que, s'il y a une combinaison dans X (soit F_1) telle que

$$\delta(F_1) = 1$$

et s'il y a $2n-1$ d'autres cnmbinaisons dans X (soient $F_2, \cdots F_{2n}$) telles que

$$\sum_{i=2}^{2n} \delta(F_i) > 2n - 2,$$

alors,

1) il existe $n-1$ combinaisons dans $\{F_i\}_{i=2}^{2n}$ (soient $F_2, \cdots, F_n$) telles que $F_1, F_2, \cdots F_n$ sont proportionnelles les unes les autres; par conséquent, on a

$$\delta(F_i) = 1 \qquad (i = 1, \cdots, n);$$

2) les autres combinaisons $F_{n+1}, \cdots F_{2n}$ sont aussi proportionnelles les unes les autres et donc

$$\delta(F_{n+1}) = \cdots = \delta(F_{2n}) > \frac{n-1}{n};$$

3) s'il y a une autre combinaison F dans $\mathcal{F}$ exceptionnelle au sens de Nevanlinna,

$$\delta(F) < 1 - \delta(F_{n+1}) < \frac{1}{n}.$$

La conjecture de Cartan est très difficile à démontrer, par conséquent, plus faiblement, on peut espérer démontrer la proposition (4) : l'inégalité

$$\sum_{F \in X} \delta(F) > 2n - 1$$

entraîne

$$\lambda = n - 1.$$

Dans ce mémoire, on démontre, d'abord, que si cette dernière proposition (4) est vraie, l'analogie de la conjecture de Niino-Ozawa est aussi vraie. De plus, on considère sur la conjecture de Cartan dans quelques cas spécials. Puis, en les appliquant, on démontre la proposition (4) quand $n = 3, 4, 5$ et la conjecture de Niino-Ozawa quand $n = 5$ et 6. On donne tous les résultats, d'abord, dans le cas du système, et ensuite les applique aux fonctions algébroïdes. On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna-Selberg librement ([4], [7]).

2. Préliminaires. Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système dans le plan où les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes. On dit que ce système est transcendant si

$$\lim_{r \to \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$$

où $T(r, f)$ est fonction caractéristique du système f définie par Cartan [1].

Quand $n=1$, on sait que

$$T(r,f)=T(r,f_0/f_1)+O(\log r) \tag{5}$$

(voir [1]).

Soit G une combinaison des fonctions $f_0,\cdots,f_n$ linéaires, homogènes à coefficients constants non tous nuls, alors, on utilise les notations

$$\delta(G) \qquad \text{et} \qquad \theta_p(G) \qquad (p\geqq 1)$$

comme dans le paragraphe 2 dans [9].

On utilise les lemmes suivants souvant par la suite.

LEMME 1. *Soit $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système dans le plan et A une $(n+1, n+1)$-matrice régulière. Si*

$$A(f_0,\cdots f_n)^t=(F_0,\cdots,F_n)^t,$$

alors, on a

$$|T(r,f)-T(r,F)|<O(1)$$

où $F=(F_0,\cdots F_n)$ (voir [1]).

LEMME 2. *Soit $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système dans le plan. Alors, pour tout $i\neq j$, $f_j\not\equiv 0$, on a*

$$T(r,f_i/f_j)-O(1)<T(r,f)<\sum_{k\neq j}T(r,f_k/f_j)+O(1)$$

(voir [8]).

3. Cas de systèmes. Dans ce paragraphe, on donne quelques résultats aux relations intimes avec les conjectures citées dans l'introduction dans le cas du système.

THÉORÈME 1. *Soit $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système transcendant dans le plan fini à $n-1$ relations linéaires, homog`mes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0,\cdots f_n$. S'il y a un ensemble $X=\{F_i\}_{i=1}^N$ de combinaisons des fonctions $f_0,\cdots,f_n$, linéaires homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ telles que*

$$\theta_1(F_i)>0 \qquad (i=1,\cdots,N)$$

et

$$\sum_{i=1}^{N} \theta_1(F_i) > 2n-1$$

où $2n \leqq N \leqq \infty$ *et s'il y a une combinaison dans* X *(soit* F_1*) telle que*

$$\theta_1(F_1) = 1,$$

alors,

1) *il y a* $n-1$ *combinaisons dans* X *(soient* $F_2, \cdots, F_n$*) telles que*

$$F_i = a_i F_1 \quad (a_i \neq 0 \text{ et constante}\,;\ i = 2, \cdots, n)\,;$$

par conséquent, on a

$$\theta_1(F_i) = 1 \qquad (i = 2, \cdots, n)\,;$$

2) *il y a au moins un système de n combinaisons dans* $X - \{F_i\}_{i=1}^{n}$ *(soient* $(F_{i_1}^k, \cdots, F_{i_n}^k)$, $1 \leqq k \leqq p$ $(\leqq \infty)$*) telles que*

$$F_{i_j}^k = a_{i_j}^k F_{i_1}^k \qquad (a_{i_j}^k \neq 0 \text{ et constante})\,;$$

par conséquent, on a

$$\theta_1(F_{i_1}^k) = \cdots = \theta_1(F_{i_n}^k) \qquad (1 \leqq k \leqq p)\,;$$

3) *soit* X' *l'ensemble des combinaisons qui ne sont pas proportionnelles les unes les autres dans* $X - \{F_i\}_{i=1}^{n} - \bigcup_{k=1}^{p} \{F_{i_j}^k\}_{j=1}^{n}$*, alors, on a*

$$\sum_{k=1}^{p} \theta_1(F_{i_1}^k) + \sum_{F_i \in X'} \theta_1(F_i) \leqq 1.$$

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothése qu'il y a $n-1$ relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$, il y a deux fonctions dans $f_0, \cdots, f_n$ (soient f_0 et f_1) qui forment une base des fonctions $f_0, \cdots f_n$. Par conséquent, on peut supposer que tous les éléments F dans X peuvent être représentés par f_0 et f_1 :

$$F_i = \alpha_i f_0 - \beta_i f_1 \qquad (i = 1, \cdots, N) \tag{6}$$

où α_i et β_i sont des constants non tous nuls pour tout $i=1,\cdots,N$.

On peut démontrer facilement qu'en utilisant (5) et de la définition de $T(r,f)$

$$(7)\qquad T(r,f)=T(r,f_1/f_0)+O(\log r).$$

De (6) et (7), on a

$$(8)\qquad \theta_1(F_i)=\Theta(\alpha_i/\beta_i, f_1/f_0)$$

où $\alpha_i/\beta_i=\infty$ si $\beta_i=0$.

Soient

$$\alpha_i/\beta_i=x_i \qquad (i=1,\cdots,N) \quad \text{et} \quad f_1/f_0=g.$$

On note que F_i et F_j sont proportionnelles si et seulement si $x_i=x_j$.

D'abord, on démontre 1). Il suffit de prouver qu'il existe $n-1$ valeurs dans $\{x_i\}_{i=2}^N$ qui sont égales à x_1. En effet, s'il en existe n (soient $x_{i_1},\cdots,x_{i_n}$), $F_1, F_{i_1},\cdots F_{i_n}$ sont proportionnelles les unes les autres, de sorte que, d'après les lemmes 1 et 2, on a

$$T(r,f)\sim T(r,F)=O(1)$$

où $F=(F_1,F_{i_1},\cdots F_{i_n})$, qui est absurde, parce que f est transcendant. S'il n'existe que l valeurs dans $\{x_i\}_{i=2}^N$ qui sont égales à x_1 $(0\leqq l\leqq n-2)$ (soient $x_{i_1},\cdots,x_{i_l}$), on a

$$\theta_1(F_1)=\theta_1(F_{i_j})=\Theta(x_1, g)=1 \quad (j=1,\cdots,l).$$

Soit $i_0\neq 1, i_1,\cdots,i_l$ quelconque, alors, il n'existe qu'au plus $n-1$ valeurs dans $\{x_i\}_{i=1}^N$ telles que

$$x_i=x_{i_0} \qquad (i\neq i_0).$$

En effet, s'il existe n telles valeurs, on a comme précédent,

$$T(r,f)=O(1),$$

qui est absurde parce que f est transcendant.

Si

$$x_i=x_{i_0} \qquad (i\neq i_0),$$

on a trivialement

$$\Theta(x_i, g) = \Theta(x_{i_0}, g).$$

Par conséquent, soit $\{x_{j_k}\}_{k=1}^{N'}$ le sous-ensemble de $\{x_i\}_{i=1}^{N} - \{x_1, x_{i_1}, \cdots x_{i_l}\}$ qui consiste en toutes les valeurs distinctes les unes les autres, alors, on a

$$\begin{aligned}(l+1)\Theta(x_1, g) + n\sum_{k=1}^{N'}\Theta(x_{j_k}, g) &\geqq \\ \geqq \sum_{i=1}^{N}\theta_1(F_i) &> 2n-1,\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{k=1}^{N'}\Theta(x_{j_k}, g) > 1 + \frac{n-1-(l+1)}{n} \geqq 1$$

et

$$\Theta(x_1, g) + \sum_{k=1}^{N'}\Theta(x_{j_k}, g) > 2,$$

qui est absurde, parce qu'ici, $\{x_1, x_{j_k}\}_{k=1}^{N'}$ sont distinctes les unes les autres et d'après le théorème 2. 4 [3]

$$\Theta(x_1, g) + \sum_{k=1}^{N'}\Theta(x_{j_k}, g) \leqq 2.$$

Cela veut dire qu'il existe $n-1$ valeurs dans $\{x_i\}_{i=2}^{N}$ qui sont égales à x_1 (soient $x_2, x_3, \cdots, x_n$), de sorte que

$$F_i = \frac{\beta_i}{\beta_1}F_1 \qquad (i = 1, \cdots, n) \qquad \text{quand} \quad \beta_1 \neq 0,$$

$$F_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1}F_1 \qquad (i = 1, \cdots, n) \qquad \text{quand} \quad \beta_1 = 0.$$

Naturellement, β_i/β_1 ou $\alpha_i/\alpha_1 \neq 0, \infty$.

Puis, on démontre 2). Si, pour tout i_0 $(\geqq n+1)$, il n'existe qu'au plus $n-2$ valeurs dans $\{x_i\}_{i=n+1}^{N}$ qui sont égales à x_{i_0}, on a, en utilisant 1), de l'hypothèse du théorème,

$$(n-1)\sum_{k=1}^{N'}\Theta(x_{j_k}, g) > 2n-1-n = n-1.$$

C'est-à dire,

$$\sum_{\kappa=1}^{N'}\Theta(x_{j_k}, g) > 1,$$

qui est absurde comme dans la démonstration de 1) de ce théorème. En conséquence, on a établi 2).

On peut démontrer 3) facilement par 1) et 2).

COROLLAIRE 1. *Si F_1 est lacunaire (resp. exceptionnelle au sens de Picard), $F_2, \cdots, F_n$ le sont aussi: s'il y a une combinaison lacunaire (resp. exceptionnelle au sens de Picard) dans X sous les conditions du théorème 1, il y en a n qui sont lacunaires (resp. exceptionnelles au sens de Picard).*

Comme cas particulier, on a le

THÉORÈME 2. *Soit $f=(f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan fini à $n-1$ relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$. S'il y a un ensemble $\mathcal{F}=\{F_i\}_{i=1}^N$ de combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ telles que*

$$\theta_1(F_i) > 0 \qquad (i=1, \cdots, N)$$

et

$$\sum_{i=1}^{N}\theta_1(F_i) = 2n, \tag{11}$$

où $2n \leqq N \leqq \infty$, alors, il se repartit en un certain nombre de classes (soit c, qui est $\geqq 2$) jouissant des proprietes suivantes:

(A) *Chaque classe comprend n combinaisons;*

(B) *les rapports mutuels d'une même classe sont constants;*

(C) *les fonctions caractéristiques des rapports mutuels de deux classes distinctes quelconque sont equivalentes à $T(r,f)$.*

DÉMONSTRATION. Comme dans la démonstration du théorème 1, on peut supposer que f_0 et f_1 forment une base des fonctions $f_0, \cdots, f_n$ d'après l'hypothèse qu'il y a $n-1$ relations entre les $f_0, \cdots, f_n$. Donc, on a de (5) et de la définition de $T(r,f)$,

(12) $$T(r,f) \sim T(r, f_1/f_0) \qquad (r \to \infty),$$

et on peut représenter tous les éléments de $\mathcal{F}$ par f_0 et f_1 comme suivant :

$$F_i = \alpha_i f_0 - \beta_i f_1 \qquad (i = 1, \cdots, N)$$

où les α_i et β_i sont constants non tous nuls pour tout $i = 1, \cdots, N$.

Soient

$$\alpha_i/\beta_i = x_i \qquad \text{et} \qquad f_1/f_0 = g$$

où $x_i = \infty$ si $\beta_i = 0$. Alors, de (12), on a

(13) $$\theta_1(F_i) = \Theta(x_i, g).$$

On introduit une relation "$\cong$" dans l'ensemble $\mathcal{F}$: Soient F_i et F_j deux éléments dans $\mathcal{F}$, alors, on dit que

$$F_i \cong F_j \quad \text{si et seulement si} \quad F_i/F_j \equiv \text{constante}.$$

Alors, cette relation "$\cong$" est une relation équivalente dans $\mathcal{F}$. On classifie $\mathcal{F}$ par cette relation. Soient $\mathcal{F}_p$ $(p = 1, \cdots, c(\leqq \infty))$ toutes les classes classifiées par cette relation.

On démontre, d'abord, que chaque $\mathcal{F}_p$ comprend n combinaisons. En effet, si une classe comprend au moins $n+1$ combinaisons, an peut démontrer facilement que

$$T(r,f) = O(1)$$

d'après les lemmes 1 et 2, qui est absurde ; puisque le système f est transcendant. Cela veut dire que toutes les classes comprennent au plus n combinaisons.

D'autre part, supposons que chaque classe $\mathcal{F}_p$ comprend l_p combinaisons $(1 \leqq l_p \leqq n;\ 1 \leqq p \leqq c)$. Alors, en utilisant que

$$\theta_1(F_i) = \theta_1(F_j)$$

si F_i et F_j sont contenues dans une même classe, de (11) et (13), on a

$$\sum_{p=1}^{c} l_p \Theta(x_{i_p}, g) = 2n$$

où $\{x_{i_p}\}_{p=1}^{c}$ est le sous-ensemble de $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ qui contient toutes les valeurs distinctes dans $\{x_i\}_{i=1}^{N}$. S'il y a au mojns un p_0 $(1 \leqq p_0 \leqq c$ et fini) tel que

$$l_{p_0} < n,$$

on a

$$n \sum_{p=1}^{c} \Theta(x_{i_p}, g) > 2n,$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{p=1}^{c} \Theta(x_{i_p}, g) > 2,$$

qui est absurde, parce que $x_{i_p}(p = 1, \cdots, c)$ sont distinctes les unes les autres et d'après le théorème 2.4 [3],

$$\sum_{p=1}^{c} \Theta(x_{i_p}, g) \leqq 2.$$

Cela veut dire que, pour tout p,

$$l_p = n.$$

Maintenant, il ne faut que démontrer (C). Soient $\mathcal{F}_p$ et $\mathcal{F}_q$ deux classes distinctes quelconque et

$$\mathcal{F}_p = \{F_{p_1}, \cdots, F_{p_n}\}, \quad \mathcal{F}_q = \{F_{q_1}, \cdots, F_{q_n}\}.$$

Puisque

$$F_{p_j}/F_{q_k} = c_{jk} F_{p_1}/F_{q_1} \quad (c_{jk} \neq 0, \text{ constante}\,;\ j, k = 1, \cdots, n),$$

il suffit de démontrer que

$$T(r, F_{p_1}/F_{q_1}) \sim T(r, f) \qquad (r \to \infty). \tag{14}$$

Considérons un système

$$F = (F_{p_1}, \cdots, F_{p_n}, F_{q_1}),$$

alors en vertu de l'hypothèse d'indépendance linéaire $n+1$ à $n+1$ des éléments de $\mathcal{F}$, d'après le lemme 1, on a

$$T(r,f) \sim T(r,F) \qquad (r \to \infty). \tag{15}$$

D'autre part, on peut démontrer facilement que

$$T(r, F_{p_1}/F_{q_1}) - O(1) < T(r, F) < T(r, F_{p_1}/F_{q_1}) + O(1) \tag{16}$$

grâce au lemme 2.

En combinant (15) et (16), et f étant transcendant, on a (14).

N. B. 1. Les thèorémes 1 et 2 sont valables quand même on change "θ_1" en "δ".

N. B. 2. Dans le théorème 2, si $N < \infty$, alors $c < \infty$ et $N = cn$. Spécialement, si l'ordre inférieur du système f est fini, $N < \infty$ en utilisant un résultat récent de Weitsman [12] quand on utilise "δ" au lieu de "θ_1".

N. B. 3. Quand $n = 2$ et si "θ_1" est changé en "δ", l'hypothèse qu'il y a une relation linéaire, homogène à coefficients constants entre f_0, f_1 et f_2 n'est pas nécessaire (voir [9]).

Comme conséquences directes du théorème 2, on a les

COROLLAIRE 2. *Si $\mathcal{F}$ comprend une combinaison exceptionnelle au sens de Picard (resp. lacunaire), il comprend n combinaisons exceptionnelles au sens de Picard (resp. lacunaires).*

COROLLAIRE 3. *Si $\mathcal{F}$ contient une combinaison (soit F_1) telle que*

$$\delta(F_1) = 1$$

et si

$$\sum_{i=1}^{N} \delta(F_i) = 2n,$$

le système f est d'ordre positif fini entier ou infini et à croissance regulière.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que F_1 appartienne à $\mathcal{F}_1$. Alors,

$$\sum_{p=1}^{c} \delta(x_{i_p}, g) = 2$$

et

$$\delta(x_{i_1}, g) = 1.$$

D'après un résultat dans [2] dans le cas d'ordre fini et grâce à celui dans [10] dans le cas d'ordre infini, g est à croissance regulière et d'ordre positif entier quand l'ordre de g est fini. Maintenant, de (12), on a

$$T(r,f) \sim T(r, g) \qquad (r \to \infty),$$

de sorte que l'on a ce résultat tout de suite.

COROLLAIRE 4. *Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan. S'il y a $2n$ combinaisons $F_1, \cdots, F_{2n}$ des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ telles que*

$$\delta(F_i) = 1 \qquad (i = 1, \cdots, 2n),$$

alors, elles repartissent en deux classes jouissant les propriétés (A), (B) *et* (C) *dans le théorème* 2.

En effet, en vertu du théorème 3 dans [8], il y a entre $f_0, \cdots f_n$ $n-1$ relations linéaires homogènes indépendantes à coefficients constants ; en conséquence on a ce corollaire du théorème 2 tout de suite.

THÉORÈME 3. *Soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan et $\mathscr{F} = \{F\}$ un ensemble de combinaisons des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. S'il n'y a entre les $f_0, \cdots, f_n$ que λ relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants ($\lambda < n$), et s'il y a $n + \lambda + 1$ combinaisons dans $\mathscr{F}$ (soient $F_1, \cdots, F_{n+\lambda+1}$) telles que*

$$\delta(F_i) = 1 \qquad (i=1, \cdots, n+\lambda+1),$$

alors, pour toute F appartenant à $\mathscr{F} - \{F_i\}_{i=1}^{n+\lambda+1}$, on a

$$\delta(F) = 0.$$

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse, il n'y a entre les $F_1, \cdots, F_{n+1}$ que λ relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants aussi. Donc, on peut supposer que $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$ forment une base de $F_1, \cdots, F_{n+1}$. En utilisant le lemme 4 ou 4' dans [8], si on représente F par $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$, on peut démontrer facilement qu'aucun des coefficients n'est nul, de sorte que $F_1, F_2, \cdots, F_{n+1-\lambda}$

et F sont linéairement indépendantes $n+1-\lambda$ à $n+1-\lambda$. Si

$$\delta(F) > 0,$$

alors, on a

$$\sum_{i=1}^{n+1-\lambda} \delta(F_i) + \delta(F) > n+1-\lambda.$$

Par conséquent, il y a au moins une relation linéaire, homogène à coefficients constants entre $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$ d'après le théorème fondamental de Cartan [1], qui est absurde parce que $F_1, \cdots, F_{n+1-\lambda}$ sont linéairement indépendantes. Cela veut dire qu' il faut

$$\delta(F) = 0.$$

Comme une conséquence de ce théorème, on a le

THÉORÈME 4. *Soient* $f=(f_0, \cdots, f_n)$ *un système transcendant dans le plan et* $\mathcal{F}=\{F_i\}_{i=1}^N$ *un ensemble de combinaisons des fonctions* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *telles que*

$$\delta(F_i) = 1 \qquad (i=1, \cdots, 2n-1)$$

et

$$\delta(F_{2n}) > 0,$$

où $2n \leqq N \leqq \infty$. *Alors, on a*

$$\delta(F_{2n}) = 1 \quad et \quad \delta(F_i) = 0 \qquad (i \geqq 2n+1).$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 3 dans [3], il y a $n-1$ relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$.

Donc,

$$\sum_{i=1}^{N} \delta(F_i) \leqq 2n$$

grâce au corollaire du théorème 2 dans [8]. De plus, en vertu de l'hypothèse, on a

$$\sum_{i=1}^{N} \delta(F_i) > 2n-1,$$

par conséquent, en appliquant le théorème 1,

$$\delta(F_{2n}) = 1\,;$$

et d'après le théorème 3, on a

$$\delta(F_i) = 0 \qquad (i \geqq 2n+1).$$

4. Quelques cas specials de la conjecture de Cartan. Dans ce paragraphe, on considère quelques cas particuliers sur la conjecture de Cartan que l'on applique après. D'abord, on améliore un lemme donné par Cartan [1].

LEMME 3. *Soient* $f=(f_0,\cdots,f_n)$ *un système dans le plan,* $\mathcal{F}=\{F_i\}_{i=1}^{q}$ *un ensemble de combinaisons linéaires des fonctions* $f_0,\cdots,f_n$*, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *et*

$$v(z) = \max_{(\beta_1,\cdots,\beta_{q-n})} \log|F_{\beta_1}(z)\cdots F_{\beta_{q-n}}(z)|$$

où $\beta_1,\cdots\beta_{q-n}$ *sont des nombres différents quelconque entre* 1 *et* q*. Alors, on a*

$$(q-n)T(r,f) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})d\theta + O(1).$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme dans [1] et de la définition de $T(r,f)$, pour chaque valeur de z et quelque soit j, on a

$$(q-n)\ \log|f_j(z)| \leqq v(z) + (q-n)\ \log\ K$$

K étant un nombre positif dépendant des F_i.

D'où, on a

$$(q-n)u(z) \leqq v(z) + (q-n)\ \log\ K$$

où

$$u(z) = \max_{0\leqq j\leqq n} \log|f_j(z)|$$

et en intégrant

$$(q-n)T(r,f) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re_{i\theta})d\theta + (q-n)(\log K - u(0)).$$

En utilisant ce lemme, on a le

THÉORÈME 5. *Soient $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système dans le plan $|z|<\infty$ à λ relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0,\cdots,f_n$ au plus $(\lambda<n)$ et $X=\{F_\iota\}_{\iota\in I}$ un ensemble de combinaisons linéaires des fonctions $f_0,\cdots,f_n$, homgènes à coefficients constants et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. Si n'importe quelles $n-\lambda$ combinaisons dans X sont linéairement indépendantes, on a, pour q combanaisons F_i $(i=1,\cdots,q)$ quelconque dans X,*

$$\left(q-n-\frac{n}{n-\lambda}\right)T(r,f) < \sum_{\iota=1}^{q} N_{n-\lambda}(r,0,F_i) + S(r)$$

où $N_{n-\lambda}$ et $S(r)$ sont les notations utilisées dans [1].

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse qu'il n'y a que λ relations entre les fonctions $f_0,\cdots,f_n$, on peut supposer que les $f_0,\cdots,f_{n-\lambda}$ forment une base de $f_0,\cdots,f_n$. Prenons un point z quelconque et fixé dans le plan fini. Supposons que

$$|F_1(z)| \leqq \cdots \leqq |F_q(z)|.$$

Prenons n'importe quelles $n-\lambda$ combinaisons de $F_1,\cdots,F_n$, par exemple, $F_1,\cdots,F_{n-\lambda}$, alors, elles sont linéairement indépendantes et il y a une autre combinaison (soit F) dans $\{F_i\}_{i=1}^q$ telle que $F_1,\cdots,F_{n-\lambda}$, F sont linéairement indépendantes d'après l'hypothèse. On a par un calcul simple

$$c\|F_1,\cdots,F_{n-\lambda},\| \equiv \|f_0,\cdots,f_{n-\lambda}\| \not\equiv 0$$

où c est constante. Considérons ce fait pour toutes les combinaisons de $n-\lambda$ de $F_1,\cdots,F_n$, alors, le nombre des combinaisons est

$${}_nC_{n-\lambda},$$

et le nombre des combinaisons qui ne contiennent pas F_i $(i=1,\cdots,n)$ est

$${}_{n-1}C_{n-\lambda}.$$

Donc, le nombre des combinaisons qui contiennent F_i $(i=1,\cdots,n)$ est

$$p_\lambda = {}_nC_{n-\lambda} - {}_{n-1}C_{n-\lambda}.$$

Considérons l'identité

$$\frac{(F_1\cdots F_q)^{p_\lambda}}{\prod\limits_{{}_nC_{n-\lambda}} c_{\nu_i}\|F_{i_1},\cdots,F_{i_{n-\lambda}},F_{\nu_i}\|} = \frac{(F_1\cdots F_q)^{p_\lambda}}{\|f_0,\cdots,f_{n-\lambda}\|^{{}_nC_{n-\lambda}}}$$

où $(F_{i_1},\cdots,F_{i_{n-\lambda}})\subset(F_1,\cdots,F_n)$.

En utilisant le lemme 3, on a, comme dans la démonstration du théorème fondamental de Cartan [1],

$$p_\lambda(q-n)T(r,f)\leqq p_\lambda\sum_{i=1}^{q}N_{n-\lambda}(r,0,F_i)+{}_nC_{n-\lambda}T(r,f)+S(r),$$

c'est-à-dire,

$$(q-n)T(r,f)\leqq\sum_{i=1}^{b}N_{n-\lambda}(r,0,F_i)+\frac{{}_nC_{n-\lambda}}{p_\lambda}T(r,f)+S(r).$$

Maintenant,

$$\frac{{}_nC_{n-\lambda}}{p_\lambda}=\frac{n}{n-\lambda},$$

par conséquent, on a établi ce théorème.

N. B. Soit $\lambda=0$, alors, ce théorème réduit au théorème fondamental de Cartan [1].

COROLLAIRE 5. *Si f est transcendant, on a*

$$\sum_{F\in X}\delta(F)\leqq\sum_{F\in X}\theta_{n-\lambda}(F)\leqq n+\frac{n}{n-\lambda}.$$

THÉORÈME 6. *Soient f et X comme dans le theorème 5. S'il y a $\lambda+1$ combinaisons dans X qui sont proportionnelles les unes les autres (soient F_1, $\cdots,F_{\lambda+1}$), alors, on a, pour q combinaisons F_{j_i} $(i=1,\cdots,q)$ quelconque dans X,*

$$(q-n-\lambda-1)T(r,f) \leqq \sum_{i=1}^{q} N(r,0,F_{j_i}) + S(r).$$

DÉMONSTRATION. Enlevons $F_1, \cdots, F_\lambda$ à X, alors le reste est un ensemble qui satisfait à l'hypothèse du théorème 5 et n'importe quelles $n+1-\lambda$ combinaisons y compris $F_{\lambda+1}$ dans $X-\{F_i\}_{i=1}^{\lambda}$ sont linéairement indépendantes. Soient F_{j_i} $(i=1,\cdots,q)$ q combinaisons quelconque dans X.

1) Le cas où

$$\{F_{j_i}\}_{i=1}^{q} \cap \{F_i\}_{i=1}^{\lambda+1} = \phi.$$

On a du théorème 5

$$\left(q-n-\frac{n}{n-\lambda}\right)T(r,f) \leqq \sum_{i=1}^{q} N_{n-\lambda}(r,0,F_{j_i}) + S(r)$$

tout de suite et on note que

$$\frac{n}{n-\lambda} \leqq \lambda+1 \text{ et } N_{n-\lambda}(r,0,F_{j_i}) \leqq N(r,0,F_{j_i}).$$

2) Le cas contraire. Soit

$$\{F_{\lambda_i}\}_{i=1}^{p} \subset \{F_{j_i}\}_{i=1}^{q}$$

où $p \leqq \lambda+1$ et $\lambda_i \in (1,\cdots,\lambda+1)$. Prenons un point z quelconque et fixé dans le plan fini. Enlevons $\{F_{\lambda_i}\}_{i=1}^{p-1}$ à $\{F_{j_i}\}_{i=1}^{q}$ et soit

$$\{F_{j_k}\}_{i=1}^{q} - \{F_{\lambda_i}\}_{i=1}^{p-1} = \{F_{\nu_i}\}_{i=1}^{q+1-p}.$$

Supposons que

$$|F_{\nu_1}(z)| \leqq |F_{\nu_2}(z)| \leqq \cdots \leqq |F_{\nu_{q+1-p}}(z)|.$$

Considérons

$$F_{\nu_1}(z), \cdots\cdot, F_{\nu_n}(z)$$

et ajoutons F_{λ_p} si elles ne la contiennent pas ou $F_{\nu_{n+1}}(z)$ si elles la contiennent. Alors, n'importe quelles $n+1-\lambda$ combinaisons y compris F_{λ_q} dans l'ensemble obtenu sont linéairement indépendantes ; et comme dans la démonstration du théoreme 5, considérons l'identité

$$\frac{(F_{j_1}\cdots F_{j_q})^{p_\lambda}}{\prod\limits_{{}_nC_{n-\lambda}} c_k\|F_{\nu_{k_1}},\cdots,F_{\nu_{k_{n-\lambda}}},F_{\lambda_p}\|}=\frac{(F_{j_i}\cdots F_{j_q})^{p_\lambda}}{\|f_0,\cdots,f_{n-\lambda}\|^{{}_nC_{n-\lambda}}}.$$

Ensuite, en utilisant le lemme 3 comme dan la démonstration du théorème 5, on a

$$\begin{aligned}&p_\lambda(q-n-p)T(r,f)+p_\lambda(p-1)N(r,0,F_{\lambda_p})\\&\leqq p_\lambda\sum_{i=1}^{q+1-p}N_{n-\lambda}(r,0,F_{\nu_i})+p_\lambda(p-1)N(r,0,F_{\lambda_p})\\&\quad+{}_{n-1}C_{n-\lambda}N(r,0,F_{\lambda_p})+S(r)\end{aligned}$$

où on a utilisé que

$$N(r,0,F_{\lambda_i})=N(r,0,F_{\lambda_p})\qquad(i=1,\cdots,p-1).$$

D'où, on a

$$\begin{aligned}&(q-n-p)T(r,f)+(p-1)N(r,0,F_{\lambda_p})\\&\leqq\sum_{i=1}^{q}N(r,0,F_{j_i})+\frac{{}_{n-1}C_{n-\lambda}}{p_\lambda}N(r,0,F_{\lambda_p})+S(r).\end{aligned}$$

En utilisant que

$$N(r,0,F_{\lambda_p})<T(r,f)+O(1)\quad\text{et}\quad\frac{{}_{n-1}C_{n-\lambda}}{p_\lambda}=\frac{\lambda}{n-\lambda},$$

on a:

1) le cas où $p\leqq n/(n-\lambda)$.

$$\left(q-n-\frac{n}{n-\lambda}\right)T(r,f)\leqq\sum_{i=1}^{q}N(r,0,F_{j_i})+S(r);$$

2) le cas où $p>n/(n-\lambda)$.

$$(q-n-p)T(r,f)\leqq\sum_{i=1}^{q}N(r,0,F_{j_i})+S(r),$$

ce qui etablit le théoreme.

COROLLAIRE 6. *Si f est transcendant, on a*

$$\sum_{F\in X}\delta(F)\leqq n+\lambda+1.$$

THÉORÈME 7. *Soient f et X comme dans le théorème* 5. *Si n'importe quelles $n-\lambda-l$ $(\geqq 1)$ combinaisons dans X sont linéairement indépendantes, on a, pour q combinaisons F_ι $(i=1,\cdots,q)$ quelconque appartenant* à X,

$$\left(q-n-\frac{(l+1)n}{n-\lambda-l}\right)T(r,f)\leqq\sum_{i=1}^{q}N_{n-\lambda}(r,0,F_i)+S(r).$$

DÉMONSTRATION. On peut démontrer ce théoreme comme dans la démonstration du théorème 5.

COROLLAIRE 7. *Si f est transcendant, on a*

$$\sum_{F\in X}\delta(F)\leqq n+\frac{(l+1)n}{n-\lambda-l}$$

où $\lambda+l\leqq n-1$.

5. **Application 1.** On applique les résultats dans le paragraphe précédent á résoudre la notre proposition (4) citée dans l'introduction dans quelques cas particuliers.

THÉEORÈME 8. *Soient $f=(f_0,f_1,f_2,f_3)$ un système transcendant dans le plan et $\mathcal{F}=\{F_\iota\}_{i=0}^{N}$ un ensemble de combinaisons linéaires des fonctions $f_0,\cdots,f_3$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes* 4 *à* 4 *telles que*

$$\delta(F_i)>0\qquad(i=0,\cdots,N)$$

et

$$\sum_{i=0}^{N}\delta(F_i)>5$$

où $5\leqq N\leqq\infty$. *Alors, il y a deux relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions f_0,f_1,f_2 et f_3.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème fondamental de Cartan [1], il y a au moins une relation entre les $f_0, \cdots, f_3$. Supposons qu'il n'y ait qu'une. Si n'importe quelles deux combinaisons dans $\mathcal{F}$ sont indépendantes, on a grâce au corollaire 5

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) \leqq 3 + \frac{3}{3-1} = 4\frac{1}{2} < 5,$$

qui est absurde. Cela vela dire qu'il y a au moins une paire de deux combinaisons dans $\mathcal{F}$ qui sont proportionnelles. Maintenant, le nombre des relations linéaires, homogènes indépendantes á coefficients constants entre les $f_0, \cdots f_3$ est égal á un, de sorte que, en vertu du corollaire 6, il faut que

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) \leqq 3 + 1 + 1 = 5,$$

qui est aussi absurde. Cela signifie qu'il y a deux relations linéaires, indépendantes á coefficients constants entre les $f_0, \cdots, f_3$: $\lambda = 2$.

N. B. 1. En combinant ce théorème au théorème 1, on a une généralisation d'une réponse [5] pour la conjecture de Niino et Ozawa quand $n = 3$.

N. B. 2. Si $\lambda = 1$, on a

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) \leqq 5 = 3 + 1 + 1.$$

THÉORÈME 9. *Soient* $f = (f_0, \cdots, f_4)$ *un système transcendant dans le plan et* $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=0}^{N}$ *un ensemble de combinaisons linéaires des fonctions* $f_0, \cdots, f_4$, *homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes* 5 *à* 5 *telles que*

$$\delta(F_i) > 0 \qquad (i = 0, \cdots, N)$$

et

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) > 7$$

où $7 \leqq N \leqq \infty$. *Alors, il y a trois relations linéaires homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_4$.

DÉMONSTRATION. Soit λ le nombre maximum des relations linéaires homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_4$. D'abord, en utilisant le théorème fondamental de Cartan [1], d'après l'hypothèse, $\lambda \geqq 1$.

1) Supposons que $\lambda = 1$. Alors, on peut démontrer facilement l'inégalité suivante (voir le lemme 4 dans le paragraphe 6 aussi) :

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) \leqq 4 + \frac{4}{2} = 6 < 7,$$

qui est absurde. Cela signsfie que

$$\lambda \geqq 2.$$

2) Supposons que $\lambda = 2$. On peut considérer les cas suivants.

a) Il y a trois combinaisons dans $\mathcal{F}$ qui sont proportionnelles les unes les autres. Dans ce cas, en vertu du corollaire 6, on a

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) \leqq 4 + 2 + 1 = 7$$

qui est absurde.

b) N'importe quelles deux combinaisons dans $\mathcal{F}$ sont indépendantes. Dans ce cas, d'après le corollaire 5, on a

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) \leqq 4 + \frac{4}{4-2} = 6 < 7,$$

qui est absurde.

c) Les autres cas. On peut démontrer facilement, en utilisant la méthode comme dans la démonstration du thèorme 2 dans [8], que

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) \leqq 6 < 7,$$

qui est absurde.

De a), b) et c), on peut conclure que

$$\lambda \geqq 3.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse que f est transcendant, il faut que grâce au lemme 2

$$\lambda \leqq 3.$$

Par conséquent, on a

$$\lambda = 3.$$

N. B. En combinant ce théorème au théorème 1, on a une généralisation du théorème 2 dans [6] qui est une résolution de la conjecture de Niino et Ozawa quand $n = 4$.

THÉORÈME 10. *Soient $f=(f_0, \cdots, f_5)$ un système transcendant dans le plan et $\mathcal{F}=\{F_i\}_{i=0}^{N}$ un ensemble de combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \cdots, f_5$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes* 6 *à* 6 *telles que*

$$\delta(F_i) > 0 \qquad (i = 0, \cdots, N)$$

et

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) > 9$$

où $9 \leqq N \leqq \infty$. *Alors, le nombre maximum λ de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_5$ est quatre.*

DÉMONSTRATION. Grâce au théorème fondamental de Cartan [1], on a, d'abord d'apres l'hypothese, que

$$\lambda \geqq 1.$$

1) Supposons que $\lambda = 1$. Alors, on peut démontrer facilement que, comme dans la démonstration du théorème $9-1$),

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) \leqq 6 + \frac{6}{2} = 9,$$

qui est absurde. Cela veut dire que

$$\lambda \geqq 2.$$

2) Supposons que $\lambda=2$. Comme dans la démonstration du théorème $9-2$), en considérant tous les cas, on a

$$\sum_{i=0}^{N} \delta F_i) \leqq 8,$$

qui est absurde. Cela veut dire que

$$\lambda \geqq 3.$$

3) Supposons que $\lambda = 3$. On considère comme suivant.

a) Le cas oú il y a 4 combinaisons dans $\mathscr{F}$ qui sont proportionnelles les unes les autres. Dans ce cas, en vertu du corollaire 6, on a

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) \leqq 5+3+1 = 9,$$

qui est absurd.

b) Le cas où n'importe quelles deux combinaisons dans $\mathscr{F}$ sont indepéndantes. Dans ec cas, en vertu du corollaire 5, on a

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) \leqq 5+\frac{5}{5-3} = 7\frac{1}{2} < 9,$$

qui est absurde.

c) Les autres cas. On peut donner, comme dans la démonstration du théorème 2 dans [8], que

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) \leqq 9\,,$$

qui est ansurde.

De a), b) et c), on conclut que

$$\lambda \geqq 4\,.$$

D'autre part, d'aprés l'hypothèse que f est transcendant et grâce au lemme 2, il faut que

$$\lambda \leqq 4 .$$

Par conséquent, on a

$$\lambda = 4 .$$

N.B. En combinant ce théorème 1, on a une réponse positive et plue générale pour la conjecture de Niino et Ozawa quand $n=5$.

6. Application 2. Dans ce paragraphe, on considère sur la conjecture de Niino et Ozawa dans le cas du système et donne une réponse postive pour $n=6$.

LEMME 4. *Soient* $f=(f_0, \cdots, f_n)(n \geqq 6)$ *un système transcendant dans le plan,* $\mathscr{F}=\{F_i\}_{i=0}^{N}$ *un ensemble de combinaisons linéaires des fonctions* $f_0, \cdots, f_n$, *homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *telles que*

$$\delta(F_i) > 0 \qquad (i=0, \cdots, N)$$

et

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) > 2n-1$$

oú $2n-1 \leqq N \leqq \infty$, λ *le nombre maximum de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$. *Alors, on peut démontrer que*

$$\lambda \geqq 3 .$$

DÉMONSTRATION. Grâce au théorème fondamental de Cartan [1] et d'apres l'hypothese, on a

$$\lambda \geqq 1 .$$

1) Supposons que $\lambda = 1$. On considère :

a) le cas où il y a deux combinaisons dans $\mathscr{F}$ qui sont proportionnelles les unes les autres. Dans ce cas, grâce au corollaire 6, on a

$$\sum_{i=0}^{n} \delta(F_i) \leqq n+1+1 < 2n-1\,,$$

qui est absurde.

b) les autres cas. Comme dans la démonstration du théorème 2 [8], on peut prouver que

$$\sum_{i=0}^{n} \delta(F_i) \leqq n+\frac{n}{2} < 2n-1\,,$$

qui est absurde. De a) et b), on obtient que

$$\lambda \geqq 2\,.$$

2) Supposons que $\lambda = 2$. On considère :

a) le cas où il y a trois combinaisons dans $\mathcal{F}$ qui sont proportionnelles les unes les autres. Dans ce cas, d'après le corollaire 6, on a

$$\sum_{i=0}^{n} \delta(F_i) \leqq n+2+1 < 2n-1,$$

gui est absurde.

b) le cas où il y a deux paires de combinaisons dans $\mathcal{F}$ qui sont proportionnelles les unes les autres. On peut démontrer facilement comme d'habitude

$$\sum_{i=0}^{n} \delta(F_i) \leqq 2n-2 < 2n-1\,,$$

qui est absurde.

c) les autres cas. On peut donner aussi facilement l'inégalité

$$\sum_{i=0}^{N} \delta(F_i) \leqq 2n-2 < 2n-1\,,$$

qui est absurde. De a), b) et c), on peut conclure que

$$\lambda \geqq 3\,.$$

En utilisant ce lemme, on a le

THÉORÈME 11. *L'analogie de la conjecture de Niino et Ozawa est vraie quand* $n=6$. *C'est-á-dire, soient* $f=(f_0,\cdots,f_6)$ *un système transcendant dans le plan et* $\mathcal{F}=\{F_i\}_{i=1}^{12}$ *un ensemble de combinaisons linéaires des fonctions* $f_0,\cdots,f_6$, *homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes 7 à 7 telles que*

$$\sum_{i=1}^{12}\delta(F_i)>11\,. \tag{17}$$

Alors, il y a cinq relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0,\cdots,f_6$. *Par conséquent, S'il y a une combinaison dans* $\mathcal{F}$ *(soit* F_1*) telle que*

$$\delta(F_1)=1\,,$$

on a une réponse positive pour l'analogie de la conjecture de Niino et Ozawa quand $n=6$.

DÉMONSTRATION. Soit λ le nombre maximum de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0,\cdots,f_6$. On prouve, d'abord, que $\lambda=5$. D'après le lemme 4, on sait que

$$\lambda\geqq 3\,.$$

1) Supposons que $\lambda=3$. On considère :

a) le cas où n'importe quelles $6-3=3$ combinaisons dans $\mathcal{F}$ sont linéairement indépendantes. Dans ce cas, on a du corollaire 5

$$\sum_{i=1}^{12}\delta(F_i)\leqq 6+\frac{6}{6-3}=8<11\,,$$

qui est absurde.

b) le cas où il y a 4 combinaisons dans $\mathcal{F}$ qui sont proportionnelles les unes les autres. En vertu du corollaire 6, on a l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{12}\delta(F_i)\leqq 6+3+1=10<11\,,$$

qui est absurde.

c) les autres cas. On peut démontrer comme dans la démonstration du théorème 10, 3)—c), que

$$\sum_{i=1}^{12}\delta(F_i) \leqq 9 < 11,$$

qui est sbsurde. De a), b) et c), on conclut que

$$\lambda \geqq 4.$$

2) Supposons que $\lambda=4$. Alors, il y a trois combinaisons dans $\mathcal{F}$ qui forment une base des $F_1, \cdots, F_{12}$. Soient F_1, F_2 et F_3 telles combinaisons. Représentons les autres par F_1, F_2 et F_3 :

$$F_j = \alpha_{1j}F_1 + \alpha_{2j}F_2 + \alpha_{3j}F_3 \qquad (i = 4, \cdots, 12).$$

D'après l'hypothèse et en utilisant le théorème fondamental de Cartan [1], pour tout $j = 4, \cdots, 12$, au moins un des α_{1j}, α_{2j} et α_{3j} est égal à zéro. Il y a au plus quatre "j" tels que

$$\alpha_{1j} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_{2j} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_{3j} = 0$$

d'après l'hypothèse que $\lambda = 4$. Par conséquent, il y a au moins un j_1 tel que

$$\alpha_{1j_1} \neq 0, \ \alpha_{2j_1} \neq 0 \ \text{et} \ \alpha_{3j_1} = 0$$

et au moins un j_2 tel que

$$\alpha_{1j_2} = 0, \ \alpha_{2j_2} \neq 0 \ \text{et} \ \alpha_{3j_2} \neq 0$$

par exemple. C'est-à-dire,

$$F_{j_1} = \alpha_{1j_1}F_1 + \alpha_{2j_1}F_2 + 0,$$
$$F_{j_2} = 0 + \alpha_{2j_2}F_2 + \alpha_{3j_2}F_3.$$

En éliminant F_2, on a

$$F_{j_1} = \alpha F_1 + \beta F_{j_2} + \gamma F_3$$

où $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$. De plus, F_1, F_{j_2} et F_3 sont linéairement indépendantes. Par conséquent, F_1, F_{j_2}, F_3 et F_{j_1} sont linéairement indépendantes 3 à 3.

D'autre part, d'apres l'hypothèse (17), on a facilement

$$\delta(F_1) + \delta(F_{j_2}) + \delta(F_3) + \delta(F_3) + \delta(F_{j_1}) > 3 .$$

Cela veut dire que, grâce au théorème fondamental de Cartan [1], il y a une relation linéaire, homogène à coefficients constants entre F_1, F_{j_2} et F_3, qui est absurde. Cela signifie que

$$\lambda \geqq 5 .$$

Mais, maintenant, f est transcendant, en conséquence, en vertu du lemme 2,

$$\lambda \leqq 5 .$$

Donc, on a $\lambda = 5$.

Quant au reste, en combinant le fait obtenu maintenant au théorème 1, on obtient tout de suite.

7. Cas de fonctions algébroïdes. Tous les résultats obtenus dans les paragraphes 3~6 s'appliquent en particulier aux fonctions algébroïdes dans le plan en vertu du lemme suivant :

LEMME 5. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par* (1). *Alors, on a*

$$|T(r,f) - T(r, A)/n| < O(1)$$

où $A = (A_0, \cdots, A_n)$([11]).

Par exemple, on peut donner des réponses positives pour la conjecture de Niino et Ozawa quand $n = 5$ et 6 des théorèmes 10 et 11 respectivement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. CARTAN, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions horomorphes données, Mathematica, 7(1933), 5-31.

[2] A. EDREI-W. H. J. FUCHS, On the growth of meromorphic functions with several deficient values, Trans. Amer. Math. Soc., 93(1959), 292-328.

[3] W. K. HAYMAN, Meromorphic functions, OMM, 1964.

[4] R. NEVANLINNA, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929.

[5] K. NIINO-M. OZAWA, Deficiencies of an entire algebroid function, Kōdai Math. Sem. Rep., 22(1970), 98-113.
[6] K. NIINO-M. OZAWA, Deficiencies of an entire algebroid function II, ibid, 178-187.
[7] H. L. SELBERG, Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale, Avh. Norske Vid. Akad. Oslo, 8(1934), 1-72.
[8] N. TODA, Sur les combinaisons exceptionnelles de fonctions holomorphes; applications aux fonctione algébroïdes, Tôhoku Math. J., 22(1970), 290-319.
[9] N. TODA, Sur les valeurs déficientes de fonctions algébroïdes à 2 branches, Kōdai Math. Sem. Rep., 22(1970), 501-514.
[10] N. TODA, On a modified deficiency of meromorphic functions, Tôhoku Math. J., 22(1970), 635-658.
[11] G. VALIRON, Sur la dérivée des fonctions algébroïdes, Bull. Soc. Math. France, 59(1931), 17-39.
[12] A. WEITSMAN, Meromorphic functions with maximal deficiency sum and a conjecture of F. Nevanlinna, Acta Math., 123(1970), 115-139.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNVERSITÉ DE TÔHOKU
SENDAI, JAPON.