Tôhoku Math. Journ.
23(1971), 491-524.

LE DEFAUT MODIFIE DE SYSTEMES ET SES APPLICATIONS*)

NOBUSHIGE TODA

(Received Feb. 19, 1971)

1. Introductin. Soient $f=(f_0,\cdots,f_n)$ $(n\geqq 1)$ un système d'ordre ρ, $0<\rho\leqq\infty$, dans le plan fini $|z|<\infty$ et $\mathcal{F}$ une famille de combinaisons linéaires de $f_0,\cdots,f_n$, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes. Alors, le nombre de combinaisons dans $\mathcal{F}$ exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut 1 est au plus égal à 2n et s'il est plus grand que n, l'ordre de f est entier ou infini ([9]). D'autre part, on a introduit une notion nouvelle, c'est-à-dire un défaut modifié, aux fonctions méromorphes transcendants dans le plan ([8]) ou aux fonctions méromorphes d'ordre non zéro dans le cercle-unité ([10]) et démontré que si $f(z)$, méromorphe dans $|z|<\infty$, admet les valeurs déficientes $\{a_i\}_{i=0}^{N}$ telles que $\delta(a_0,f)=1$ et $\sum_{i=1}^{N}\delta(a_i,f)=1$, alors elle est à croissance régulière quand même l'ordre de $f(z)$ est infini ([8]) et que si $g(z)$ est méromorphe et d'ordre non zéro dans $|z|<1$, elle admet au plus deux valeurs exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut 1 ([10]). Dans ce mémoire, on applique l'idée au cas de systèmes et donne quelques améliorations du résultat cité au début de cette introduction. De plus, on étend quelques résultats obtenus dans [8] et [10] au cas de systèmes.

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna des fonctions méromorphes (voir [3]).

2. Préliminaires. Dans ce paragraphe, on donne quelques définitions et lemmes qui seront utilisés après.

Soient $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système transcendant dans le plan fini $|z|<\infty$, c'est-à-dire, les fonctions $f_0,\cdots,f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}=\infty\,,$$

*) Ce travail a été fait en partie avec l'aide de la fondatien de Sakkokai (The Sakkokai Foundation).

où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique de f définie par Cartan [1] qui est convexe en $\log r$, et

$$F = a_0 f_0 + \cdots + a_n f_n \ (\not\equiv 0)$$

une combinaison lineéaire, homogène à coefficients méromorphes sans zéros communs à tous dans $|z| < \infty$.

On dit que F est

1) lacunaire si F n'admet pas de zéro dans $|z| < \infty$,
2) exceptionnelle au sens de Picard si F n'admet qu'un nombre fini de zéros dans $|z| < \infty$ au plus;
3) exceptionnelle au sens de Borel si l'ordre de $N(r, 0, F)$ est plus petit que celui de f;
4) exceptionnelle au sens de Nevanlinna si

$$\delta(F) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r,f)} > 0 .$$

DÉFINITION 1. Pour $r_0 > 0$ fixé quelconque et $0 \leqslant \alpha < \infty$

$$T_\alpha(r, r_0, f = T_\alpha(r,f) = \int_{r_0}^{r} \frac{T(t,f)}{t^{1+\alpha}} dt,$$

$$N_\alpha(r, r_0, 0, F) = N_\alpha(r, 0, F) = \int_{r_0}^{r} \frac{N(t, 0, F)}{t^{1+\alpha}} dt .$$

DÉFINITION 2 (Le défaut modifié de F).

$$\delta_\alpha(F) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N_\alpha(r, r_0, 0, F)}{T_\alpha(r, r_0, f)} ,$$

$$\Delta_\alpha(F) = 1 - \liminf_{r\to\infty} \frac{N_\alpha(r, r_0, 0, F)}{T_\alpha(r, r_0, f)} .$$

Soit $U(r)$ une fonction positive, continue, non-décroissante pour $r > 0$ et tendant vers l'infini quand $r \to \infty$. On dit que la quantité

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log U(r)}{\log r} = \rho_U$$

est l'ordre de U. Pour un nombre $r_0 > 0$ fixé quelconque et $0 \leqslant \alpha < \infty$, on met

$$U_\alpha(r, r_0) = U_\alpha(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{U(t)}{t^{1+\alpha}} dt\,.$$

DÉFINITION 3. Pour $0 \leqq \alpha < \infty$,

$$C_\alpha(f) = \{a(z);\ \text{méromorphe dans } |z| < \infty \text{ et } T_\alpha(r, r_0, a) = o(T_\alpha(r, r_0, f)) \text{ quand } r \to \infty\}\,;$$

$$C_\alpha(U) = \{a(z);\ \text{méromorphe dans } |z| < \infty \text{ et } T_\alpha(r, r_0, a) = o(U_\alpha(r, r_0)) \text{ quand } r \to \infty\}\,.$$

DÉFINITION 4. On dit qu'un nombre α est admissible à f (ou à U) si

$$\begin{array}{lll} & \alpha = 0 & \text{quand } \rho = 0 \text{ (ou } \rho_U = 0); \\ (1) & 0 \leqq \alpha < \rho & \text{quand } 0 < \rho < \infty \text{ (ou } 0 < \rho_U < \infty); \\ & 0 < \alpha < \infty & \text{quand } \rho = \infty \text{ (ou } \rho_U = \infty), \end{array}$$

où ρ est l'ordre de f:

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \rho\,.$$

Puis, on donne quelques lemmes.

LEMME 1.

$$N(r, 0, F) - N(r, \infty, F) \leqq T(r, f) + \sum_{i=0}^{n} m(r, a_i) + O(1)\,.$$

En effect, on peut prouver ce lemme facilement d'après un théorème de Jensen et la définition de $T(r, f)$.

LEMME 2. *Pour $i \neq j$, $f_j \not\equiv 0$, on a*

$$T(r, f_i/f_j) - O(1) < T(r, f) < \sum_{k\neq j} T(r, f_k/f_j) + O(1)$$

(voir [4]).

LEMME 3. *Soit $\phi(z)$ une fonction méromorphe dans le plan $|z| < \infty$, alors on a*

$$\int_{r_0}^{r} \frac{m(t, \phi'/\phi)}{t^{1+\alpha}} dt = O\left(\int_{r_0}^{r} \frac{\log^+ T(t, \phi)}{t^{1+\alpha}} dt\right)$$

pour $r_0 > 0$ *et* $\alpha > 0$ ([3]).

3. Conséquences directes. Dans ce paragraphe, on donne quelques conséquences directes des définitions données dans le paragraphe 2.

PROPOSITION 1. *Soient* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système transcendant d'ordre* ρ, $0 \leqq \rho \leqq \infty$, *dans le plan* $|z| < \infty$ *et* α *un nombre admissble à* f *quelconque, alors on a*

1) $T_\alpha(r, r_0, f)$ *tend vers l'infini monotonement quand* $r \to \infty$;

2)

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log T_\alpha(r, r_0, f)}{\log r} = \begin{cases} \rho - \alpha & \textit{quand } \rho < \infty \\ \infty & \textit{quand } \rho = \infty \end{cases}$$

et

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T_0(r, r_0, f)}{(\log r)^2} = \infty .$$

DÉMONSTRATION. D'abord, on démontre 2). Comme

$$2\int_{r_0}^{r} \frac{\log t}{t} dt = (\log r)^2 - (\log r_0)^2,$$

on a

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T_0(r, r_0, f)}{(\log r)^2} = \infty$$

de l'hypothèse tout de suite. Puis, de la définition 1,

$$T_\alpha(2r, r_0, f) \geqq \int_{r}^{2r} \frac{T(t, f)}{t^{1+\alpha}} dt \geqq (1 - 2^{-\alpha}) r^{-\alpha} T(r, f),$$

de sorte que l'on a

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log T_\alpha(r, r_0, f)}{\log r} \begin{cases} \geqq \rho - \alpha \text{ quand } \rho < \infty \\ = \infty \qquad\qquad \rho = \infty . \end{cases}$$

D'autre part, supposons que $\rho<\infty$. Alors, pour un nombre ε positif donné quelconque, on a

$$T_\alpha(r, r_0, f)<r^{\rho+\varepsilon-\alpha}\ (r\geqq r_1(\varepsilon)).$$

Cela veut dire que

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log T_\alpha(r, r_0, f)}{\log r}\leqq\rho-\alpha.$$

On obtient 2). On peut démontrer 1) facilement de 2) en utilisant que $T(r, f)$ est croissante et positive.

N.B. 1. Ces deux propriétés sont indépendantes du choix de r_0 visiblement.

PROPOSITION 2. *Soient $f=(f_0, \cdots, f_n)$ un système d'ordre ρ, $0<\rho\leqq\infty$, dans $|z|<\infty$ et $0<\alpha<\beta<\rho$. Alors, on a*
1) *$C_\alpha(f)$ est indépendant du choix de r_0;*
2) *$C(f)\subset C_\alpha(f)\subset C_\beta(f)$,*
où $C(f)=\{a(z)$; méromorphe dans $|z|<\infty$ et $T(r, a)=o(T(r, f))$ quand $r\to\infty\}$.

DÉMONSTRATION. 1) Soient $r_0'<r_0''$, alors

$$T_\alpha(r, r_0', a)=T_\alpha(r, r_0'', a)+T_\alpha(r_0'', r_0', a)$$

et

$$T_\alpha(r, r_0', f)=T_\alpha(r, r_0'', f)+T_\alpha(r_0'', r_0', f).$$

$T_\alpha(r_0'', r_0', a)$ et $T_\alpha(r_0'', r_0', f)$ étant finis, on a

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{T_\alpha(r, r_0', a)}{T_\alpha(r, r_0', f)}=0 \text{ si et seulement si } \limsup_{r\to\infty}\frac{T_\alpha(r, r_0'', a)}{T_\alpha(r, r_0'', f)}=0$$

de la proposition 1.

2) La relation $C(f)\subset C_\alpha(f)$ est obtenue par l'inégalité

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{T_\alpha(r, a)}{T_\alpha(r, f)}\leqq\limsup_{r\to\infty}\frac{T_\alpha(r, a)}{T_\alpha(r, f)}$$

pour une fonction méromorphe $a(z)$ dans $|z|<\infty$.

Puis, on démontre la relation $C_\alpha(f)\subset C_\beta(f)$. Soit $\gamma=\beta-\alpha$, qui est positif. Des deux égalités suivantes:

$$T_\beta(r,f)=\gamma\int_{r_0}^{r}\frac{T_\alpha(t,f)}{t^{1+\gamma}}dt+\frac{T_\alpha(r,f)}{r^\gamma}$$

et

$$T_\beta(r,a)=\gamma\int_{r_0}^{r}\frac{T_\alpha(t,a)}{t^{1+\gamma}}dt+\frac{T_\alpha(r,a)}{r^\gamma},$$

on obtient l'inégalité

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{T_\beta(r,a)}{T_\beta(r,f)}\leqq\limsup_{r\to\infty}\frac{T_\alpha(r,a)}{T_\alpha(r,f)}.$$

De cette inégalité, si a appartient à $C_\alpha(f)$, elle appartient à $C_\beta(f)$.

PROPOSITION 3. *Soient $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système transcendant d'ordre ρ dans le plan $|z|<\infty$ et*

$$F=\sum_{i=0}^{n}a_if_i \qquad (\not\equiv 0)$$

une combinaison linéaire de $f_0,\cdots,f_n$ homogène à coefficients appartenant à $C_\alpha(f)$ et n'ayant pas de zéros communs à tous où α est admissible à f ou égal à zèro. Alors, on obtient

1) *$\delta_\alpha(F)$ et $\Delta_\alpha(F)$ sont indépendantes du choix de r_0 et*

$$0\leqq\delta_\alpha(F)\leqq\Delta_\alpha(F)\leqq 1;$$

2) *quand $\rho\neq 0$, pour $\alpha<\beta<\rho$,*

$$0\leqq\delta_\alpha(F)\leqq\delta_\beta(F)\leqq\Delta_\beta(F)\leqq\Delta_\alpha(F)\leqq 1;$$

3) *si a_i $(i=0,\cdots,n)\in C(f)$, alors*

$$0\leqq\delta(F)\leqq\delta_\alpha(F)\leqq\Delta_\alpha(F)\leqq\Delta(F)\leqq 1.$$

DÉMONSTRATION. 1) L'indépendance de $\delta_\alpha(F)$ et $\Delta_\alpha(F)$ du choix de r_0 est visible de la definition 2 et la proposition 1. Puis, du lemme 1, on a

$$N(r,0,F) \leqq T(r,f) + \sum_{i=0}^{n} T(r,a_i) + O(1),$$

donc

$$N_\alpha(r,0,F) \leqq T_\alpha(r,f) + \sum_{i=0}^{n} T_\alpha(r,a_i) + \begin{cases} O(\log r) & (\alpha = 0) \\ O(1) & (\alpha > 0). \end{cases}$$

De l'hypothèse $a_i \in C_\alpha(f)$ et de la proposition 1, on obtient

$$0 \leqq \liminf_{r\to\infty} \frac{N_\alpha(r,0,F)}{T_\alpha(r,f)} \leqq \limsup_{r\to\infty} \frac{N_\alpha(r,0,F)}{T_\alpha(r,f)} \leqq 1.$$

Cela veut dire que

$$0 \leqq \delta_\alpha(F) \leqq \Delta_\alpha(F) \leqq 1.$$

2) Comme dans la démonstration de la proposition 2, on a

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{N_\beta(r,0,F)}{T_\beta(r,f)} \leqq \limsup_{r\to\infty} \frac{N_\alpha(r,0,F)}{T_\alpha(r,f)}$$

et

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{N_\beta(r,0,F)}{T_\beta(r,r)} \geqq \liminf_{r\to\infty} \frac{N_\alpha(r,0,F)}{T_\alpha(r,f)},$$

de sorte que l'on obtient le résultat de la proposition 1 et la proposition 2.

3) De la même manière que dans 2), on peut prouver ce résultat.

PROPOSITION 4. *Soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant d'ordre ρ dans le plan $|z| < \infty$ et*

$$F = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i \qquad (\not\equiv 0)$$

une combinaison linéaire de $f_0, \cdots, f_n$, homogène à coefficients méromorphes et n'ayant pas de zéros communs à tous dans le plan $|z| < \infty$. Alors, on a

1) *quand $\rho \neq 0$, si F est exceptionnelle au sens de Borel, il existe un nombre α admissible à f tel que*

$$\delta_\alpha(F) = 1\,;$$

2) *si* $\delta(F)=1$, *alors* $\delta_\alpha(F)=1$ *pour* α *admissible à* f *ou égal à zéro.*

DÉMONSTRATION. 1) Prendrons un nombre α tel que

$$\text{l'ordre de } N(r, 0, F) < \alpha < \rho\,,$$

alors il est admissible à f et on a

$$N_\alpha(r, r_0, 0, F) = \int_{r_0}^{r} \frac{N(t, 0, F)}{t^{1+\alpha}} dt = O(1)$$

pour $r \to \infty$ et $r_0 > 0$. De plus, de la proposition 1, $T_\alpha(r, r_0, f)$ tend vers l'infini quand $r \to \infty$. Donc, on a

$$\delta_\alpha(F) = 1\,.$$

2) Comme on a l'inégalité

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{N_\alpha(r, 0, F)}{T_\alpha(r, f)} \leqq \limsup_{\alpha\to\infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)}\,,$$

en utilisant la définition 2 on obtient

$$\delta(F) \leqq \delta_\alpha(F) \leqq 1\,.$$

Cela entraîne que $\delta_\alpha(F) = 1$.

N.B. 2. On peut donner un exemple de système qui admet une combinaison linéaire, homogène à coefficients constants et exceptionnelle au sens de Borel telle que le défaut n'est pas égal à 1. Inversement, il existe un exemple de système admettant une combinaison linéaire, homogène à coefficients constants telle que le défaut est égal à 1, qui n'est pas exceptionnelle au sens de Borel.

EXEMPLE 1. Comme dans le cas de fonctions méromorphes, on peut donner un exemple de système qui admet une combinaison F linéaire, homogène à coefficients constants telle que pour un nombre α admissible à ce système

$$\delta_\alpha(F) \neq \delta(F)\,.$$

En effet, Soient $f_1, \cdots, f_n$ n fonctions entières d'ordre ρ et d'ordre inférieur λ, $0 \leqq \lambda < \rho < \infty$, telles que $\sum_{i=1}^{n} T(r, f_i)$ est d'ordre ρ et d'ordre inférieur λ et $\tilde{f}_0$ une fonction entière à croissance régulière d'ordre μ, $\lambda < \mu < \rho$. Il existe une valeur ω_0 n'etant pas exceptionnelle au sens de Valiron et telle que $f_0 = \tilde{f}_0 - \omega_0$, $f_1, \cdots, f_n$ n'admettent pas de zéros communs à toutes. Alors, on peut prouver facilement en utilisant le lemme 2

$$\delta(f_0) = 1 - \limsup_{r \to \infty} \frac{N(r, 0, f_0)}{T(r, f)} = 0,$$

où $f = (f_0, \cdots, f_n)$. D'autre part, pour, $\mu < \alpha < \rho$,

$$N_\alpha(r, r_0, 0, f_0) = \int_{r_0}^{r} \frac{N(t, 0, f_0)}{t^{1+\alpha}} dt = O(1)$$

et $T_\alpha(r, r_0, f)$ tend vers l'infini parce que l'ordre de f est ρ. Cela veut dire que $\delta_\alpha(f_0) = 1$.

4. Le nombre de combinaisons exceptionnelles. Dans ce paragraphe, on cherche le nombre de combinaisons F telles que $\delta_\alpha(F) = 1$ et donne quelques améliorations du théorème 1 dans [9]. D'abord, on donne un lemme qui joue un rôle fondamental.

LEMME 4. *Soient $\phi_1, \cdots, \phi_\nu$ $(\nu \geqq 2)$ ν fonctions méromorphes et linéairement indépendantes dans $|z| < \infty$ telles que*

$$\sum_{i=1}^{\nu} \phi_i = 1.$$

Alors, pour tout i $(= 1, \cdots, \nu)$, on a

$$T(r, \phi_i) < \sum_{i=1}^{\nu} N(r, 0, \phi_i) + N(r, D) + S(r)$$

où

$$D = \|\phi_1, \cdots, \phi_\nu\|$$

et

$$(2) \qquad \int_{r_0}^{r} \frac{S(t)}{t^{1+\alpha}} dt = O\left(\sum_{i=1}^{\nu} \int_{r_0}^{r} \frac{\log^+ T(t, \phi_i)}{t^{1+\alpha}} dt\right)$$

pour $r_0 > 0$ *et* $\alpha > 0$.

DÉMONSTRATION. Grâce à un théorème dans [3, p.116], on ne prouve que l'estimation (2) du terme d'erreur $S(r)$. Comme $S(r)$ est plus petit que

$$\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu-1} m(r, \phi_i^{(k)}/\phi_i^{(k-1)})$$

([3, p.115]), on estime d'abord

$$m(r, \phi_i^{(k)}/\phi_i^{(k-1)}).$$

En utilisant le lemme 3, on a

$$(3) \qquad \int_{r_0}^{r} \frac{m(t, \phi_i^{(k)}/\phi_i^{(k-1)})}{t^{1+\alpha}} dt = O\left(\int_{r_0}^{r} \frac{\log^+ T(t, \phi_i^{(k-1)})}{t^{1+\alpha}} dt\right).$$

D'autre part, d'après les inégalités suivantes pour une fonction méromorphe $f(z)$ dans $|z| < \infty$

$$m(r, f') \leqq m(r, f) + m(r, f'/f)$$

et

$$N(r, f) \leqq 2N(r, f),$$

on a

$$T(r, f') \leqq 2\mathrm{T}(r, f) + m(r, f'/f).$$

En appliquant cette inégalité à $\phi_i^{(k-2)} = f$, on obtint

$$\log^+ T(r, \phi_i^{(k-1)}) \leqq \log^+ T(r, \phi_i^{(k-1)}) + m(r, \phi_i^{(k-1)}/\phi_i^{(k-2)}) + O(1).$$

Combinant cette inégalité avec (3) et par induction, on obtient

$$\int_{r_0}^{r} \frac{m(t, \phi_i^{(k)}/\phi_i^{(k-1)})}{t^{1+\alpha}} dt = O\left(\int_{r_0}^{r} \frac{\log^+ T(r, \phi_i)}{t^{1+\alpha}} dt\right).$$

En sommant cette estimation pour $i=1,\cdots,\nu$ et $k=1,\cdots,\nu-1$, on a

$$\int_{r_0}^{r}\frac{S(t)}{t^{1+\alpha}}dt = O\left(\sum_{i=1}^{\nu}\int_{r_0}^{r}\frac{\log^+ T(t,\phi_i)}{t^{1+\alpha}}dt\right).$$

LEMME 5. *Soient* $g_0,\cdots,g_\nu, c_0,\cdots,c_\nu(\nu\geqq 1)$ *des fonctions méromorphes dans* $|z|<\infty$, $U(r)$ *une fonction positive, continue, non-décroissante pour* $r>0$ *d'ordre* ρ, $0<\rho\leqq\infty$ et $\lim\limits_{r\to\infty} U(r)/\log r=\infty$, *et* α *un nombre admissible à* U *tels que*

1) *pour* $i\neq j$ *quelconque*

$$0<\limsup_{r\to\infty}\frac{T_\alpha(r,g_i/g_j)}{U_\alpha(r)}<\infty\,;$$

2) *pour tout* i,

$$N_\alpha r, 0, g_i) = o(U_\alpha(r)) \text{ et } N_\alpha(r,g_i) = o(U_\alpha(r))$$

et

3) *toutes les fonctions* c_i $(i=0,\cdots,\nu)$ *appartiennet* à $C_\alpha(U)$.
Si

$$\sum_{i=0}^{\nu} c_i g_i = 0,$$

on a

$$c_0\equiv c_1\equiv\cdots\equiv c_\nu\equiv 0.$$

DÉMONSTRATION. On démontre ce lemme par induction.

1) Le cas où le nombre de fonctions est égal à deux: $\nu=1$. Supposons que $c_0\not\equiv 0$, $c_1\not\equiv 0$. Alors, de l'hypothèse on a

$$g_1/g_0 = -c_0/c_1,$$

de sorte que

$$T_\alpha(r,g_1/g_0) = T_\alpha(r,c_0/c_1)\leqq T_\alpha(r,c_0)+T_\alpha(r,c_1)+o(U_\alpha(r)),$$

En divisant par $U_\alpha(r)$ et en prenant la limite supérieure des deux cotés, on obtient

$$0 < \limsup_{r\to\infty} \frac{T_\alpha(r, g_1/g_0)}{U_\alpha(r)} \leqq \limsup_{r\to\infty} \frac{T_\alpha(r, c_0)}{U_\alpha(r)} + \limsup_{r\to\infty} \frac{T_\alpha(r, c_1)}{U_\alpha(r)} = 0$$

de 1) et 3), qui est absurde. Cela veut dire qu'un des c_0, c_1 est égal à zéro identiquement. Donc,

$$c_0 \equiv c_0 \equiv 0 .$$

2) Le cas où le nombre de fonctions est plus grand que 2: $\nu \geqq 2$. Supposons que ce lemme soit vrai quand le nombre de fonctions est au plus égal à ν.

Si

$$c_0 \not\equiv 0, \cdots, c_\nu \not\equiv 0 ,$$

soit

$$\phi_i = -\frac{c_i g_i}{c_\nu g_\nu} \qquad (i = 0, \cdots, \nu - 1) ,$$

alors

$$\sum_{i=0}^{\nu-1} \phi_i = 1 .$$

De plus, $\phi_0, \cdots, \phi_{\nu-1}$ sont méromorphes et linéairement indépendantes dans $|z| < \infty$. En effet, si pour des constantes a_i $(i = 0, \cdots, \nu-1)$

$$\sum_{i=0}^{\nu-1} a_i \phi_i(z) = 0 ,$$

alors

$$\sum_{i=0}^{\nu-1} a_i c_i f_i = 0 .$$

Comme les fonctions $a_i c_i f_i$ $(i = 0, \cdots, \nu-1)$ satisfont à l'hypothèse de ce lemme, il faut que

$$a_i c_i \equiv 0 \qquad (i = 0, \cdots, \nu - 1)$$

de la supposition d'induction. Cela veut dire que

$$a_i = 0 \qquad (i = 0, \cdots, \nu - 1) .$$

En appliquant le lemme 4 aux $\phi_0, \cdots, \phi_{\nu-1}$, on a pour $i=0, \cdots, \nu-1$

$$(4) \qquad T(r, \phi_i) < \sum_{k=0}^{\nu-1} N(r, 0, \phi_k) + N(r, D) + S(r),$$

où

$$D = \|\phi_0, \cdots, \phi_{\nu-1}\|$$

et $S(r)$ satisfait à (2) dans le lemme 4.

Ici,

$$(5) \qquad T(r, g_i/g_\nu) - T(r, c_i) - T(r, c_\nu - O(1) < T(r, \phi_i),$$

$$(6) \qquad N(r, 0, \phi_k) < N(r, 0, g_k) + N(r, g_\nu) + T(r, c_k) + T(r, c_\nu) + O(1)$$

et

$$(7) \qquad N(r, D) < (\nu+1) \sum_{i=0}^{\nu-1} \{N(r, g_i) + T(r, c_i)\} + \nu(\nu+1)\{N(r, 0, g_\nu) + T(r, c_\nu)\} + O(1).$$

Divisant les inégalités (4), (5), (6) et (7) par $r^{1+\alpha}$, intégrant de r_0 jusqu'à r ($r_0 > 0$), combinant les inégalités obtenues et utilisant 1), 2) et 3), on a

$$0 < \limsup_{r\to\infty} \frac{T_\alpha(r, g_i/g_\nu)}{U_\alpha(r)} = 0$$

parce que

$$\int_{r_0}^{r} \frac{S(r)}{r^{1+\alpha}} dr = O\left(\sum_{i=0}^{\nu-1} \int_{r_0}^{r} \frac{\log^+ T(r, \phi_i)}{r^{1+\alpha}} dr\right) = o(U_\alpha(r))$$

du lemme 4, qui est absurde. Cela veut dire qu'au moins une des $c_0, \cdots, c_\nu$ est égale à zéro identiquement. Utilisant la supposition d'induction, on a le résultat

$$c_0 \equiv c_1 \equiv \cdots \equiv c_\nu \equiv 0.$$

Utilisant ce lemme, on a le

THÉORÈME 1. *Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan fini $|z| < \infty$ avec au plus λ_c relations linéaires homogènes indépendantes à* *coefficients constants,* λ_p *à coefficients rationnels et* λ_α *à coefficients appartenant à* $C_\alpha(f)$ *entre les fonctions* $f_0,\cdots,f_n$ *respectivement* $(0\leqq\lambda_c\leqq\lambda_p\leqq\lambda_\alpha\leqq n-1)$ *oú* α *est un nombre admissible à* f *quelconque. Alors,*

[I] *le nombre de combinaisons* F *de* $f_0,\cdots,f_n$, *linéaires, homogènes à coefficient constants, linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *telles que* $\delta_\alpha(F)=1$ *est au plus égal à* $n+1+\left[\frac{\lambda_c}{n-\lambda_\alpha}\right]$;

[II] *le nombre de combinaisons* H *de* $f_0,\cdots,f_n$ *linéaires, homogènes à coefficients rationnels n'ayant pas de zéros communs à tous, linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *telles que* $\delta_\alpha(H)=1$ *est au plus égal à* $n+1+\left[\frac{\lambda_p}{n-\lambda_\alpha}\right]$;

[III] *le nombre de combinaisons* G *de* $f_0,\cdots,f_n$, *linéaires, homogènes a coefficient à* $C_\alpha(f)$ *et n'ayant pas de zéros commus à tous, linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *telles que* $\delta_\alpha(G)=1$ *est au plus égal à* $n+\left[\frac{n_\alpha}{n-\lambda_\alpha}\right]$.

DÉMONSTRATION. [I] Supposons qu'il y ait $n+1+\mu$ combinaisons $\{F_p\}_{p=0}^{n+\mu}$ de $f_0,\cdots,f_n$, linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ telles que $\delta_\alpha(F_p)=1$ $(p=0,\cdots,.n+\mu)$;

$$F_p=\sum_{q=0}^{n}a_{pq}f_q \qquad (p=0.\cdots,n+\mu)$$

où les a_{pq} sont des constantes et aucun des déterminants d'ordre $n+1$ que l'on peut extraire du tableau des coefficients ne soit nul. Il suffit de considérer le cas où $\mu>0$. Soit

$$A=(a_{pq})_{q=0,\cdots,n}^{p=0,\cdots,n}, \text{ alors } |A|\neq 0,$$

$$(F_0,\cdots,F_n)^t=A(f_0,\cdots,f_n)^t$$

et

$$|T(r,f)-T(r,F)|<O(1)$$

où $F=(F_0,\cdots,F_n)$. De plus, le nombre maximum de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0,\cdots,f_n$ est égal à celui entre les fonctions $E_0,\cdots,F_n$.

Représentons $F_{n+1},\cdots,F_{n+\mu}$ par $F_0,\cdots,F_n$, alors on a

$$F_{n+j}=\sum_{q=0}^{n}\alpha_{jq}F_q \qquad (j=1,\cdots,\mu)$$

où les α_{jq} sont des constantes que l'on peut calculer à partir des a_{pq}. La condition d'indépendance linéaire $n+1$ à $n+1$ se traduit maintenant de la façon suivante: Tous les déterminants, d'ordre quelconqe, que l'on peut extraire du tableau

$$(\alpha_{jq})_{q=0,\cdots,n}^{j=1,\cdots,\mu}$$

sont différents de zéro.

Comme les combinaisons

$$F_{n+j} = \sum_{q=0}^{n} \alpha_{jq} F_q \qquad (j = 1, \cdots, \mu)$$

satisfont à $\delta_\alpha(F_p) = 1$ $(p = 0, \cdots, n+\mu)$, grâce au lemme 5, utilisant $T(r,f)$ au lieu de $U(r)$ les fonctions $F_0, \cdots, F_n$ se repartissent en un certain nombre de classes jouissant des propriétés suivantes:

A) chaque classe, sauf une peut-être, comprend deux fonctions au moins;

B) les rapports mutuels d'une même classe appartiennent à $C_\alpha(f)$;

C) chaque combinaison F_{n+j} $(j = 1, \cdots, \mu)$ est somme de combinaisons partielles, chacune de celles-ci faisant intervenir les fonctions figurant dans l'une des classes; à l'exception de l'une d'elles, les combinaisons partielles sont identiquement nulles.

S'il y a $c_\alpha(\geqq 2)$ classes, le nombre total des combinaisons partielles identiquement nulles est égal à

$$(c_\alpha - 1)\mu$$

et on voit facilement que ces combinaisons sont linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. Cela veut dire qu'il faut

$$(c_\alpha - 1)\mu \leqq \lambda_c . \tag{9}$$

D'autre part, l'existence d'une classe de p fonctions implique l'existence de $p-1$ relations à coefficients appartenant à $C_\alpha(f)$ (les rapports mutuels d'une même classe appartenant à $C_\alpha(f)$).

L'existence de c_α classes entraîne

$$\sum_{i=1}^{c_\alpha} (p_i - 1) = n + 1 - c_\alpha$$

relations; d'où

(10) $$n+1-c_\alpha \leqq \lambda_\alpha .$$

Des inégalités (9) et (10), on a

$$\mu \leqq \frac{\lambda_c}{c_\alpha-1} \leqq \frac{\lambda_c}{n-\lambda_\alpha},$$

ce qui établit [I].

[II] On peut démontrer ce cas comme dans [I] en utilisant que les fonctions rationnelles appartiennent à $C_\alpha(f)$.

[III] Supposons qu'il y ait $n+1+\mu$ combinaisons $\{G_p\}_{p=0}^{n+\mu}$ de $f_0, \cdots, f_n$, linéaires, homogènes à coefficients appartenant à $C_\alpha(f)$ et n'ayant pas de zéros communs à tous, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ telles que $\delta_\alpha(G_p)=1$ $(p=0,\cdots,n+\mu)$:

$$G_p=\sum_{q=0}^{n} b_{pq} f_q \qquad (p=0,\cdots,n+\mu)$$

où les b_{pq} appartiennent à $C_\alpha(f)$ et aucun des déterminants d'ordre $n+1$ que l'on peut extraire du tableau $(b_{pq})_{q=0,\cdots,n}^{p=0,\cdots,n+\mu}$ ne soit identiquement nul. Il suffit de considérer le cas où $\mu>0$.

Représentons $G_{n+1},\cdots,G_{n+\mu}$ par $G_0,\cdots,G_n$, alors

(11) $$G_{n+j}=\sum_{q=0}^{n} \beta_{jq} G_q \qquad (j=1,\cdots,\mu)$$

où les β_{jq} appartiennent à $C_\alpha(f)$ que l'on peut calculer à partir des b_{pq}. L'indépendance linéaire $n+1$ à $n+1$ se traduit maintenant de la façon suivante: Aucun des déterminants, d'ordre quelconque, que l'on peut extraire du tableau $(\beta_{jq})_{q=0,\cdots,n}^{j=1,\cdots,\mu}$ ne soit identiquement nul.

Des hypothèses, on obtient pour tout p

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N_\alpha(r,0,G_p)}{T_\alpha(r,f)}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to\infty}\frac{N_\alpha(r,G_p)}{T_\alpha(r,f)}=0 .$$

De plus, en utilisant le lemme 2, on peut démontrer facilement

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{T_\alpha(r,G_p/G_q)}{T_\alpha(r,f)}<\infty$$

pour $p\neq q$.

Donc, on peut appliquer le lemme 5 à (11) comme $U(r)=T(r,f)$. Alors, les fonctions $G_0, \cdots, G_n$ se repartissent en un certain nombre de classes jouissant des propriétés A), B) et C) données dans [I].

S'il y a c ($\geqq 2$) classes, le nombre total de combinaisons partielles identiquement nulles est égal à

$$(c-1)\mu$$

et ces combinaisons sont linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$.

D'autre part, l'existence de p fonctions d'une même classe entraîne $p-1$ relations linéaires indépendantes à coefficients appartenant à $C_\alpha(f)$.

L'existence de c classes imlique l'existence de

$$\sum_{i=1}^{c}(p_i-1)=n+1-c$$

relations, qui n'excède pas λ_α parce que le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients appartnant à $C_\alpha(f)$ entre $f_0, \cdots, f_n$ est égal à celui entre $G_0, \cdots, G_n$. Donc, on a

$$(c-1)\leqq n+1-c\leqq\lambda_\alpha .$$

De ces inégalités, on obtient

$$\mu\leqq\frac{n+1-c}{c-1}=\frac{n}{c-1}-1\leqq\frac{n}{n-\lambda_\alpha}-1,$$

ce qui établit [III].

N.B. 3. $n+1+\left[\dfrac{\lambda_c}{n-\lambda_\alpha}\right]\leqq n+\lambda_c+1\leqq 2n$, $n+1+\left[\dfrac{\lambda_p}{n-\lambda_\alpha}\right]\leqq n+\lambda_p+1\leqq 2n$ et $n+\left[\dfrac{n}{\mathrm{n}-\lambda_\alpha}\right]\leqq 2n$.

Comme une conséquence importante de ce théorème, on a le

THÉORÈM 2. *Soient $f=(f_0, \cdots, f_n)$ un système d'ordre ρ, $0<\rho\leqq\infty$, dans le plan fini $|z|<\infty$, α un nombre admissible à f quelconque et λ_c, λ_p, λ_α les nombres définis dans le théorème* 1. *Alors,*

[I] *le nombre de combinaisons F de $f_0, \cdots, f_n$ linéaires, homogènes à coefficients constants, exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna* *de défaut* 1 *et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est au plus égal à* $n+1+\left[\frac{\lambda_c}{n-\bar{\lambda}}\right]$;

[II] *le nombre de combinaisons G de* $f_0,\cdots,f_n$ *linéaires; homogènes à coefficients rationnels n'ayant pas de zéros communs à tous, exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut* 1 *est au plus égal à* $n+1+\left[\frac{\lambda_p}{n-\bar{\lambda}}\right]$, *où* $\bar{\lambda}=\sup_\alpha \lambda_\alpha$ $(\leqq n-1)$.

DÉMONSTRATION. [I] D'après la proposition 4, il y a un nombre α_F admissible à f tel que

$$\delta_{\alpha_F}(F) = 1 .$$

Comme il existe au plus $2n$ combinaisons linéaires satisfaisant à l'hypothèse de ce théorème [I] ([9]), il y a un nombre α admissible à f et indépendant de F tel que

$$\delta_\alpha(F) = 1 ,$$

de sorte que le nombre de combinaisons satisfaisant à l'hypothèse de ce théorème [I] est au plus égal à $n+1+\left[\frac{\lambda_c}{n-\lambda_\alpha}\right]$ du théorème 1 [I], ce qui établit [I] parce que $\lambda_\alpha \leqq \bar{\lambda}$.

[II] On peut démontrer ce cas comme dans [I] en utilisant le théorème 1 [II] et le théorème 4 [II] dans [7].

N.B. 4. $n+1+\left[\frac{\lambda_c}{n-\bar{\lambda}}\right]\leqq n+\lambda_c+1\leqq 2n$ et $n+1+\left[\frac{\lambda_p}{n-\bar{\lambda}}\right]\leqq n+\lambda_p+1\leqq 2n$. Donc, ce théorème est une amélioration du théorème 1 dans [9] et du théorème 4 [II] dans [7].

5. $\boldsymbol{K_\alpha(f)}$ **et ses applications.** Dans ce paragraphe, on recherche quelques relations entre la croissance du système et le nombre de combinaisons linéaires, exceptionnelles.

Soient $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système transcendant dans le plan fini $|z|<\infty$ et α un nombre admissible à f ou égal à zéro. Comme dans le cas des fonctions méromorphes ([8]), on définit $K_\alpha(f)$ d'abord:

DÉFINITION 5.

$$K_\alpha(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} N_\alpha(r, 0, f_i)}{T_\alpha(r,f)}$$

où $N(r, 0, f_i) \equiv 0$ si $f_i \equiv 0$.

Le coté droit est indépendant du choix de r_0.

PROPOSITION 5. *Pour deux nombers $\alpha < \beta$ admissibles à f ou $\alpha = 0$, on a*

$$K_\beta(f) \leqq K_\alpha(f) \leqq K(f)$$

où

$$K(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} N(r, 0, f_i)}{T(r,f)},$$

qui est définie dans [4].

On peut démontrer cette proposition comme dans la démonstration de la proposition 3.

THÉORÈME 3. *Soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système d'ordre non-entier ρ, $0 < \rho < \infty$, dans le plan fini $|z| < \infty$ et α un nombre admissible à f quelconque. Alors, on a*

$$K_\alpha(f) \geqq K(\rho)$$

où

$$K(\rho) = \begin{cases} 1-\rho & \text{quand} \quad 0 < \rho < 1 \\ \dfrac{(q+1-\rho)(\rho-q)}{\rho c(q)} & \text{quand } [\rho] = q \geqq 1 \end{cases}$$

et $c(0) = 1$, $c(q) = 2(q+1)(2+\log(q+1))$ *quand* $q \geqq 1$.

DÉMONSTRATION. Soit $[\rho] = q$, alors on a l'inégalité

$$T(r,f) \leqq c(q)\left\{qr^q \int_0^r \frac{N(t)}{t^{q+1}}dt + (q+1)r^{q+1}\int_r^\infty \frac{N(t)}{t^{q+1}}dt\right\} + O(\log r) + O(r^q)$$

comme dans la démonstration du théorème 1 dans [4]. Utilisant cette inégalité, on calcule comme dans le cas des fonctions méromorphes (voir [8]) et obtient le résultat similairement.

COROLLAIRE 1. Soit $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z|<\infty$. S'il existe un nombre α admissible à f tel que $K_\alpha(f)=0$, alors l'ordre de f est entier ou infini.

LEMME 6. *Soit* $f=(f_0,\cdots,f_n)$ *un système dans le plan* $|z|<\infty$. *Si* $\sigma>0$ *et* $r>0$, *on obtient*

$$T(r,f)\leqq\frac{4}{\sigma-1}T(\sigma r,f)+\max_{0\leqq j\leqq n}N(\sigma r,0,f_j)+O(1) \tag{12}$$

où $N(r,0,f_j)\equiv 0$ *quand* $f_j\equiv 0$ ([5]).

THÉORÈME 4. *Soit* $f=(f_0,\cdots,f_n)$ *un système transcendant d'ordre* ρ *et d'ordre infériur* μ *dans le plan fini* $|z|<\infty$. *S'il y a* $n+1$ *combinaisons* $\{F_i\}_{i=0}^n$ *de* $f_0,\cdots,f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *telles que pour un nombre* α *admissible à* f

$$K_\alpha(F)<1$$

où $F=(F_0,\cdots,F_n)$, *alors*

$$\rho\geqq 1,\ \mu\geqq\max\ (1-\alpha,0)\quad \textit{quand}\ K_\alpha(F)=0$$

et

$$\rho\geqq\frac{\log\dfrac{1}{K_\alpha(F)(2-K_\alpha(F))}}{\log\left(1+\dfrac{4}{K_\alpha(F)(1-K_\alpha(F))}\right)}\quad \textit{quand}\ K_\alpha(F)>0\,.$$

DÉMONSTRATION. En appliquant le lemme 6 à F, on obtient de (12) divisant par $r^{1+\alpha}$ et intégrant de r_0 (>0) jusqu'à r

$$T_\alpha(r,F)\leqq\frac{4\sigma^\alpha}{\sigma-1}T_\alpha(\sigma r,F)+\sigma^\alpha N_\alpha(\sigma r)+S_{1,\alpha}(r)$$

où

$$N(r) = \sum_{j=0}^{n} N(r, 0, F_j) \text{ et } S_{1,\alpha}(r) = \begin{cases} O(1) & (\alpha > 0) \\ O((\log r)^2) & (\alpha = 0). \end{cases}$$

On calcule le reste comme dans le cas des fonctions méromorphes ([8]) et obtient le résultat en utilisant la relation

$$|T(r,f) - T(r,F)| < O(1)$$

([1]).

COROLLAIRE 2. *Si* $K_\alpha(F) = 0$, *l'ordre de* f *est positif entier ou infini.*

COROLLAIRE 3. *Soit* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système d'ordre fini et non-entier* ρ, *alors le nombre* N_f *de conbinaisons* F *de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut* 1 *et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est au plus égal à* n.

DÉMONSTRATION. Du théorème 2 [I],

$$N_f \leqq 2n$$

en général, de sorte qu'il existe un nombre α admissible à f et indépendant de F tel que

$$\delta_\alpha(F) = 1$$

de la proposition 4. Si

$$N_f \geqq n+1,$$

il faut que l'ordre de f soit entier, qui est absurde à l'hypothèse. Cela veut dire que

$$N_f \leqq n.$$

N.B. 5. C'est une autre démonstration du théorème 2 dans [9].

THÉORÈME 5. *Soient* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système dans* $|z| < \infty$ *d'ordre* $\rho(\leqq\infty)$ *et d'ordre inférieur* μ, $0<\mu<\rho$ *et* τ, α *deux nombres tels que*

1) τ *n'est pas entier et* $\mu < \tau$;
2) $0 < \alpha < \mu$ *et* $\tau + \alpha \leqq \rho$:
3) $[\tau] = [\tau + \alpha]$.

Alors, on obtient

$$K_\alpha(f) \geqq \frac{n+1}{n} \frac{|\sin \pi(\tau+\alpha)|}{K(\alpha, \tau) + |\sin \pi(\tau+\alpha)|}$$

où $K(\alpha, \tau)$ *est un nombre positif ne dépendant que de* α *et* τ, *c'est-à-dire,*

$$K(\alpha, \tau) = 2.\ 2(2(1+1/\tau))^{\tau+\alpha+2}\alpha/(2^\alpha - 1)\,.$$

En effet, on peut démontrer ce théorème en combinant la démonstration du théorème 4 dans [5] avec celle du théorème 5 dans [8].

Comme dans le cas des fonctions méromorphes, on obtient le

COROLLAIRE 4. *Soit* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système d'ordre* ρ, $0 < \rho \leqq \infty$ *et d'ordre inférieur* μ *dans le plan fini* $|z| < \infty$. *Si pour un nombre* α *admissible à* f *et* $0 < \alpha < 1/2$

$$K_\alpha(f) = 0\,,$$

1) *quand* $\rho > \infty$, *alors*

$$\rho - \mu \leqq \alpha\,;$$

2) *quand* $\rho = \infty$, *alors* f *est à croissance régulière.*

COROLLAIRE 5. *Soit* f *un système comme dans le corollaire* 4. *Si pour tout* $\alpha > 0$

$$K_\alpha(f) = 0\,,$$

alors f *est à croissance régulière et* ρ *est entier quand il est fini.*

6. Cas spécial. Dans ce paragraphe, on recherche sur des systèmes dont les ordres sont restreints.

THÉORÈME 6. *Soient* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système d'ordre* ρ, $0 < \rho < 2$, *dans le plan fini* $|z| < \infty$ *et* α *un nombre admissible à* f *quelconque. S'il y a* $n+1$ *cominaisons* $\{F_i\}_{i=0}^n$ *de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *et lacunaires, alors une autre combinaison* F *de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaire, homogène à coefficients constants et* $\delta_\alpha(F) = 1$ *telle que* $\{F, F_i\}_{i=0}^n$ *sont linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est aussi lacunaire.*

DÉMONSTRATION. Représentons F par $F_0, \cdots, F_n$:

$$F = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i F_i\,,$$

alors aucun des α_i n'est nul. En appliquant le lemme 5, F est représentée comme une somme partielle:

$$F = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i(j)} F_{i(j)}$$

où les rapports mutuels de $F_{i(j)}$ $(j=1, \cdots, k)$ appartiennent à $C_\alpha(f)$. (Quand $k=1$, il n'y a rien à prouver). On démontre que ces rapports sont tous constants. Or, d'après l'hypothèse, on peut prouver facilement que

$$mr \leqq T(r,f) \leqq Mr, \qquad (r \leqq r_0,\ M > m > 0) \tag{13}$$

parce que F_i peut être représentée comme

$$F_i = a_i e^{\beta_i z}, \qquad (a_i \neq 0,\ \text{constante})$$

où au moins un des β_i est différent de zéro.

Comme $F_{i(j)}$ $(j=1, \cdots, k)$ n'admet pas de zéro, $F_{i(j_1)}/F_{i(j_2)}$ $(j_1 \neq j_2)$ est constante ou transcendante. Si elle n'est pas constante, on peut écrire

$$g = F_{i(j_1)}/F_{i(j_2)} = ae^{\beta z},\ (a, \beta \neq 0,\ \text{constantes}),$$

de sorte que

$$T_\alpha(r, g) = \frac{|\beta|}{\pi} r + \log^+ |a|$$

et

$$T_\alpha(r, g) = \frac{|\beta| r^{1-\alpha}}{\pi(1-\alpha)} + O(\log r)\,.$$

Cela veut dire que g n'appartient pas à $C_\alpha(f)$ parce que

$$\frac{m}{1-\alpha} r^{1-\alpha} \leqq T_\alpha(r,f) \leqq \frac{M}{1-\alpha} r^{1-\alpha} (r \geqq r_0)\,.$$

C'est une contradiction. Par conséquent, $F_{i(j_1)}/F_{i(j_2)}$ doit être constante. De cela, on obtient

$$F = F_{i(j)} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i(j)} F_{i(j)}/F_{i(1)} = \tilde{\alpha}\, F_{i(1)}, \ (\tilde{\alpha} \neq 0, \text{ constant}).$$

Cela signifie que F n'admet pas de zéro.

COROLLAIRE 6. *Sous les situations du théorème* 6, *si* F *est exceptionnelle au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut* 1, *elle est lacunaire. Donc, le nombre de combinaisons de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *et exceptionnelles au sens de Nevanlinna de défaut* 1 *au moins* $n+1$ *desquelles sont lacunaires est au plus égal à* $n+\left[\dfrac{n}{n-\lambda_c}\right]$ *quand il n'y a entre* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_c *relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients contsants.*

En effet, d'après la proposition 4, il y a un α admissible à f tel que $\delta_\alpha(F) = 1$; par conséquent F est lacunaire. La dérnière partie est obtenue du théorème 16 dans [2].

THÉORÈME 7. *Soient* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système d'ordre* ρ, $0 < \rho < 2$, *dans le plan fini* $|z| < \infty$ *et* α *un nombre admissible à* f *quelconque. S'il y a* $n+1$ *combinaisons* $\{F_i\}_{i=0}^{n}$ *de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients rationnels n'ayant pas de zéros communs à tous, linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *et exceptionnelles au sens de Picard, alors une autre combinaison* F *de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaire, homogène à coefficients rationnels n'ayant pas de zéros communs à tous et* $\delta_\alpha(F) = 1$ *telle que* $\{F, F_i\}_{i=0}^{n}$ *sont linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *est aussi exceptionnelle au sens de Picard.*

DÉMONSTRATION. Représentons F par $F_0, \cdots, F_n$:

$$F = \sum_{j=0}^{n} P_j F_j$$

alors les P_j sont rationnels et aucun des P_j n'est identiquement nul. En appliquant le lemme 5, F est représentée comme une somme partielle:

$$F = \sum_{i=1}^{k} P_{j(i)} F_{j(i)}$$

où les rapports mutuels entre les $F_{j(i)}$ $(i = 1, \cdots, k)$ appartiennent à $C_\alpha(f)$. On démontre que ces rapports sont tous rationnels. Or, de l'hypothèse, on peut écrire

$$F_j = R_j e^{\alpha_j z}$$

où les R_j sont rationnels et les α_j sont constantes au moins un des $\{\alpha_j\}_{j=0}^n$ est différent de zéro. De cela, en utilisant le lemme 2, on a

$$T(r,f) < Mr + O(\log r),\ (M > 0).$$

D'autre part, on peut démontrer

$$mr - O(\log r) < T(r,f),\ (m > 0).$$

En effet, il y a des fonctions retionnelles $\{Q_j\}_{j=0}^n$ telles que les Q_jR_j sont polynomes et n'admettent pas de zéros communs à tous. Mettons

$$\sum_{i=0}^{n} P_{ij} f_i = F_j \qquad (j = 0, \cdots, n) \tag{14}$$

où les P_{ij} sont rationnels tels que le déterminant de $(P_{ij})_{j=0,\cdots,n}^{i=0,\cdots,n}$ n'est pas identiquement nul et

$$Q_jP_{ij} = \widetilde{P}_{ij},\ Q_jR_j = \widetilde{R}_j.$$

Alors de (14)

$$\sum_{i=0}^{n} \widetilde{P}_{ij} f_i = Q_jF_j = \widetilde{R}_j e^{\alpha_j z}.$$

De cette égalité, on a

$$\log|Q_jF_j| \leqq \max_{0\leqq i\leqq n} \log|f_i| + \sum_{i=0}^{n} \log^+|\widetilde{P}_{ij}| + \log\,(n+1),$$

par conséquent

$$\max_{0\leqq j\leqq n} \log|Q_jF_j| \leqq \max_{0\leqq i\leqq n} \log|f_i| + \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \log^+|\widetilde{P}_{ij}| + \log\,(n+1).$$

Soit $\widetilde{F} = (Q_0F_0, \cdots, Q_nF_n) = (\widetilde{R}_0 e^{\alpha_0 z}, \cdots, \widetilde{R}_n e^{\alpha_n z})$, alors de la définition de la fonction caractéristique du système,

$$T(r, \widetilde{F}) < T(r,f) + O(\log r) \tag{15}$$

et utilisant le lemme 2

$$T(r, e^{(\alpha_i - \alpha_j)z}) - O(\log r) < T(r, \widetilde{F}). \tag{16}$$

On démontre qu'il y a $i \neq j$ tels que $\alpha_i \neq \alpha_j$. Si tous les α_i sont identiques, de (14) tous les rapports f_i/f_j ($f_j \not\equiv 0$) sont rationnels, donc

$$T(r,f) = O(\log r)$$

grâce au lemme 2, qui est absurde. Soit $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($i \neq j$), alors

$$T(r,e^{(\alpha_i-\alpha_j)z}) = \frac{|\alpha_i-\alpha_j|}{\pi}r\,. \tag{17}$$

En combinant (15), (16) et (17), on a l'inégalité cherchée. On peut démontrer le reste comme dans la démonstration du théorème 6.

COROLLAIRE 7. *Sous les situations du théorème* 7, *si F est exceptionnelle au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut* 1, *elle est exceptionnelle au sens de Picard. Donc, le nombre de combinaisons de $f_0,\cdots,f_n$, linéaires, homogènes à coefficient rationnels et n'ayant pas de zéro communs à tous, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut* 1 *au moins $n+1$ desquelles sont exceptionnelles au sens de Picard est au plus égal à $n+\left[\dfrac{n}{n-\lambda_c}\right]$ quand il n'y a entre $f_0,\cdots,f_n$ que λ_c relations linéaire, homogènes indépendantes à coefficients rationnels.*

On peut démontrer ce corollaire comme dans le cas du corollaire 6 en utilisant le théorème 1 dans [6].

N.B. 6. Ce corollaire est une généralisation des théorèmes 3 et 5 dans [7].

THÉORÈME 8. *Soient $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système d'ordre ρ, $0<\rho<2$, et de type moyen au plus dans le plan fini $|z|<\infty$ et α un nombre admissible à f quelconque. Alors, s'il n'y a entre $f_0,\cdots,f_n$ que λ_c relations linéaires, homogènes indépenantes à coefficient constants, λ_p à coefficient rationnels, le nombre μ de combinaisons F de $f_0,\cdots,f_n$, linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et $\delta_\alpha(F)=1$ au moins $l+1$ desquelles sont lacunaires* (*resp. exceptionnelles au sens de Picard*) *est au plus égal à*

$$n+\left[\frac{l}{l-\lambda_c}\right] \qquad \left(\textit{resp.}\ \ n+1+\left[\frac{\lambda_c}{l-\lambda_p}\right]\right),$$

quand $\lambda_c+1\leqq l$ (*resp. $\lambda_p+1\leqq l$*).

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer le cas où $\mu \geqq n+1$. Grâce au corollaire 2, $\rho=1$. De l'hypothèse $\lambda_c+1 \leqq l$ (resp. $\lambda_p+1 \leqq l$), on a

$$mr \leqq T(r,f), \qquad (m>0,\ r \geqq r_0>0)$$

en utilisant le lemme 2. D'autre part, f étant de type moyen au plus, il faut que

$$T(r,f) \leqq Mr \qquad (M>0,\ r \geqq r_1>0).$$

Utilisant ces inégalités, on peut démontrer qu'une fonction méromorphe g dans le plan $|z|<\infty$ n'ayant ni zéro ni pôle (resp. n'ayant qu'un nombre fini de zéros et pôles) telle que

$$T_\alpha(r,g) = o(T_\alpha(r,f))$$

est constante (resp. rationnelle). Par conséquent, on peut démontrer ce théorème comme dans la démonstration du théorème 2 dans [7] (resp. en mélangeant la démonstration du théorème 2 dans [7] avec la méthode de la démonstration du théorème 1 [I]).

N. B. 7. Dans le théorème 6 dans [7], la condition "de type moyen au plus" doit être ajoutée. On veut l'enlever, mais maintenant il est impossible. Sous cette condition, il n'est pas nécessaire de changer la démonstration du théorème.

COROLLAIRE 8. *Dans le théorème* 8, *on peut changer* $\delta_\alpha(F)=1$ *pour "exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut* 1".

7. Dans le cercle-unité. Dans ce paragraphe, on introduit une notion nouvelle aux systèmes d'ordre non zèro dans le cercle-unité comme dans le cas des fonctions meromorphes (voir §3 [10]) et donne quelques extensions du théorème de Picard-Borel.

Soit $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système dans $|z|<1$ d'ordre ρ, $0<\rho\leqq\infty$; c'est-à-dire, les fonctions $f_0,\cdots,f_n$ sont holomorphes sans zéros communs à toutes dans $|z|<1$ et

$$\limsup_{r\to1}\frac{\log T(r,f)}{\log\dfrac{1}{1-r}}=\rho$$

où $T(r,f)$ est la fonction caractéristique du système f définie par Cartan [1]. Différemment un peu du cas de plan fini (voir (1)), on dit qu'un nombre τ est admissible à f si

$$0<\tau<\rho.$$

Soit

$$F = a_0 f_0 + \cdots + a_n f_n \qquad (\not\equiv 0)$$

une combinaison linéaire, homogène à coefficients méromorphes n'ayant pas de zéros communs à tous dans $|z|<1$. On dit que F est

1') lacunaire si F n'admet pas de zéro dans $|z|<1$;

2') exceptionnelle an sens de Picard si F n'admet qu'un nombre fini de zréos au plus;

3') exceptionnelle au sens de Borel si

l'ordre de $N(r, 0, F) < \rho$;

4') exceptionnelle au sens de Nevanlinna si

$$\delta(F) = 1 - \limsup_{r\to 1} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)} > 0 .$$

DÉFINITION 6. Pour $0<r_0<1$ fixé quelconque et τ un nombre admissible à f quelconque,

$$T_\tau(r, r_0, f) = T_\tau(r, f) = \int_{r_0}^{r} T(t, f)(1-t)^{\tau-1} dt,$$

$$N_\tau(r, r_0, 0, F) = N_\tau(r, 0, F) = \int_{r_0}^{r} N(t, 0, F)(1-t)^{\tau-1} dt,$$

$$\delta_\tau(F) = 1 - \limsup_{r\to 1} \frac{N_\tau(r, r_0, 0, F)}{T_\tau(r, r_0, f)},$$

$$\Delta_\tau(F) = 1 - \liminf_{r\to 1} \frac{N_\tau(r, r_0, 0, F)}{T_\tau(r, r_0, f)} .$$

PROPOSITION 6.

1) *$T_\tau(r, f)$ tend vers l'infini monotonement quand $r\to 1$.*

2) $$\limsup_{r\to 1} \frac{\log T_\tau(r, t)}{\log \dfrac{1}{1-r}} = \begin{cases} \rho - \tau & \textit{quand } \rho < \infty \\ \infty & \textit{quand } \rho = \infty . \end{cases}$$

En effet, on peut démontrer cette proposition comme dans le cas des fonctions méromorphes ([10]).

N.B. 8. Visiblement, 1) et 2) sont indépendantes du choix de r_0.

DÉFINITION 7. Pour un nombre τ admissible à f,

$$U_\tau(f)=\{a(z)\,;\ \text{méromorphe dans } |z|<1 \text{ telle que } T_\tau(r,a) = o(T_\tau(r,f)) \text{ quand } r\to 1\},$$

$$U_0=\left\{a(z)\,;\ \text{méromorphe dans } |z|<1 \text{ telle que } T(r,a) = O\left(\log\frac{1}{1-r}\right)\right\}.$$

PROPOSITION 7.
1) *$U_\tau(f)$ est indépendant du choix de r_0 quand τ est admissible à f.*
2) *$U_0\subset U_{\tau_1}(f)\subset U_{\tau_2}(f)$, où $\tau_1<\tau_2$ sont admissibles à f.*

En effet, en utilisant que pour $\tau>0$

$$\int_{r_0}^{r}\log\frac{1}{1-t}(1-t)^{\tau-1}dt=O(1)\,.$$

on peut démontrer 1) et 2) comme dans le cas du plan fini.

PROPOSITION 8.
1) *Si les coefficients a_i de F appartiennent à $U_\tau(f)$, $\delta_\tau(F)$ et $\Delta_\tau(F)$ sont indépendantes du choix de r_0 et $0\leqq\delta_\tau(F)\leqq\Delta_\tau(F)\leqq 1$.*
2) *Soit $\tau_1<\tau_2$ admissibles à f, alors si les coefficients a_i de F appartiennent à $U_{\tau_1}(f)$,*

$$0\leqq\delta_{\tau_1}(F)\leqq\delta_{\tau_2}(F)\leqq\Delta_{\tau_2}(F)\leqq\Delta_{\tau_1}(F)\leqq 1\,.$$

En effet, on peut démontrer cette proposition comme dans le cas des fonctions méromorphes ([10]) grâce à la proposition 7.

PROPOSITION 9. *Si une combinaison F à coefficients appartenant à $U_\tau(f)$ et n'ayant pas de zéros communs à tous est exceptionnelle au sens de Borel, il y a un nombre τ_0 admissible à f tel que*

$$\delta_{\tau_0}(F)=1\,.$$

En effet, soit τ_0 un nombre tel que

$$\text{l'ordre de } N(r,0,F)<\tau_0<\rho,$$

alors il est admissible à f et

$$N_{\tau_0}(r, 0, F) = O(1).$$

Donc, d'après la proposition $6-1$), on a le résultat.

LEMME 2'. *Pour tout* $i \neq j, f_j \not\equiv 0$, *on a*

$$T(r, f_i/f_j) - O(1) < T(r, f) < \sum_{k \neq j} T(r, f_k/f_j) + O(1).$$

C'est le lemme restreint au cercle-unité du lemme 2 et on peut démontrer de la même façon.

LEMME 7. *Soit* $\phi(z)$ *une fonction méromorphe dans* $|z| < 1$. *alors pour* $r_0 > 0$ *et* $\tau > 0$

$$\int_{r_0}^{r} m(t, \phi'/\phi)(1-t)^{\tau-1}dt = O\left(\int_{r_0}^{r} \log^+ T(t, \phi)(1-t)^{\tau-1}dt\right)$$

([3]).

LEMME 4'. *Soient* $\phi_1, \cdots, \phi_\nu$ $(\nu \geqq 2)$ ν *fonctions méromorphes et linéairement indépendantes dans* $|z| < 1$ *telles que*

$$\sum_{i=1}^{\nu} \phi_i = 1.$$

Alors pour tout i $(= 1, \cdots, \nu)$, *on a*

$$T(r, \phi_i) < \sum_{i=1}^{\nu} N(r, 0, \phi_i) + N(r, D) + S(r)$$

où

$$D = \|\phi_1, \cdots, \phi_\nu\|$$

et

$$\int_{r_0}^{r} S(t)(1-t)^{\tau-1}dt = O\left(\sum_{i=1}^{\nu}\int_{r_0}^{r} \log^+ T(t, \phi_i)(1-t)^{\tau-1}dt\right)$$

pour $r_0 > 0$ *et* $\tau > 0$.

On peut démontrer comme dans le cas du lemme 4.

LEMME 5'. *Soient* $g_0, \cdots, g_\nu$, $c_0, \cdots, c_\nu$ $(\nu \geqq 1)$ *des fonctions méromorphes dans* $|z|<1$, $U(r)$ *une fonction positive, continue, non-décroissante pour* $0<r<1$ *telle que*

$$\limsup_{r\to 1} \frac{\log U(r)}{\log \dfrac{1}{1-r}} = \rho$$

oú $0<\rho \leqq \infty$ *et* τ *un nombre tel qne* $0<\tau<\rho$ *satisfaisant aux condittions*:

1) *pour* $i \neq j$ *quelconque*

$$0 < \limsup_{r\to 1} \frac{T_\tau(r, g_i/g_j)}{U_\tau(r)} < \infty\,;$$

2) *pour tout* i,

$$N_\tau(r, 0, g_i) = o(U_\tau(r)) \text{ et } N_\tau(r, g_i) = o(U_\tau(r))$$

et

3) *toutes les fonctions* c_i $(i=0, \cdots, \nu)$ *satisfont à*

$$T_\tau(r, c_i) = o(U_\tau(r))\,.$$

Si

$$\sum_{i=0}^{r} c_i g_i = 0\,,$$

on a

$$c_0 \equiv c_1 \equiv \cdots \equiv c_\nu \equiv 0\,.$$

On peut démontrer ce lemme comme dans le cas du lemme 5 en utilisant le lemme 4'.

THÉORÈME 9. *Soient* $f=(f_0, \cdots, f_n)$ *un système d'ordre* ρ $0<\rho\leqq\infty$, *dans* $|z|<1$ *et* τ *un nombre admissible* à f *quelconque. S'il n'y a entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$ *que* λ_c *relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants,* λ_0 *à coefficients appartenant à* U_0, λ_τ *à coefficients appartemant à* $U_\tau(f)$, *alors on a*

[I] *le nombre de combinaisons* F *de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *telles que* $\delta_\tau(F)=1$ *est au plus égal à* $n+1+\left[\dfrac{\lambda_c}{n-\lambda_\tau}\right]$;

[II] *le nombre de combinaisons G de $f_0,\cdots,f_n$, linéaires, homogènes à coefficients appartenant à U_0 et n'ayant pas de zéros communs à tous, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ telles que $\delta_\tau(G)=1$ est au plus égal à* $n+1+\left[\dfrac{\lambda_0}{n-\lambda_\tau}\right]$;

[III] *le nombre de combinaisons H de $f_0,\cdots,f_n$, linéaires, homogènes à coefficients appartenant à $U_\tau(f)$ et n'ayant pas de zéros communs à tous, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ telles que $\delta_\tau(H)=1$ est au plus égal à* $n+1+\left[\dfrac{\lambda_\tau}{n-\lambda_\tau}\right]$.

DÉMONSTRATION. On peut démontrer ce théorème comme dans le cas du théorème 1 en utilisant le lemme 5′ au lieu du lemme 5.

COROLLAIRE 9. *Dans le théorème* [I], [II] *précédent, si on change $\delta_\tau(F)=1$ et $\delta_\tau(G)=1$ pour "exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut* 1", *les nombres $n+1+[\lambda_c/n-\lambda_\tau]$ et $n+1+[\lambda_0/n-\lambda_\tau]$ doivent être changés en $n+1+[\lambda_c/n-\bar{\lambda}]$ et $n+1+[\lambda_0/n-\bar{\lambda}]$ respectivement, où $\bar{\lambda}=\sup_\tau \lambda_\tau$* $(\leqq n-1)$.

N. B. 8. $n+1+[\lambda_c/n-\lambda]\leqq n+1+[\lambda_0/n-\lambda]\leqq n+\lambda_c+1$. Donc, c'est une extension du théorème de Picard-Borel dans le cercle-unité. On ne peut pas démontrer ce résultat par la méthode utilisée dans [9].

EXEMPLE 2. Dans le cercle-unité, un résultat analogue au théorème 2 dans [9] ou corollaire 3 n'est pas nécessairement valable. En effet, voici un exemple. Soient $\rho_1,\cdots,\rho_n (n\geqq 1)$ des nombres positifs tels que $\rho_1\leqq\rho_2\leqq\cdots\leqq\rho_n$ et

$$f_0(z)=1,\quad f_i(z)=\exp\left((z-1)^{-\rho_i-1}\right)\quad (i=1,\cdots,n),$$

alors le système $f=(f_0,\cdots,f_n)$ est d'ordre ρ_n dans $|z|<1$ grâce au lemme 2′ et $F_i=f_i$ $(i=0,\cdots,n)$ sont $n+1$ combinaisons, linéaires, homogènes à coefficient constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et exceptionnelles au sens de Picard. Mais, l'ordre de f $(=\rho_n)$ est positif quelconque.

8. Le cas où $\lambda_c=0$. Dans ce paragraphe, on étend les théorèmes 1 et 3 dans [10] aux systèmes. Du théorème fondamental de Cartan [1], on a la

PROPOSITION 10. *Soient $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système dans $|z|<R$ $(=1$ ou $\infty)$, qui est transcndant quand* $\mathrm{R}=\infty$ *ou d'ordre non-zéro quand $R=1$ et α un nombre admissible à f quelconque. Alors, s'il n'y a pas de relations liéaires*

homogènes entre les fonctions $f_0, \cdots, f_\nu$, *c'est-à-dire*, $\lambda_c = 0$, *pour* q *combinaisons* $\{F_i\}_{i=1}^q$ *de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes* $n+1$ á $n+1$ $(q \geqq n+2)$, *on a*

$$(q-n-1)T_\alpha(r,f) \leqq \sum_{i=1}^{q} N_\alpha(r, 0, F_i) + S_\alpha(r)$$

oú

$$S_\alpha(r) = \begin{cases} O\left(\int_{r_0}^{r} \frac{\log^+ T(t,f)}{t^{1+\alpha}} dt\right) & (\alpha > 0) \\ O((\log r)^2) & (\alpha = 0) \end{cases} (R = \infty) \\ O\left(\int_{r_0}^{r} \log^+ T(t,f)(1-t)^{\alpha-1} dt\right) \qquad (R = 1).$$

En effet, on ne démontre que l'estimation de $S_\alpha(r)$. On obtient cette estimation tout de suite du lemme 5 ou 5′ en utilisant le lemme 2 ou 2′.

THÉORÈME 10. *Soient* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système d'ordre* ρ, $0 < \rho \leqq \infty$, *dans* $|z| < R$ $(R = 1$ *ou* $\infty)$, α *un nombre admissible à* f *quelconque, alors*

(1) *l'ensemble* $N_\alpha(f) = \{F$; *combinaison de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaire, homogène à coeffiicients constants*, $\delta_\alpha(F) > 0$ *et toutes les combinaisons sont lineairement indêpendantes* $n+1$ *à* $n+1\}$ *est plus dênombrable*;

(2) *s'il y a* $N(B_f)$ *combinaisons* F_i $(i = 1, \cdots, N(B_f))$ *de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires, homogènes à coefficients constants, exceptionnelles au sens de Borel telles que* $\{F_i$ $(i = 1, \cdots, N(B_f))$, $F \in N_\alpha(f) - \{F_i\}_{i=1}^{N(B)}\}$ *sont linéairement indépendantes* $n+1$ *á* $n+1$,

$$\sum_{F \in N_\alpha(f) - \{F_i\}} \delta_\alpha(F) \leqq n + 1 - N(B_f);$$

quand il n'y a pas de relations linéaires, homogènes entre $f_0, \cdots, f_n$.

En effet on peut démontrer comme dans le cas des fonctions méromorphes (les théorèmes 1 et 3 dans [10]) en utilisant les propositions 3, 4, 10 $(R = \infty)$ ou les propositions 8, 9, 10 $(R = 1)$.

COROLLAIRE 10. *Soit* $N(f) = \{F \in N_\alpha(f); \delta(F) > 0\}$, *alors*

$$\sum_{F \in N(f) - \{F_i\}} \delta(F) \leqq n + 1 - N(B_f).$$

COROLLAIRE 11. *Le nombre de combinaisons de* $f_0, \cdots, f_n$, *linéaires,* *homogènes á coefficients constants, linéairement indépendantes* $n+1$ *á* $n+1$ *et exceptionnelles au sens de Borel ou au sens de Nevanlinna de défaut* 1 *est au plus égal à* $n+1$ *quand il n'y a pas de relations linéaires, homogènes entre les* $f_0, \cdots, f_n$.

N.B. 9. Quand $n=1$, on a des résultats du cas des fonctions méromorphes.

N.B. 10. Tous les résultats dans les paragraphes $2\sim 8$ s'appliquent en particulier aux fonctions algébroïdes en utilisant un théorème de Valiron ([11]), qui caractérise la fonction caractéristique d'une fonction algébroïde utilisant les coefficients qui la déffinissent. En outre, on a

$$\sum_{a \notin B_f} \delta(a,f) \leqq 2n - N(B_f)$$

où B_f est l'ensemble des valeurs exceptionnelles au sens de Borel pour f, algébroïde dans $|z| < R (R=1, \text{ ou} \infty)$ à n-branches et d'ordre non-zéro.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. CARTAN, Sur les zéros des combinaisons linéaire de p fonctions holomorphes données, Mathematica, 7(1933), 5-31.
[2] J. DUFRESNOY, Théorie nouvelles des familles complexes normales; applications à l'étude des fonctons algébroïdes, Ann. E. N. S., (3) 61(1944), 1-44.
[3] R. NEVANLINNA, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929.
[4] N. TODA, Sur une relation entre la croissance et le nombre de valeurs déficientes de fonctions algébroïdes ou de systémes, Kōdai Math. Sem. Rep., 22(1970), 114-121.
[5] N. TODA, Sur la croissance de fonctions algébroïdes à valeurs déficientes, ibid., 324-337.
[6] N. TODA, Sur les combinaisons exceptionnelles de fonctions holomorphes; applications aux fonctions algébroïdes, Tôhoku Math. J., 22(1970), 290-319.
[7] N. TODA, Sur le nombre de combinaisons exceptionnelles; applications aux fonctions algébroïdes, ibid., 480-491.
[8] N. TODA, On a modified deficiency of meromorphic functions, ibid., 635-658.
[9] N. TODA, Sur une généralisation du théorème de Picard-Borel-Rémoundos, Tôhoku Math. J., 23(1971), 105-115.
[10] N. TODA, Quelques applications du défaut modifié au théorème de Picard-Borel (à paraître).
[11] G. VALIRON, Sur la dérivée des fonctions algébroïdes, Bull. Soc. Math. France, 59(1931), 17-39.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE TÔHOKU
SENDAI, JAPON