Tôhoku Math. Journ.
23(1971), 457-472.

SUR LA DUALITE DE MORITA

BERNARD ROUX

(Rec. Dec. 26, 1970)

On montre (section 3) que l'existence de certains idéaux injectifs Ae et fA (e et f idempotents) dans un anneau A équivaut à l'existence d'une dualité de Morita définie par le bimodule ${}_{fAf}fAe_{eAe}$ (résultat connu lorsque A est artinien, K.R. Fuller [6, théorème 3. 1]). Et on définit (section 4) une correspondance biunivoque entre les classes d'équivalence de dualités de Morita et les classes d'isomorphisme de certains anneaux semi-parfaits et $QF3$ à gauche et à droite.

Dans tout ce papier tout anneau A possède un élément unité et tout module est unitaire. Nous notons ${}_A\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{M}_A$) la catégorie des A-modules à gauche (resp. à droite).

1. Introduction. Il est bien connu (T.Nakayama[14], G.Azumaya[1], J.Dieudonné [4], K.Morita[11], K.R.Fuller[6]) que :

(1. 1) *Pour un anneau A artinien à gauche, les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) *A est injectif à gauche ou á droite*;

(2) *Tout A-module à gauche* (*resp. à droite*) *de type fini est canoniquement isomorphe à son bidual*;

(3) *Pour tout idempotent primitif e de A, il existe un idempotent primitif f tel que* $S(Ae)\cong T(Af)$ *et* $S(fA)\cong T(eA)$ (pour chaque module M, on note $S(M)$ son socle et $T(M)=M/\mathrm{Rad}(M)$ sa tête).

Un anneau vérifiant ces conditions est appelé Quasi-Frobéniusien (QF en abréviation). Il est injectif et cogénérateur dans ${}_A\mathfrak{M}$ et dans $\mathfrak{M}_A$.

Une première généralisation de ce résultat est donnée par la dualité de Morita: une "dualité de Morita" est une équivalence contravariante de catégories entre deux catégories de A-modules à gauche et B-modules à droite qui sont fermées par prise de sous-modules et modules quotients et contiennent tous les modules de type fini. Morita [11] et Azumaya [1] montrent que de telles dualités sont données par des couples de foncteurs $(\mathrm{Hom}_A(-,{}_AU),\ \mathrm{Hom}_B(-,U_B))$ où ${}_AU_B$ est un A-B-bimodule injectif et cogénérateur dans ${}_A\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_B$. Nous dirons alors que le bimodule ${}_AU_B$ définit une dualité de Morita. Le résultat (1. 1) se généralise d'ailleurs ainsi, sans hypothèse artinienne (pour une preuve directe, voir T. Kato [9]):

(1. 2) *Les assertions suivantes sont équivalentes pour un anneau* A:

(1) A *est injectif et cogénérateur dans* ${}_A\mathfrak{M}$ *et dans* $\mathfrak{M}_A$;

(2) *Le bimodule* ${}_AA_A$ *définit une dualité de Morita*;

(3) A *est somme directe d'enveloppes injectives de modules à gauche simples et de modules à droite simples.*

Un anneau vérifiant ces conditions est appelé Presque-Frobeniusien (*PF* en abréviation).

Une autre généralisation des anneaux QF est donnée par les anneaux $QF3$: nous dirons qu'un anneau est $QF3$ à gauche s'il existe une famille finie de A-modules à gauche simples $(S_i)_{1\leq i\leq n}$(non isomorphes) telle que le module $\bigoplus_{1\leq i\leq n} E(S_i)$ soit projectif fidèle. Alors ce module contient une copie de tout idéal à gauche minimal, et est isomorphe à un facteur direct de tout A-module à gauche fidèle: on l'appelle le module fidèle minimal de ${}_A\mathfrak{M}$. (Ce n'est pas la définition usuelle des anneaux $QF3$, mais une caractérisation, due à E.A.Rutter [18]). K.R.Fuller [5, théorème 3. 6] donne la généralisation du résultat (1. 1) correspondant au cas des anneaux artiniens $QF3$, et plus généralement encore établit le résultat suivant [6, théorème 3. 1]:

(1. 3) *Soit* e *un idempotent d'un anneau artinien à gauche* A. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) Ae *est injectif*;

(2) *Il existe un idempotent* f *tel que*:

(a) *Le bimodule* ${}_{fAf}\, fAe\, {}_{eAe}$ *définit une dualité de Morita*;

(b) $s_{fA}(Ae)=0=r_{Ae}(fA)$ (si M est un A-module à gauche, J une partie de A, on note $s_J(M) = \{a \in J,\ aM=0\}$ et $r_M(J)=\{x \in M,\ Jx=0\}$. Et symétriquement pour un module à droite)

(3) *Pour tout idempotent primitif* e_i *tel que* Ae_i *soit facteur direct de* Ae, *il existe un idempotent* f_i *tel que* $S(Ae_i)\cong T(Af_i)$ *et* $S(f_iA)\cong T(e_iA)$. (l'idéal fA, les idéaux f_iA sont alors injectifs)

Alors le résultat (1. 1) peut apparaitre comme un simple cas particulier du résultat (1. 3).

Ceci est-il toujours vrai sans hypothèse artinienne ? Ou encore, le résultat (1. 2) peut-il être considéré comme cas particulier d'un résultat qui généraliserait (1. 3) sans hypothèse artinienne? *Le premier but de ce travail est de repondre à cette question*, ce que fait notre théorème (3. 6), qui géneralise simultanément les résultats (1. 2) et (1. 3).

Par ailleurs on dit qu'un idempotent e d'un anneau A est primitif si l'idéal Ae(ou eA) est local (un module M est dit local s'il possède un sous-module propre contenant tout sous-module propre de M). Des conditions équivalentes (pour qu'un idempotent soit primitif) sont données en [17, définition (2. 0)]. Si A est un anneau artinien, ou seulement semi-parfait, cela équivaut à la définition usuelle: Ae est indécomposable. Si un idempotent e est primitif, on dit que l'idéal Ae (rest. eA) est primitif. Généralisant une définition de K.R.Fuller [5], on dit que:

(1. 4) *Un idéal à gauche I d'un anneau A est antistrophique si*:
(a) *I est une somme directe finie d'idéaux primitifs, $I=\bigoplus_{1\leqq i\leqq n} Ae_i$*;
(b) *Pour tout i, $1\leqq i\leqq n$, il existe un idempotent primitif f_i tel que $S(Ae_i)\cong T(Af_i)$ et $S(f_iA)\cong T(e_iA)$*. (définition symétrique pour un idéal à droite). (L'anneau d'endomorphismes de tout idéal primitif étant local [17, (2. 0)], le théorème de Krull-Schmidt-Azumaya est applicable à l'idéal I, de sorte que toutfacteur direct de I est une somme directe d'idéaux isomorphes à des Ae_i, donc est antistrophique). Avec cette définition, le résultat (1. 3) dit qu'*un idéal à gauche d'un anneau artinien à gauche est injectif si et seulement s'il est antistrophique*. Shématiquement, dans la première partie de cet article on montre (en utilisant une méthode de T. Kato [10]) que si un anneau (non nécessairement artinien) contient des idéaux enveloppes injectives de simples, à gauche et à droite, alors ces idéaux sont antistrophiques, mais réciproquement des idéaux antistrophiques ne sont pas nécessairement injectifs (résultats (2. 6) et (2. 7)). (La notion d'antistrophisme est techniquement intéressante car il est en général très facile de vérifier si un idéal d'un anneau artinien est antistrophique, doncde savoir s'il est injectif. Et avec cette propriété il est également facile de construire des anneaux artiniens contenant des idéaux injectifs, en particulier des anneaux QF ou $QF3$).

La dernière partie est consacrée à quelques remarques sur les modules projectifs (resp. injectifs) dans le cas d'une dualité de Morita.

Rappelons quelques résultats qu'on utilise dans la suite :

(1. 5) LEMME (B.Osofsky [16, lemme 1]). *Un A-module à gauche M est cogénérateur de ${}_A\mathfrak{M}$ si et seulement si M contient une copie de l'enveloppe injective de chaque A-module à gauche simple.*

Soit ${}_AU_B$ un bimodule. Un A-module à gauche M est dit U-réflexif si le morphisme canonique de M dans $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M, {}_AU), U_B)$ est un isomorphisme. Définition symétrique pour un B-module à droite.

(1. 6) THÉORÈME (K.Morita [11, théorème 2. 4]). *Soient A et B deux anneaux, et ${}_AU_B$ un bimodule. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) *La classe des A-modules à gauche U-réflexifs contient la classe obtenue à partir de ${}_AA$ et ${}_AU$ par prise de sous-modules, quotients, et sommes directes finies. Et symétriquement avec les B-modules à droite*;

(2) *Tout quotient de ${}_AA$ et de ${}_AU$ est U-reflexif, tout quotient de B_B et de U_B est U-reflexif*;

(3) (a) *Les morphismes canoniques d'anneaux de B dans* $\mathrm{End}_A(U)$ *et de A dans* $\mathrm{End}_B(U)$ *sont des isomorphismes*;

(b) *${}_AU$ est cogénérateur et injectif dans ${}_A\mathfrak{M}$, U_B dans $\mathfrak{M}_B$.*

(1. 7) THÉORÈME (*B. Osofsky* [16, *théorème* 2]). *Si un bimodule* ${}_AU_B$ *définit une dualité de Morita, les anneaux* A *et* B *sont semi-parfaits.*

(1. 8) COROLLAIRE. *Soit* ${}_AU_B$ *un bimodule définissant une dualité de Morita. Soit* ${}_AA = \bigoplus_{1\leqq k\leqq n} (\bigoplus_{1\leqq i\leqq p(k)} Ae_{ki})$ *une décomposition de* ${}_AA$ *en somme directe d'idéaux à gauche primitifs, où* $Ae_{ki} \cong Ae_{hj}$ *si et seulement si* $h=k$. *Alors* $U_B = \bigoplus_{1\leqq k\leqq n} (\bigoplus_{1\leqq i\leqq p(k)} E_{ki})$, *où* $E_{ki} \cong E(\mathrm{Hom}_A(T(Ae_{k1}), {}_AU))$. Et symétriquement avec B_B et ${}_AU$ (et le nombre de types d'idéaux primitifs de B est encore n).

PREUVE. Voir [12, Lemme 1]

(1. 9) REMARQUE. Dans l'assertion (3)(b) du théorème (1. 6) il n'est pas nécessaire de supposer que ${}_AU$ et U_B sont injectifs. En effet la preuve que (3) implique (1) se fait alors comme celle de Morita, en utilisant le lemme suivant:

(1. 10) LEMME. *Soit* U *un* A*-module cogénérateur dans* ${}_A\mathfrak{M}$. *Alors pour tout* A*-module à gauche* X *et pour tout sous-module* Y *de* X *on a*: $Y^{00}=Y$, *où on note* $Y^0 = \{y \in \mathrm{Hom}_A(Y, {}_AU), yY=0\}$ *et* $Y^{00} = \{x \in Y, xY^0 = 0\}$.

La preuve de ce lemme se fait exactement comme celle du lemme (2. 1) de Morita [11] en utilisant le lemme (1. 5).

2. Antistrophisme dans un anneau contenant des enveloppes injectives de modules simples. Nous utiliserons dans la suite ces résultats connus:

(2. 1) LEMME. *Soit* A *un anneau,* S *un* A*-module à gauche simple. Les assertions suivantes sont équivalentes*:
(1) $E(S)$ *est isomorphe à un idéal de* A;
(2) $E(S)$ *est projectif*;
(3) $E(S)$ *est sans torsion, i.e. s'envoie dans un produit de copies de* ${}_AA$.

PREUVE. Voir par exemple T.Kato [10, proposition 1].

(2. 2) LEMME. *Si* e *est un idempotent d'un anneau* A, *tel que l'idéal* Ae *soit enveloppe injective d'un module simple, il est primitif.*

PREUVE. B.Osofsky [16, lemme 3].

(2. 3) LEMME. *Soit* A *un anneau, et* $a\in A$, *tel que* Aa *soit un idéal à gauche minimal contenu dans un idéal injectif. Alors l'idéal à droite* $r_A(s_A(a))$, *isomorphe à* $\mathrm{Hom}_A(Aa, A)$, *est extension essentielle de l'idéal* aA, *et celui-ci est minimal.*

PREUVE. T.Kato [10, lemme 1], ou K.Sugano [19, lemme 3].

Pour tout A-module M, on note $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$, et $\bar{M}$ la classe d'isomorphisme de M. Si M est un A-module à gauche simple dont l'enveloppe injective est projective, il résulte des lemmes (2. 1) et (2. 3) qu'il existe $a \in A$ tel que $M \cong Aa$, et $M^* \cong r_A(s_A(a))$ qui est extension essentielle de l'idéal simple aA. Alors si $(S_i)_{i \in I}$ est une famille de modules simples dont les enveloppes injectives sont projectives, ceci permet de définir une application Φ de la famille $(\bar{S}_i)_{i \in I}$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme d'idéaux à droite simples de A, en posant $\Phi(\bar{S}_i)$ = classe d'isomorphisme du sous-module simple de S_i^*(définition de T.Kato [10, p. 117]).

(2. 4) LEMME. *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, l'application Φ est une injection. Et si e_i est un idempotent tel que $Ae_i \cong E(S_i)$, $i \in I$, alors $\Phi(S_i) \cong T(e_iA)$.*

PREUVE. Soient S et T deux A-modules à gauche simples dont les enveloppes injectives sont projectives, i.e. isomorphes à des idéaux primitifs (d'après (2. 1) et (2. 2)), soient Ae et Af respectivement. Alors il existe $a \in Ae$, $b \in Af$, tels que $Aa = S(Ae) \cong S$, $Ab = S(Af) \cong T$. Puisque $a = ae$, $aAe \neq 0$, d'où $T(eA) \cong aA \cong \Phi(S)$, d'après (2. 3) et [17, (3. 4)]. Et de même $\Phi(T) \cong T(fA)$. Alors si $\Phi(\bar{S}) = \Phi(\bar{T})$, $T(eA) \cong T(fA)$, d'où $Ae \cong Af$, d'après Jacobson [8], donc $S \cong T$. Donc Φ est une injection.

Si, en plus de l'hypothèse que $E(S_i)$ est projectif pour tout $i \in I$, on suppose aussi que $E(\Phi(S_i))$ est projectif pour tout $i \in I$, et si on note Ψ l'application de $\mathrm{Im}\Phi$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme d'idéaux à gauche simples de A définie par $\Psi(\Phi(\bar{S}_i))$ = classe d'isomorphisme du sous-module simple de $(\Phi(S_i))^*$, on a le résultat suivant (qui généralise le théorème 3 de T.Kato [10], avec une preuve analogue):

(2. 5) THÉORÈME. *Soit A un anneau, et $(\bar{S}_i)_{i \in I}$ une famille de classes d'isomorphisme de A-modules à gauche simples tels que les modules $E(S_i)$ et $E(\Phi(S_i))$ soient projectifs pour tout $i \in I$, où on définit comme ci-dessus les applications Φ et Ψ par $\Phi(\bar{S}_i) = \overline{S}(S_i^*)$ et $\Psi(\Phi(\bar{S}_i)) = \overline{S((\Phi(S_i))^*)}$. Alors:*

(a) *Les applications Φ et Ψ sont des bijections réciproques;*

(b) *Pour tout $i \in I$ il existe des idempotents e_i et f_i de A tels que $Ae_i \cong E(S_i)$, $f_iA \cong E(\Phi(S_i))$, et:*

$$S(Ae_i) \cong T(Af_i) \cong S_i\,;$$
$$S(f_iA) \cong T(e_iA) \cong \Phi(S_i)\,.$$

PREUVE. (a) D'après le lemme (2. 4), Φ est une bijection de $(S_i)_{i \in I}$ dans $\mathrm{Im}\Phi$. Soit S un A-module à gauche simple tel que $S \cong S_i$, pour un certain $i \in I$. D'après les lemmes (2. 1), (2. 2), (2. 3), il existe un élément $a \in A$ et un idempotent primitif $e \in A$ tels que $Aa \cong S$, $Ae \cong E(Aa)$, $Aa = S(Ae)$, et $\Phi(Aa) \cong aA$. Et pour des raisons symétriques, il existe $b \in A$ et un idempotent primitif $f \in A$ tels que $bA \cong aA$, $fA \cong E(bA)$, $bA = S(fA)$, et $\Psi(bA) \cong Ab$. Puisque $aA \cong bA$, $(aA)^* \cong (bA)^*$, donc $s_A(r_A(a)) \cong S_A(r_A(b))$: or $s_A(r_A(a))$ contient l'idéal simple Aa, et, d'après le lemme (2. 3), $s_A(r_A(b))$ est extension essentielle de l'idéal simple Ab, donc $Aa \cong Ab$. Mais $Ab \cong \Psi(bA) \cong \Psi(\Phi(Aa))$, donc $\Psi(\Phi(Aa)) \cong Aa$, ou encore $\Psi(\Phi(\overline{S})) \cong \overline{S}$. Donc Ψ est la bijection réciproque de Φ.

(b) D'après le lemme (2. 4), puisque $Ae \cong E(S)$, $\Phi(S) \cong T(eA)$, donc $T(eA) \cong aA \cong bA \cong S(fA)$. Et symétriquement, puisque $fA \cong E(\Phi(S))$, $\Psi(\Phi(S)) \cong T(Af)$, donc $T(Af) \cong S \cong S(Ae)$.

Des résultats (2. 4) et (2. 5) découle immediatement un résultat annoncé dans l'introduction:

(2. 6) *Soit A un anneau contenant un idéal* $Ae = \bigoplus_{1 \leqq i \leqq n} Ae_i$, *où* Ae_i *est enveloppe injective d'un A-module à gauche simple,* $1 \leqq i \leqq n$. *Si le module* $E(T(e_iA))$ *est isomorphe à un idéal de A, pour tout i,* $1 \leqq i \leqq n$ (condition toujours vérifiée si A est artinien à gauche, d'après (1.3)), *alors Ae est antistrophique.*

(2. 7) On donne plus loin un exemple d'anneau A (semi-primaire, mais non artinien) possédant des idéaux Ae et fA antistrophiques ($S(Ae)) \cong T(Af)$ et $S(fA) \cong T(eA)$), où Ae est injectif, fA ne l'est pas, et $E(T(eA))$ n'est pas isomorphe à un idéal. Cela montre que :

(1) La condition du résultat (2. 6), suffisante pour impliquer l'antistrophisme, n'est pas nécessaire ;

(2) Un idéal antistrophique peut n'être pas injectif, si l'anneau n'est pas artinien.

Les corollaires suivants du théorème (2. 5) sont en particulier valables pour un anneau $QF3$ à gauche et à droite (définition dans l'introduction), et ils sont connus dans le cas d'un anneau artinien (Fuller [5]):

(2. 8) COROLLAIRE. *Soit A un anneau tel que l'enveloppe injective de tout idéal, à gauche, et à droite, minimal de A soit projective. Alors un idéal à gauche (resp. à droite) est antistrophique si et seulement si il est enveloppe injective d'un idéal minimal.*

PREUVE. Si Ae est enveloppe injective d'un idéal minimal, c'est un idéal antistrophique, on vient de le voir. Inversement soit Ae un idéal antistrophique, i.e. tel qu'il existe un idempotent f pour lequel $S(Ae) \cong T(Af)$ et $S(fA) \cong T(eA)$. Il résulte de l'hypothèse et des lemmes (2. 1) et (2. 3) qu'il existe un élément a et un idempotent ε de A tels que $S(Ae) \cong Aa = S(A\varepsilon)$, et $E(Aa) \cong A\varepsilon$. Et d'après (2. 5), il existe un idempotent η tel que ηA soit injectif et $S(A\varepsilon) \cong T(A\eta)$ et $S(\eta A) \cong T(\varepsilon A)$. Mais puisque $S(Ae) \cong S(A\varepsilon)$, $T(Af) \cong T(A\eta)$, d'où $fA \cong \eta A$. Donc $S(fA) \cong S(\eta A)$, d'où $T(eA) \cong T(\varepsilon A)$, d'où $Ae \cong A\varepsilon$. Donc Ae (resp. fA) est enveloppe injective de son socle.

(2.9) COROLLAIRE. *Sous les mêmes hypothèses qu'en* (2.8) *il y a bijection entre les classes d'isomorphisme des*: (1) *idéaux à gauche simples*; (2) *idéaux à droite simples*; (3) *idéaux à gauche primitifs antistrophiques*; (4) *idéaux à droite primitifs antistrophiques*; (5) *enveloppes injectives projectives de modules à gauche simples*; (6) *enveloppes injectives projectives de modules à droite simples.*

Exemple (M.Harada [7, p.23]). Un idéal antistrophique non injectif. Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3 des corps, où $\Delta_1=\Delta_3$, et soit M_{32} un Δ_3-Δ_2-module tel que $[M_{32}:\Delta_3]=\infty$. Soit $M_{31}=\Delta_1$ et $M_{21}=\mathrm{Hom}_{\Delta}(M_{32}, M_{31})$. Considérons l'anneau des matrices ("triangulaire généralisé") :

$$A=\begin{vmatrix}\Delta_1 & 0 & 0\\ M_{21} & \Delta_2 & 0\\ M_{31} & M_{32} & \Delta_3\end{vmatrix},\ \text{et notons } e=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}\ \text{et } f=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$

M.Harada montre que A est $QF3$ à gauche et non $QF3$ à droite, i.e. Ae est injectif et fA ne l'est pas. Or Ae et fA sont antistrophiques: $S(Ae)\cong T(Af)=Af$ et $S(fA)\cong T(eA)=eA$. De plus si $E(T(eA))$ était isomorphe à un idéal, celui-ci serait antistrophique à Ae, d'après (2.5), et isomorphe à fA, d'après (2.8). Or fA n'est pas injectif, donc $E(T(eA))(\cong E(fA))$ n'est pas isomorphe a un idéal, ce qui montre (2.7).

3. Dualité de Morita dans un anneau contenant des enveloppes injectives de modules simples. Si e est un idempotent primitif d'un anneau semi-primaire, K.R.Fuller [6] dit que Ae et $E(T(eA))$ forment une paire, et montre l'intéret de cette notion. En fait cette notion est intéressante pour tout anneau contenant des idéaux primitifs. Nous reprenons donc pour un anneau quelconque la définition de K.R.Fuller [6, p.117] :

(3.1) DEFINITION. Soit A un anneau, E une somme directe finie d'enveloppes injectives de modules à gauche simples, F un idéal à droite de A somme directe finie d'idéaux primitifs. On dit que *E et F forment une paire* si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(1) Il existe des décompositions $F=\bigoplus_{1\leqq k\leqq m}(\bigoplus_{1\leqq i\leqq p(k)} e_{ki}A)$ et $E=\bigoplus_{1\leqq k\leqq m}(\bigoplus_{1\leqq j\leqq q(k)} E_{kj})$, où les e_{ki} sont des idempotents primitifs, où $e_{ki}A\cong e_{hg}A$ si et seulement si $h=k$, et où E_{kj} $E(T(Ae_{k1}))$, pour tous k, i, j, h, g, $1\leqq k\leqq m$, $1\leqq i\leqq p(k)$, $1\leqq j\leqq q(k)$, $1\leqq h\leqq m$, $1\leqq g\leqq p(h)$.

(2) Pour tout facteur direct indécomposable E' de E[resp. ηA de F] il existe un facteur direct ηA de F[resp. E' de E] tel que $S(E')\cong T(A\eta)$. (l'équivalence de ces conditions résulte simplement du théorème de Krull-Schmidt-Azumaya)

Les résultats suivants, énoncés par Fuller [6, lemmes (1. 1), (2. 1), (2, 2)] pour un anneau semi-primaire, sont vrais en fait sans cette hypothèse et sans modification sensible de preuve (utiliser [17, (3. 4)] :

(3. 2) LEMME. *Soit f un idempotent primitif d'un anneau A, et E un A-module à gauche injectif, tels que E et fA forment une paire* (*définition* (3. 1)). *Alors*:
(a) $r_E(J)=r_E(fJ)$ *et* $s_{fA}(K)=s_{fA}(KE)$, *pour tout idéal à gauche J et tout idéal à droite K de A*;
(b) $r_E(fA)=0$ *et* $s_{fA}(E)=0$;
(c) $r_A(fA)=s_A(E)$.

(3. 3) LEMME. *Soit A un anneau, et soient E et fA comme en* (3. 2). *Alors*:
(a) *Pour tout A-module à gauche M, la restriction des morphismes à fM donne un isomorphisme de groupes additifs*: $\mathrm{Hom}_A(M, E)\cong \mathrm{Hom}_{fAf}(fM, fE)$. *Si M est de plus un A-A-bimodule, l'isomorphisme ci-dessus est un isomorphisme de A-modules à gauche**);
(b) *l'application Ψ définie par*: $[\Psi(s)](fx)=s(fx), s\in \mathrm{End}_A(E), fx\in fE$, *est un isomorphisme d'anneau de* $\mathrm{End}_A(E)$ *dans* $\mathrm{End}_{fAf}(fE)$;
(c) *Si J et J' sont des idéaux bilatères de A, alors on a l'isomorphisme de A-modules à gauche suivant*: $r_E(J')/r_E(J)\cong \mathrm{Hom}_{fAf}(fJ/fJ', fE)$.

(3. 4) LEMME. *Soit A un anneau, et soient* $F=\bigoplus_{1\leq k\leq m}(\bigoplus_{1\leq i\leq p(k)} f_{ki}A)$ *et* $E=\bigoplus_{1\leq k\leq m}(\bigoplus_{1\leq j\leq q(k)} E_{kj})$ *formant une paire, et notons* $f=\sum_{k,i} f_{ki}$. *Alors* $fE=\bigoplus_{1\leq k\leq m}(\bigoplus_{1\leq j\leq q(k)}\hat{E}_{kj})$, *où* $\hat{E}_{kj}$ $(=fE_{kj})$ *est isomorphe à l'enveloppe injective du fAf-module à gauche simple $T(fAf_{k1})$. En particulier les fAf-modules fE et fAf forment une paire, donc fE est cogénérateur de* ${}_{fAf}\mathfrak{M}$.

Soient Ae et fA des idéaux sommes directes finies d'idéaux à gauche (resp. à droite) primitifs: on dit que Ae et fA sont *antistrophiques l'un à l'autre* si tout facteur direct indécomposable de Ae est antistrophique à un facteur direct de fA et inversement.

Si Ae et fA sont des idéaux antistrophiques l'un à l'autre et injectifs, il résulte des définitions que Ae et fA forment une paire, et fA et Ae forment une paire. Grace aux résultats du chapitre 2, on peut montrer que réciproquement si Ae et fA (ou fA et Ae) forment une paire et sont injectifs, alors Ae et fA sont antistrophiques l'un à l'autre:

---

*) Soient A et B deux anneaux, M un A-B-bimodule, N un A-module à gauche. Alors l'opération de B dans $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ définie par $(bf)(m)=f(mb)$ confère à $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ une structure de B-module à gauche. C'est de cette façon qu'en (3. 3) (a) on définit la structure de A-module à gauche sur $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ et $\mathrm{Hom}_{fAf}(fM, fE)$, lorsque M est un A-A-module. Et pareillement en (3. 6) (2) (b), ou on utilise aussi une version à droite de cela.

(3. 5) LEMME. *Soient Ae et fA des idéaux sommes directes finies d'idéaux à gauche (resp. à droite) qui sont enveloppes injectives de modules simples. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *Ae et fA sont antistrophiques l'un à l'autre*;

(2) *Ae et fA forment une paire*;

(3) *fA et Ae forment une paire.*

PREUVE. Il suffit de montrer que (2) implique (1) ((3) implique (1) par raison de symetrie). Soient Ae et fA sommes directes d'enveloppes injectives de modules simples et formant une paire. Soit $A\varepsilon$ un facteur direct indécomposable (i.e. idéal primitif) de Ae: alors il existe un facteur direct ηA de fA tel que $S(A\varepsilon)\cong T(A\eta)$. Puisque ηA est enveloppe injective d'un module simple, et $E(T(A\eta))$ isomorphe à l'idéal $A\varepsilon$ de A, $A\varepsilon$ et ηA sont antistrophiques d'aprés (2. 6). On montre symétriquement que si ηA est un facteur direct indécomposable de fA, il existe un facteur direct $A\varepsilon$ de Ae tel que $A\varepsilon$ et ηA soient antistrophiques.

Alors nous pouvons établir le résultat qui généralise le résultat (1. 3) de K.R. Fuller [6] :

(3. 6) THÉORÈME. *Soient e et f deux idempotents d'un anneau A. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) (a) *Ae et fA sont des sommes directes d'enveloppes injectives de modules simples*

(b) *Ae et fA*(*ou*: *fA et Ae*) *forment une paire*;

(2) (a) *Le bimodule* ${}_{fAf}fAe_{eAe}$ *définit une dualité de Morita*;

(b) $Ae\cong \mathrm{Hom}_{fAf}(fA, fAe)$, *et* $fA\cong \mathrm{Hom}_{eAe}(Ae, fAe)$, *isomorphismes de A-modules, à gauche et à droite respectivement.*

PREUVE. (1) implique (2). Supposons la condition (1) remplie. Puisque Ae et fA forment une paire, le fAf-module fAe est cogénérateur et injectif dans ${}_{fAf}\mathfrak{M}$, d'après (3. 4). D'après (3. 5), fA et Ae forment aussi une paire, donc symétriquement le eAe-module fAe est cogénérateur et injectif dans $\mathfrak{M}_{eAe}$. Donc la condition (3)(b) du théorème (1. 6) est remplie pour le bimodule ${}_{fAf}fAe_{eAe}$. Et d'après (3. 3)(b), $\mathrm{End}_{fAf}(fAe)\cong\mathrm{End}_A(Ae)\cong eAe$. Et symétriquement $\mathrm{End}_{eAe}(fAe)\cong \mathrm{End}_A(fA)\cong fAf$. Donc la condition (3)(a) du théorème (1. 6) est aussi remplie, et ainsi le bimodule ${}_{fAf}fAe_{eAe}$ définit bien une dualité de Morita. Quant à la condition (b), elle est obtenue en prenant $M=A$ et $E=Ae$ dans le lemme (3. 3)(a): alors $Ae\cong\mathrm{Hom}_A(A, Ae)$ $\cong\mathrm{Hom}_{fAf}(fA,fAe)$, et c'est bien un isomorphisme de A-modules à gauche. Avec la version à droite de ce lemme, on a symétriquement $fA\cong\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae,fAe)$.

(2) implique (1). Remarque préliminaire: si f est un idempotent d'un anneau A, il résulte immédiatement de [17, (2. 0)] qu'un idempotent contenu dans l'anneau fAf y est primitif si et seulement s'il est primitif dans A. On parlera donc d'idempotents primitifs sans préciser dans quel anneau. Et si $\varepsilon\in fAf$ et $\eta\in fAf$ sont des idempotents primitifs, les A-modules $A\varepsilon$ et $A\eta$ sont isomorphes si et seulement si les fAf-modules $fA\varepsilon$ et $fA\eta$ sont isomorphes, toujours d'après [17, (2. 0)].

Supposons la condition (2) remplie. (La preuve de cette implication est la même que celle de Fuller [6, p.125]). Alors l'anneau fAf est semi-parfait, d'après (1. 7). Soit $f=\sum_{1\leq k\leq n}\sum_{1\leq i\leq p(k)} f_{ki}$ une décomposition de f en somme d'idempotents primitifs orthogonaux, où $Af_{ki}\cong Af_{hj}$ si et seulement si $h=k$. Alors d'après (1. 8), $fAe \cong \bigoplus_{1\leq k\leq n}(\bigoplus_{1\leq j\leq q(k)} \hat{E}_{kj})$, où $\hat{E}_{kj}\cong E(T(fAf_{k1})$ pour tout j, $1\leqq j\leqq q(k)$. Maintenant définissons $E=\bigoplus_{1\leq k\leq n}(\bigoplus_{1\leq j\leq q(k)} E_{kj})$, où on prend $E_{kj}\cong E(T(Af_{k1}))$ pour tout j, $1\leqq j\leqq q(k)$. En particulier il résulte de cette définition de E que E et fA forment une paire. Et d'après (3. 4), $fE\cong fAe$. Alors, en appliquant cela et le lemme (3. 3)(c) avec $J'=0$ et $J=A$, on en déduit $E\cong \mathrm{Hom}_{fAf}(fA,fAe)$, d'où $E\cong Ae$, d'après notre hypothèse (b). Donc Ae est une somme directe d'enveloppes injectives de modules simples, et symétriquement pour fA; et on a vu que $Ae(\cong E)$ et fA forment une paire, ce qui achève la preuve.

Alors l'équivalence des conditions (2) et (3) du résultat (1. 2) peut être considérée comme un cas particulier et un corollaire immédiat du théorème ci-dessus. En effet si le bimodule ${}_AA_A$ définit une dualité de Morita, il suffit d'appliquer ce théorème avec $e=f=1$ (la condition (2)(b) de (3. 6) est alors évidente) pour en déduire que ${}_AA$(resp. A_A) est une somme directe d'enveloppes injectives de modules à gauche (resp. à droite) simples. Réciproquement si on suppose remplie cette dernière condition, ${}_AA$ et A_A sont antistrophiques l'un à l'autre d'après (2. 6), donc le bimodule ${}_AA_A$ définit une dualité de Morita, en appliquant encore le théorème (3. 6) avec $e=f=1$.

On peut appeler *anneau* $QF3^-$ à gauche un anneau ayant un nombre fini de types d'idéaux à gauche minimaux, et tel que l'enveloppe injective de chacun d'eux soit projective. (Un anneau $QF3$ est donc $QF3^-$) Alors, comme corollaire de notre théorème (3. 6), le résultat suivant généralise le théorème (3. 6) de K.R.Fuller [5]:

(3. 7) COROLLAIRE. *Les assertions suivantes sont équivalentes pour un anneau* A:
(1) A *est un anneau* $QF3^-$ *à gauche et à droite*;
(2) *Il existe des idempotents* e *et* f *de* A *tels que*:
(a) *Le bimodule* ${}_{fAf}fAe_{eAe}$ *définit une dualité de Morita*;
(b) ${}_AAe\cong \mathrm{Hom}_{fAf}(fA,fAe)$, *et* $fA_A\cong \mathrm{Hom}_{eAe}(Ae,fAe)$;
(c) Ae(*resp.* fA) *contient une copie de chaque idéal à gauche* (*resp. à droite*) *minimal de* A.

PREUVE (2) implique (1). Il suffit d'appliquer le théorème (3. 6).

(1) implique (2). Soit A un anneau $QF3^-$ à gauche, et $(S_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille complète d'idéaux à gauche minimaux non isomorphes, et soit e_i un idempotent tel que $Ae_i\cong E(S_i)$, $1\leqq i\leqq n$ (on montre facilement que les e_i sont deux à deux

orthogonaux). Supposons maintenant que A est $QF\,3^-$ à droite : il résulte du théorème (2. 5) que $(\Phi(S_i))_{1\leq i\leq n}$ est une famille complète d'idéaux à droite minimaux non isomorphes. Soit f_i un idempotent tel que $f_iA\cong E(\Phi(S_i))$, $1\leqq i\leqq n$ (les f_i sont deux à deux orthogonaux) : Ae_i est antistrophique à f_iA(2. 5). Alors si on note $e=\sum_{1\leq i\leq n} e_i$, $f=\sum_{1\leq i\leq n} f_i$, Ae et fA sont antistrophiques l'un à l'autre. La condition (1) de (3. 6) étant donc remplie, il suffit d'appliquer ce théorème.

REMARQUE : Dans le résultat (3. 7), on peut remplacer $QF3^-$ par $QF3$, pourvu qu'on remplace aussi la condition (2) (c) par celle-ci : Ae (resp. fA) est fidèle.

La section 4 est une application des résultats (3. 6) et (3. 7). On vient de voir que la présence d'enveloppes injectives de modules simples dans un anneau équivaut à l'existence d'une dualité de Morita entre deux sous-anneaux. On va montrer réciproquement que si un bimodule ${}_AU_B$ définit une dualité de Morita, il existe un sur-anneau D de A et B contenant des enveloppes injectives de modules simples telles que la dualité de Morita qu'elles impliquent soit justement la dualité de ${}_AU_B$.

4. Une bijection entre dualités de Morita et certains anneaux QF3.

Un morphisme d'un bimodule ${}_AU_B$ dans un bimodule ${}_{A'}U'_{B'}$ est un triple (v, u, w) où v (resp. w) est un morphisme unitaire d'anneaux $A\to A'$ (resp. $B\to B'$), et u un morphisme de groupes additifs tel que $u(axb)=v(a)u(x)w(b)$. Celà définit sur la classe $\mathfrak{B}$ des bimodules une structure de catégorie (la composition des morphismes est évidente).

Soit $\mathfrak{A}$ la classe des triples (f, D, e) où D est un anneau, f et e des idempotents de D. Un morphisme $(f, D, e)\to(f', D', e')$ est un morphisme d'anneaux Φ: $D\to D'$ tel que $\Phi(f)=f'$, $\Phi(e)=e'$. Celà définit sur la classe $\mathfrak{A}$ une structure de catégorie. (Soit Φ un morphisme $D\to D'$, et soit $X\subset D$; on note $\Phi|X$ la restriction de Φ à X).

On vérifie facilement qu'on définit un foncteur H de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ en posant : $H((f, D, e))={}_{fDf}fDe_{eDe}$, et, si Φ est un morphisme $(f, D, e)\to(f', D', e')$:

$$H(\Phi)=(\Phi|fDf,\ \Phi|fDe,\ \Phi|eDe).$$

Si ${}_AU_B$ est un bimodule, on note (A, U, B) l'anneau défini sur le groupe additif produit $A\times U\times B$ en posant $(a, x, b)(a', x', b')=(aa', ax'+xb', bb')$. On vérifie facilement qu'on définit un foncteur K de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ en posant :

$$K({}_AU_B)=((1_A, 0, 0),\ (A, U, B),\ (0, 0, 1_B)),$$

et, si (v, u, w) est un morphisme ${}_AU_B\to{}_{A'}U'_{B'}$:

$$K((v, u, w))(a, x, b)=(v(a),\ u(x),\ w(b)),\ \text{pour}\ (a, x, b)\in(A,U,B).$$

Alors $HK({}_AU_B)={}_{(A,0,0)}(0, \mathrm{U}, 0)_{(0,0,B)}$, et le morphisme (v_A, u_U, w_B) défini par

$v_A(a)=(a,0,0)$, $u_U(x)=(0,x,0)$, $w_B(b)=(0,0,b)$ est un isomorphisme de ${}_AU_B$ sur $HK({}_AU_B)$. Donc $HK\cong Id(\mathfrak{B})$, où on désigne ainsi le foncteur identité sur $\mathfrak{B}$. Par contre KH n'est pas isomorphe à $Id(\mathfrak{A})$: en effet tout objet (f,D,e) appartenant à $KH(\mathfrak{A})$ vérifie la condition suivante :

$$(1)\qquad e+f=1_D,\ \text{et}\ eDf=0.$$

Par ailleurs, pour tout objet (f,D,e) de $\mathfrak{A}$ considérons les morphismes de groupes additifs suivants :

m_1: $D\to(fDf,fDe,eDe)$, défini par $m_1(d)=(fdf,fde,ede)$, où $d\in D$;
m_2: $(fDf,fDe,eDe)\to D$, défini par $m_2(a,x,b)=a+x+b$, où $a\in fDf$, $x\in fDe$, $b\in eDe$.

(4.1) LEMME. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un objet (f,D,e) de $\mathfrak{A}$:*
(1) *$e+f=1_D$, et $eDf=0$;*
(2) *(f,D,e) est isomorphe à un objet de $K(\mathfrak{B})$;*
(3) *Le morphisme m_1, défini ci-dessus, est un isomorphisme d'anneaux :*
(4) *Le morphisme m_2, défini ci-dessus, est un isomorphisme d'anneaux.*

PREUVE. Elle est élémentaire.

(4.2) Il en résulte que si on note $\mathfrak{A}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}$ dont la classe des objets est la classe des objets isomorphes aux objets de $K(\mathfrak{B})$, et H' la restriction du foncteur H à $\mathfrak{A}'$, alors $KH'\cong Id(\mathfrak{A}')$(et $H'K\cong Id(\mathfrak{B})$), donc *les foncteurs H' et K définissent une équivalence naturelle entre les catégories $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}$.*

(4.3) Soit ${}_AU_B$ un bimodule. Un élément ε de A est idempotent si et seulement si l'élément $(\varepsilon,0,0)$ de (A,U,B) est idempotent. Et comme $(\varepsilon,0,0)(A,U,B)(\varepsilon,0,0)=(\varepsilon A\varepsilon,0,0)$, ε est primitif dans A si et seulement si $(\varepsilon,0,0)$ est primitif dans (A,U,B)[17, (2.3)]. Et deux idempotents ε et η de A sont orthogonaux si et seulement si $(\varepsilon,0,0)$ et $(\eta,0,0)$ sont orthogonaux dans (A,U,B).

(4.4) LEMME. *Soit ${}_AU_B$ un bimodule. L'anneau (A,U,B) est semi-parfait si et seulement si A et B sont semi-parfaits.*

PREUVE. Supposons (A,U,B) semi-parfait. Alors les idempotents $(1_A,0,0)$ et $(0,0,1_B)$ sont sommes d'idempotents primitifs orthogonaux, donc d'après (4.2), 1_A(resp. 1_B) est somme d'idempotents primitifs orthogonaux, donc A(resp. B) est semi-parfait (B.J.Muller [13, théorème 1]). Dans l'autre sens, si A et B sont semi-parfaits, 1_A et 1_B sont sommes d'idempotents primitifs orthogonaux, donc aussi $1_{(A,U,B)}[=(1_A,0,0)+(0,0,1_B)]$, puisque $(1_A,0,0)(0,0,1_B)=0$. Donc (A,U,B) est semi-parfait.

(4.5) THÉOREME. *Soit ${}_AU_B$ un bimodule définissant une dualité de Morita. L'anneau (A, U, B) est semi-parfait et $QF3$ á gauche et á droite.*

Plus précisément, si on note $f=(1_A, 0, 0)$, $e=(0, 0, 1_B)$, et D l'anneau (A, U, B), alors l'idéal De(resp. fD) est fidèle et somme directe d'enveloppes injectives d'idéaux à gauche (resp. à droite) minimaux (le module à gauche[resp. à droite] fidèle minimal est "l'idéal de base" de De[resp. de fA]).

PREUVE. D est semi-parfait d'après le lemme (4.4). On a vu que le bimodule ${}_{fDf}fDe_{eDe} = HK({}_AU_B)$ est isomorphe au bimodule ${}_AU_B$, donc définit une dualité de Morita: ainsi la condition (2)(a) du résultat (3.7) est remplie. Puisque $e+f=1_D$, on a un isomorphisme de fDf-modules à gauche $fD \cong fDe \oplus fDf$, d'où l'isomorphisme de eDe-modules à droite $\mathrm{Hom}_{fDf}(fD, fDe) \cong \mathrm{Hom}_{fDf}(fDe, fDe) \oplus \mathrm{Hom}_{fDf}(fDf, fDe)$ $\cong eDe \oplus fDe \cong De$. Et finalement, en considérant de plus les structures de D-modules à gauche, on a ${}_DDe_{eDe} \cong \mathrm{Hom}_{fDf}(fD, fDe)$; et symétriquement ${}_{fD\,f}fD_D \cong \mathrm{Hom}_{eAe}(De, fDe)$: ainsi la condition (2)(b) de (3.7) est remplie.

Soit $f = \sum_{1\leqq k\leqq n} \sum_{1\leqq i\leqq p(k)} f_{ki}$ une décomposition de f en somme d'iempotents primitifs, où $f_{ki} \sim f_{hj}$ si et seulement si $h=k$. Alors $De \cong \bigoplus_{1\leqq k\leqq n} (\bigoplus_{1\leqq j\leqq q(k)} E_{kj})$ où $E_{kj} \cong E(T(Df_{k1}))$, $1 \leqq j \leqq q(k)$. (voir théorème (3.6), preuve que (2) implique (1)).

Enfin montrons que De est fidèle. $De = (0, U, B)$: si $(0, 0, 0) = (a, x, b)(0, y, c)$ $= (0, ay+xc, bc)$ pour tous $y \in U, c \in B$, on en déduit, en prenant $c=0$, que $aU=0$, donc $a=0$ puisque U est fidèle dans $\mathfrak{M}_A$; puis en prenant $c=1$ on obtient $x=0=b$, donc $(a, x, b)=(0, 0, 0)$. Et symétriquement fD est fidèle, ce qui achève la preuve.

De plus on peut remarquer que De(resp. fA) est la somme de tous les idéaux enveloppes injectives d'idéaux simples de A: en effet soit I un idéal à gauche qui est enveloppe injective d'un idéal simple. Alors $I=D\varepsilon$, où ε est un idempotent primitif, d'après (2.2), et est isomorphe à un facteur direct de De, d'après ce qu'on vient de voir. Comme $D = De \oplus Df$, $D\varepsilon = D\varepsilon_e \oplus D\varepsilon_f$, où on note ε_e et ε_f les projections respectives de ε sur De et sur Df. Donc $D\varepsilon = D\varepsilon_e$ ou $D\varepsilon = D\varepsilon_f$. Mais $D\varepsilon_f$ n'est pas isomorphe à un facteur direct de De, donc $D\varepsilon = D\varepsilon_e \subset De$.

(4.6). Maintenant soit D un anneau semi-parfait $QF3$ à gauche et à droite, et soit $D = \bigoplus_{1\leqq i\leqq r} De_i$ une décomposition de D en somme directe d'idéaux primitifs. Soit $e = \sum_{j\in J} e_j$, où $J \subset (1, 2, \cdots, r)$, et où les idéaux De_j sont ceux des De_i qui sont enveloppes injectives de modules simples. Il résulte du théorème de Krull-Schmidt-Azumaya que e est bien défini de façon unique, i.e. indépendant de la décomposition choisie de D en somme direct d'idéaux primitifs. On définit symétriquement un idempotent f avec les idéaux à droite primitifs de D. Nous dirons que l'objet (f, D, e) ainsi obtenu est *l'objet* (semi-parfait) $QF3$ *associé à* D. Alors le théorème

(4. 5) montre que, si un bimodule ${}_AU_B$ définit une dualité de Morita, l'anneau (A, U, B) est semi-parfait $QF3$ à gauche et à droite, *et que l'objet* $K({}_AU_B) = ((1_A, 0, 0), (A, U, B), (0, 0, 1_B))$ *est justement l'objet* $QF3$ *associé à l'anneau* (A, U, B) par le procédé ci-dessus.

D'autre part si D est un anneau semi-parfait $QF3$ à gauche et à droite, et (f, D, e) l'objet $QF3$ associé à D, alors le bimodule ${}_{fDf}fDe_{eDe} = H(f, D, e)$ définit une dualité de Morita, d'aprés (3. 6), et si $e+f=1_D$ et $eDf=0$, alors $K({}_{fDf}fDe_{eDe}) \cong (f, D, e)$, d'après (4. 2).

(4. 7) EN RÉSUMÉ : *les foncteurs* K *et* H' *définissent des bijections réciproques entre les classes d'isomorphisme de dualités de Morita et les classes d'isomorphisme d'objets semi-parfaits* $QF3$ *appartenant à* $\mathfrak{A}'$, *i.e. les classes d'isomorphisme d'anneaux* D *semi-parfaits* $QF3$ *à gauche et à droite tels que les idempotents* e *et* f *associés à* D (définis en (4. 6) *vérifient la condition* : $e+f=1_D$ *et* $eDf=0$).

Ce résultat met en évidence une relation précise entre ces deux généralisations des anneaux QF que constituent les dualités de Morita et les anneaux $QF3$, généralisations dans des directions à première vue très différentes.

5. Remarques sur les modules projectifs (resp. injectifs) dans le cas d'une dualité de Morita. Soit ${}_AU_B$ un bimodule, M un A-module à gauche. On note $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, U)$, et on l'appelle le U-dual de M.

Si le bimodule ${}_AU_B$ définit une dualité de Morita, Morita [11, théorème 2. 5] montre que le U-dual de tout A-module à gauche projectif et U-reflexif est injectif. Plus précisément on a le résultat suivant :

(5. 1) PROPOSITION. *Soit* ${}_AU_B$ *un bimodule définissant une dualité de Morita. Alors* :

(1) *Le* U*-dual de tout* A*-module à gauche projectif est injectif* ;

(2) *Les assertions suivantes sont équivalentes pour un* A*-module à gauche projectif* P :

(a) *P est U-reflexif* ;

(b) *P est de type fini.*

PREUVE. Soit P un A-module à gauche projectif. Comme A est semi-parfait, $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$, où P_i est projectif indécomposable, i. e. isomorphe à un idéal primitif (B.J.Müller [13, théorème 3]). Alors $P^* \cong \prod_{i \in I} P_i^*$ est injectif (puisque isomorphe à un facteur direct de $A^* \cong U_B$), donc P^* est injectif dans $\mathfrak{M}_B$. Comme aucune somme directe infinie n'est U-reflexive (B. Osofsky [16, lemme 13]), si P est U-réflexif, I est fini. Et réciproquement, si I est fini, P est U-réflexif, puisque P_i l'est, pour tout $i \in I$.

Pour les modules injectifs, on a seulement le résultat suivant:

(5.2) PROPOSITION. *Soit ${}_AU_B$ un bimodule définissant une dualité de Morita. Les assertions suivantes sont équivalentes pour un A-module à gauche E:*

(a) *E^* est projectif et U-réflexif;*

(b) *E^* est projectif et E est U-réflexif;*

(c) *E est somme directe finie d'enveloppes injectives de A-modules à gauche simples.*

PREUVE. (a) implique (c). Soit E^* projectif et U-réflexif. Alors d'après (5.1), $E^* = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} P_i$, où P_i est isomorphe à un idéal à droite primitif de B. Puisque le bimodule ${}_AU_B$ définit une dualité de Morita, $E \cong E^{**} \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq n} P_i^* \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq n} E((T(P_i))^*)$, et $(T(P_i))^*$ est bien un module simple.

(c) implique (b). Soit $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} E_i$, où E_i est enveloppe injective d'un A-module à gauche simple, donc E_i est isomorphe à un facteur direct indécomposable de ${}_AU$. Alors E_i est U-reflexif, $1 \leq i \leq n$, donc E est U-reflexif. Et E_j^* est isomorphe à un facteur direct indécomposable de $({}_AU)^* \cong B_B$, donc à un idéal à droite primitif de B. Alors E^* est projectif dans $\mathfrak{M}_B$.

(b) implique (a). Si un module E est U-reflexif, E^* aussi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. AZUMAYA, Completely faithful modules and self-injective rings, Nagoya Math. J., 27(1966), 697-708.

[2] H. BASS, Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. Math. Soc., 95(1960), 466-488.

[3] N. BOURBAKI, Algèbre, chapitre 8. Modules et anneaux semi-simples, Herman, Paris.

[4] J. DIEUDONNE, Remarks on Quasi-Frobenius rings, Ill. J. Math., 2(1958), 346-354.

[5] K. R. FULLER, The structure of *QF3* rings, Trans. Amer. Math. Soc., 134(1968), 343-354.

[6] K. R. FULLER, On indecomposable injectives over artinian rings, Pacific J. Math., 29 (1969), 115-135.

[7] M. HARADA, *QF3* and semi-primary PP-rings, II, Osaka J. Math., 3(1966), 21-27.

[8] N. JACOBSON, Structure of rings, 1964.

[9] T. KATO, Self-injective rings, Tôhoku Math. J., 19(1967), 469-479.

[10] T. KATO, Som generalizations of QF-rings. Proc. Japan. Acad., 44(1968), 144-119.

[11] K. MORITA, Duality for modules and its appllications ... Sci. Rep. T. K. D., 6(1958), 83-142.

[12] B. J. MULLER, On Morita duality, Canad. J. Math., 21(1969), 1338-1347.

[13] B. J. MULLER, On semi-perfect rings, Ill. J. Math., 14(1970), 464-467.
[14] T. NAKAYANA, On Frobeniusean algebras II, Ann. of Math., 42(1941), 1-21.
[15] T. NAKAYAMA, Note on uni-serial and generalized uni-serial rings, Proc. Imp. Acad. Jap., (1941), 285-289.
[16] B. OSOFSKY, A generalization of QF-rings, J. Algebra, 4(1966), 373-387.
[17] B. ROUX, Modules générateurs et cogénérateurs relatifs, Univ. Sci. Tech. (Montpellier), Math., Publ., 105(1971).
[18] E. A. RUTTER, PF and $QF3$-rings, Arch. Math., 6(1968), 608-610.
[19] K. SUGANO, A note on Azumaya's theorem, Osaka J. Math., 4(1967), 157-160.

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
34-MONTPELLIER, FRANCE